# Tema 10: Distribuciones binomial y normal.

## 10.1 Variables aleatorias.

- **Variable aleatoria** X: es la función o ley que asocia a cada elemento del espacio muestral un número real. Esto permite sustituir los resultados de un experimento por números y los sucesos por subconjuntos de números reales. Las variables aleatorias pueden ser discretas o continuas, según tomen un número finito o infinito de valores.
  Por ejemplo, en el experimento aleatorio de lanzar tres monedas el espacio muestral es E = [CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX]. Supongamos que a cada suceso le asignamos el número de caras obtenidas. Esta función que acabamos de construir es una variable aleatoria (discreta).
  Consideremos el experimento que consiste en elegir al azar 100 judías de una plantación y medir su longitud. La función que asocia a cada judía su longitud es una variable aleatoria continua.
- **Función de probabilidad** (de una variable aleatoria) es la ley que asocia a cada valor $x_i$ de la variable aleatoria su probabilidad $p_i = P(X = x_i)$.
- **Función de distribución F(x)** (de una variable aleatoria) es la ley que asocia a cada valor de la variable aleatoria, la probabilidad acumulada de este valor.
  $$F(x) = P(X \le x)$$
- **Media** de una variable aleatoria discreta: $\boxed{\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i}$
- **Varianza** de una variable aleatoria discreta: $\boxed{\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p_i}$

  Ejemplo: Apuntar el número de caras al lanzar al aire tres monedas.
  La función de probabilidad es:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 1/8 | 3/8 | 3/8 | 1/8 |

  La función de distribución es:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 1/8 | 4/8 | 7/8 | 8/8 |

  La media es: $0\cdot(1/8)+1\cdot(3/8)+2\cdot(3/8)+3\cdot(1/8)=1{,}5$ y la varianza es:
  $(0-1{,}5)^2\cdot 1/8+(1-1{,}5)^2\cdot 3/8+(2-1{,}5)^2\cdot 3/8+(3-1{,}5)^2\cdot 1/8=0{,}6667$.
  Ejemplo: en una bolsa hay bolas numeradas: 9 bolas con un 1, 5 bolas con un 2 y 6 con un 3. Sacamos una bola y vemos que número tiene.
  La función de probabilidad es:

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $p_i$ | 9/20 | 5/20 | 6/20 |

  La función de distribución es:

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $p_i$ | 9/20 | 14/20 | 20/20 |

  La media es $1\cdot(9/20)+2\cdot(5/20)+3\cdot(6/20)=1{,}85$ y la varianza es:
  $(1-1{,}85)^2\cdot 9/20+(2-1{,}85)^2\cdot 5/20+(3-1{,}5)^2\cdot 6/20=0{,}72$ .

## 10.2 Distribución Binomial

- Una variable aleatoria discreta es **binomial** si cumple las siguientes características:
  1. Los posibles resultados se clasifican en dos categorías, éxito o fracaso (A con probabilidad p y $\overline{A}$ con probabilidad $q = 1 - p$).
  2. El resultado obtenido en cada prueba es independiente de los resultados anteriores.
  3. La probabilidad de éxito y fracaso es siempre constante: p y $q = 1 - p$.

  Ejemplo: fumadores de una población, número de aprobados de la clase, días de lluvia a lo largo de un año, número de caras al tirar una moneda, etc.

- **Función de probabilidad:** $\boxed{P(X = r) = \binom{n}{r} p^r \cdot q^{n-r}}$ donde n el numero total de pruebas, r el número de éxitos, p es la probabilidad de éxito y q la probabilidad de fracaso. Las expresiones $\binom{n}{r}$ se llaman números combinatorios y se obtienen a partir de factoriales: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$, siendo el factorial de un número: $n! = n \cdot (n-1) \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, ejemplo 3!=3·2·1=6.
- **Función de distribución** $\boxed{P(X \le x) = \sum_{r=1}^{x} \binom{n}{r} p^r \cdot q^{n-r}}$
- **Media** $\boxed{\mu = n \cdot p}$
- **Varianza** $\boxed{\sigma^2 = n \cdot p \cdot q}$
- **Desviación típica** $\boxed{\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}}$

Ejemplo: Se lanza una moneda 11 veces:

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener 5 caras?

  $P(X = 5) = \binom{11}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0{,}2256$. Es decir, el 22,56%.

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener 5 o menos caras?

  $$P(X \le 5) = \binom{11}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{11} + \binom{11}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{11}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^9 +$$
  $$+ \binom{11}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^8 + \binom{11}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \binom{11}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0{,}5$$
  Es decir, el 50%.

- ¿Cuántas caras se espera obtener por término medio?

  $\mu = n \cdot p = 11 \cdot 0{,}5 = 5{,}5$.

- ¿Cuál es la desviación típica?

  $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q = 11 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 2{,}75$. Luego, $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{2'75} = 1{,}6583$.

  Otro ejemplo: un examen tipo test tiene 10 preguntas, cada una de ellas con tres opciones para elegir. Si un alumno contesta al azar, calcula la probabilidad de que:

a) No acierte ninguna. Se trata de una binomial $B\left(10, \frac{1}{3}\right)$

$$P[x=0]=\binom{10}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{10}=0{,}0173.$$ Es decir, el 1,73%.

b) Acierte más de 8 preguntas.

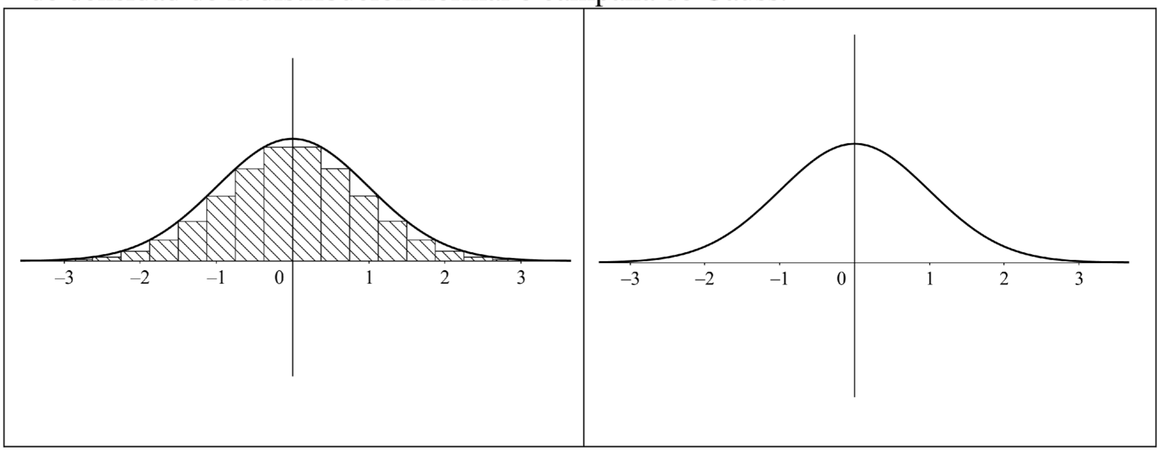
$$P[x>8]=p[x=9]+p[x=10]=\binom{10}{9}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{9}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)+\binom{10}{10}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{10}=$$

$$=10\cdot\frac{2^9}{3^{10}}+\frac{1}{3^{10}}=0{,}0867$$ . Es decir, el 8,67%.

## 10.3 Campana de Gauss.

- Carl Friedrich Gauss (matemático alemán 1777 − 1855) estudiando los errores que se producen al medir reiteradamente una magnitud, demostró que se distribuían según la función: $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ . Siendo $\mu$ la media y $\sigma$ la desviación típica de la distribución de las medidas de la magnitud.

- La misma función resulta cuando en un histograma de frecuencias relativas de una variable continua aumenta el número de intervalos indefinidamente y su amplitud disminuye. En el siguiente gráfico se observa como el polígono de frecuencias relativas se acerca a la función f(x) anterior que se llama función de densidad de la distribución normal o campana de Gauss.




Una variable aleatoria es normal "si se rige según las leyes del azar". La mayoría de las distribuciones más importantes son normales: pocos individuos en los extremos y aumento paulatino hasta llegar a la parte central en la que están la mayoría de los datos. Ejemplo: la distribución de los pesos de los individuos de cualquier especie, la estatura de una población, la temperatura del mes de agosto a lo largo de 100 años, la longitud de los tornillos que salen de una fábrica, el consumo de cierto producto por familia, el cociente intelectual, el número de productos defectuosos etc. De hecho se ha comprobado que la mayoría de los fenómenos relacionados con psicología, pedagogía, biología, etc., siguen una distribución normal.

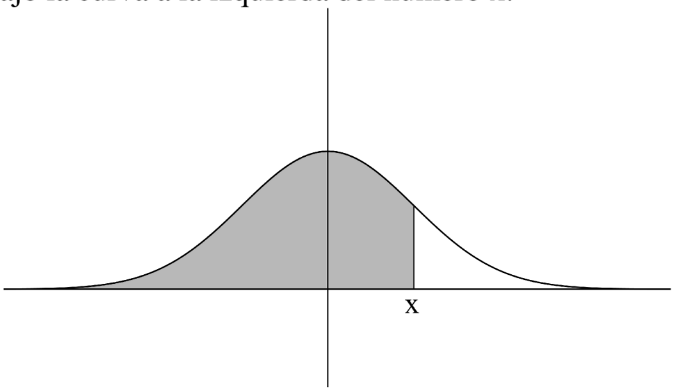
Sin embargo, no todas las distribuciones son normales, por ejemplo si clasificamos según el nivel de renta a los ciudadanos españoles, son muy pocos los que poseen niveles de rentas altas y en cambio son muchos los que poseen niveles de rentas bajas, por tanto la distribución no sería simétrica y en consecuencia no se adapta al modelo normal.

## 10.4 Función de densidad y función de distribución

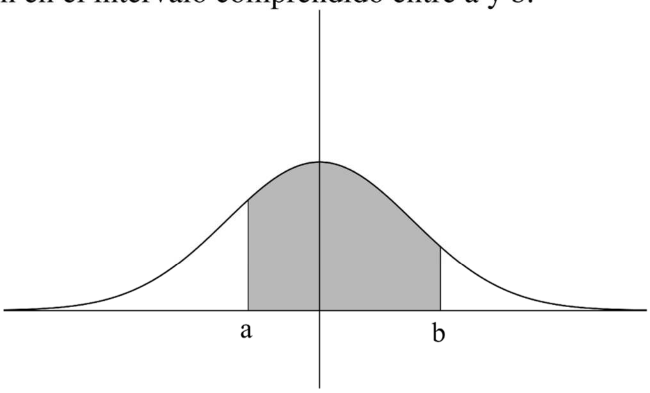
- La función de densidad o campana de Gauss anterior $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ donde $\mu$ es la media y $\sigma$ la desviación típica, cumple las siguientes propiedades:
  - $f(x)\geq 0$.
  - $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. El área encerrada bajo la curva de la función vale 1.
  - $\int_{a}^{b} f(x)dx = P(a \leq X \leq b)$. Es decir, la probabilidad coincide con el área encerrada bajo la curva en ese intervalo.

- La función de distribución o distribución normal es:

  $F(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$. Esta probabilidad coincide con el área acumulada bajo la curva a la izquierda del número x.

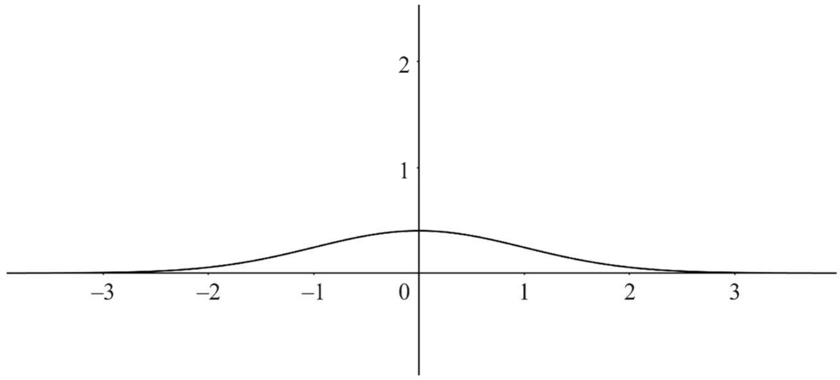



$P(a\leq X\leq b)=\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b)-F(a)$. Que es el área de la región encerrada por la función en el intervalo comprendido entre a y b.

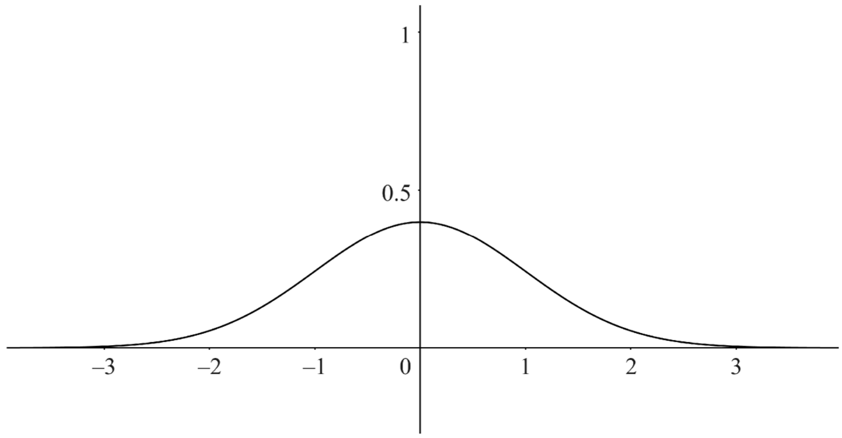


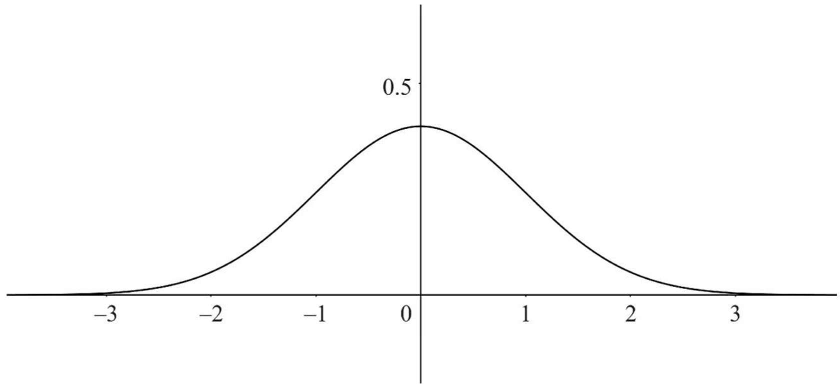
## 10.5 Tipificación de la variable.

- Si $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, es decir, la distribución normal $N(0,1)$, llamada reducida, estándar, o tipificada. Su función de densidad es $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}x^2}$.




En la práctica se utiliza un dibujo de la función un poco deformada en el eje de ordenadas, para conseguir una forma mas acampanada.



La distribución $N(0,1)$ se encuentra tabulada, lo cual permite un cálculo rápido de las probabilidades asociadas a esta distribución. En la práctica, cada distribución normal tiene su propia media y desviación típica, lo que dificulta el cálculo directo de probabilidades, por lo que se hace una transformación que se llama **tipificación de la variable**, que consiste en hacer el siguiente cambio de variable:

$$\boxed{Z = \frac{X-\mu}{\sigma}}$$

A partir de este cambio de variable obtenemos una variable Z que sí es $N(0,1)$ y, por lo tanto, se pueden calcular sus probabilidades utilizando las tablas.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}z^2} \sigma \cdot dz$$

Haciendo una utilización conjunta de $\mu$ y $\sigma$ y buscando en las tablas, obtenemos unas relaciones muy importantes**:**

- En $(\mu \pm \sigma)$ está el 68,26% de los datos ya que:

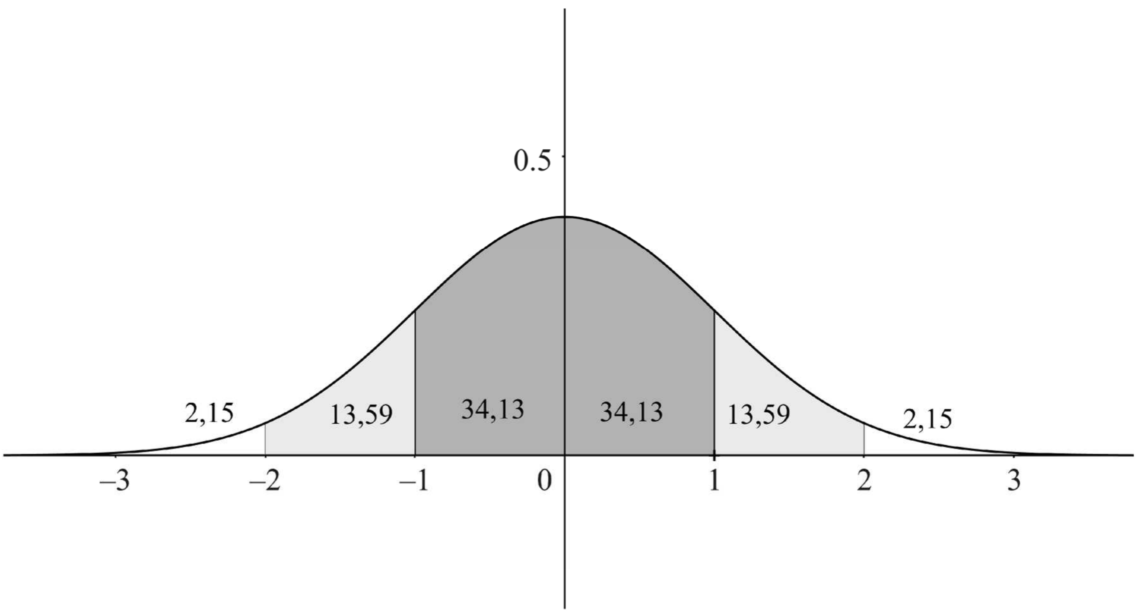
$$P(\mu-\sigma, \mu+\sigma) = P\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma} < Z < \frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right) = P(-1 < Z < 1) = 0{,}6826.$$

- En $(\mu \pm 2\sigma)$ está el 95,44% de los datos ya que:

$$P(\mu-2\sigma, \mu+2\sigma) = P\left(\frac{\mu-2\sigma-\mu}{\sigma} < Z < \frac{\mu+2\sigma-\mu}{\sigma}\right) = P(-2 < Z < 2) = 0{,}9544.$$

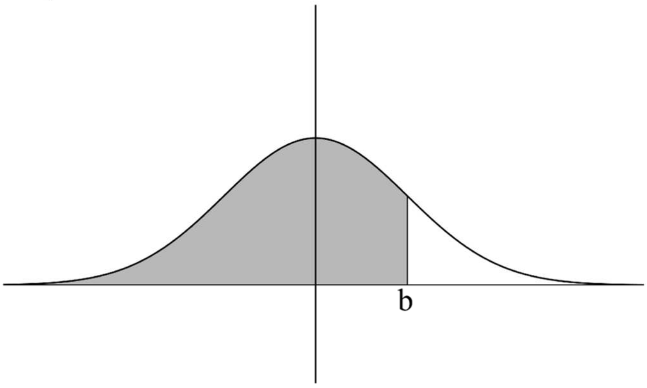
- En $(\mu \pm 3\sigma)$ está el 99,73% de los datos ya que:

$$P(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma) = P\left(\frac{\mu-3\sigma-\mu}{\sigma} < Z < \frac{\mu+3\sigma-\mu}{\sigma}\right) = P(-3 < Z < 3) = 0{,}9973.$$



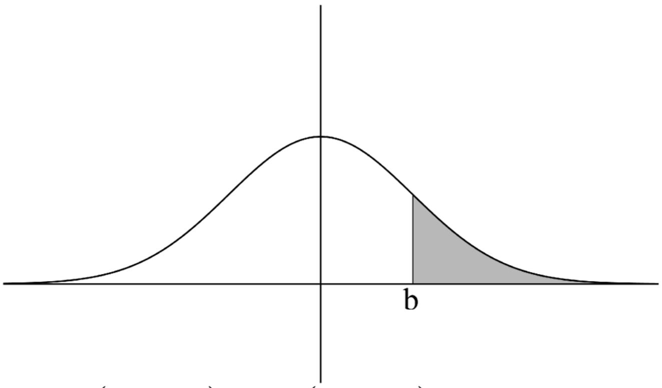
## 10.6 Manejo de tablas.

- $P(Z < b)$. En este caso se busca en la tabla directamente.



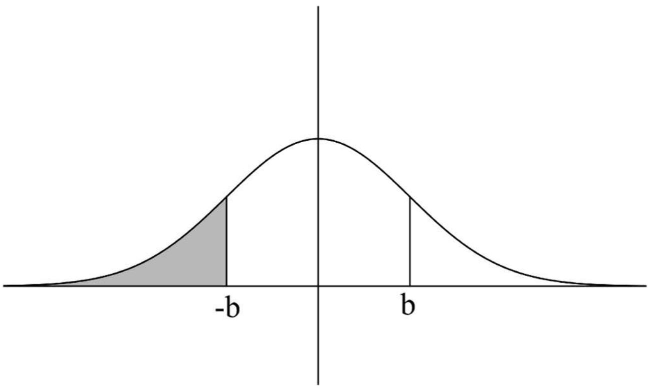

Ejemplo: $P(Z < 1{,}45) = 0{,}9265 = 92{,}65\%$ .

- $P(Z > b) = 1 - P(Z < b)$. Aquí hay que tener en cuenta que $Z > b$ y $Z < b$ son complementarios, por lo que sus probabilidades suman 1.




Ejemplo: $P(Z > 1{,}45) = 1 - P(Z < 1{,}45) = 1 - 0{,}9265 = 0{,}0735 = 7{,}35\%$ .

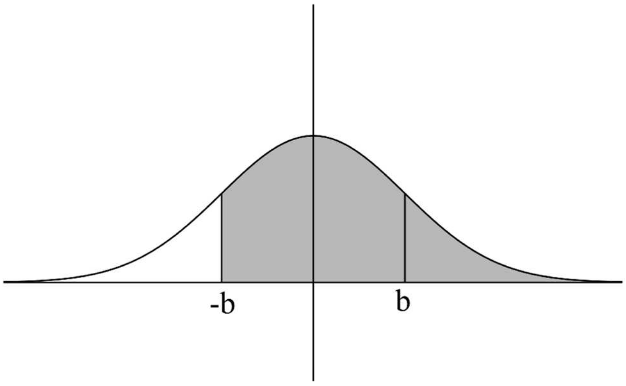
- $P(Z < -b) = P(Z > b) = 1 - P(Z < b)$.




Ejemplo:

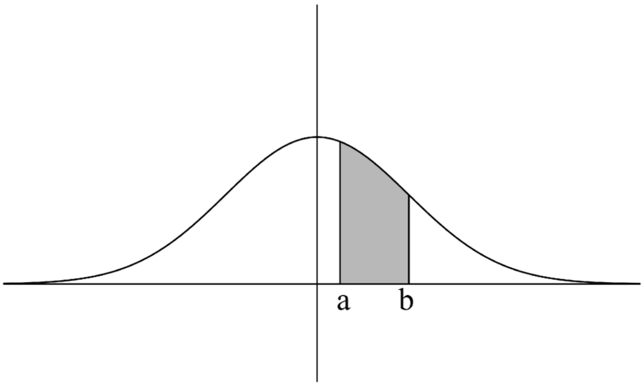
$$P(Z < -0{,}75) = P(Z > 0{,}75) = 1 - P(Z < 0{,}75) = 1 - 0{,}7734 = 0{,}2266 = 22{,}66\%.$$

- $P(Z > -b) = 1 - P(Z < -b) = 1 - P(Z > b) = 1 - [1 - P(Z < b)] = 1 - 1 + P(Z < b) = P(Z < b)$



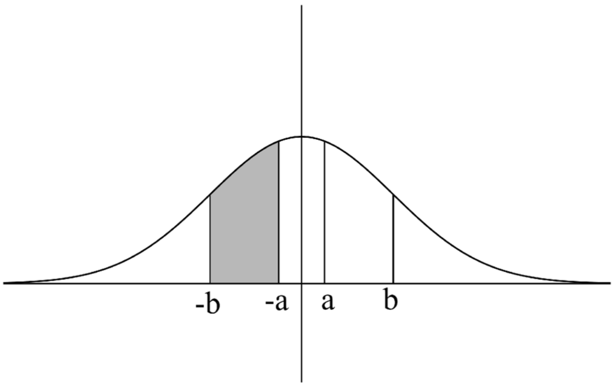

Ejemplo:
$P(Z > -0{,}75) = 1 - P(Z < -0{,}75) = 1 - P(Z > 0{,}75) = 1 - [1 - P(Z < 0{,}75)] =$
$= 1 - 1 + P(Z < 0{,}75) = P(Z < 0{,}75) = 0{,}7734 = 77{,}34\%.$

- $P(a < Z < b) = P(Z < b) - P(Z < a)$ y se busca en las tablas.



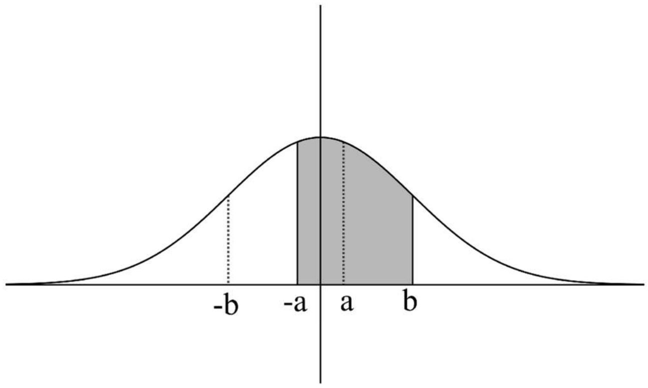

Ejemplo: $P(1{,}25 < Z < 2{,}57) = P(Z < 2{,}57) - P(Z < 1{,}25) = 0{,}9949 - 0{,}8944 =$
$= 0{,}1005 = 10{,}05\%.$

- $P(-b < Z < -a) = P(a < Z < b)$




Ejemplo: $P(-2{,}57 < Z < -1{,}25) = P(1{,}25 < Z < 2{,}57) = 0{,}1005 = 10{,}05\%$.

- $P(-a<Z<b)=P(Z<b)-P(Z<-a)=P(Z<b)-P(Z>a)=P(Z<b)-[1-P(Z<a)]=$
  $=P(Z<b)-1+P(Z<a)$ y se busca en las tablas.




Ejemplo:
$P(-0{,}53<Z<2{,}46)=P(Z<2{,}46)-P(Z<-0{,}53)=P(Z<2{,}46)-P(Z>0{,}53)=$
$=P(Z<2{,}46)-[1-P(Z<0{,}53)]=P(Z<2{,}46)-1+P(Z<0{,}53)=$
$=0{,}9931-1+0{,}7019=0{,}6950=69{,}50\%.$

Ejemplo: Si tenemos una distribución normal $N(2,4)$. Calcular $P(X<7)$:
$P(X<7)=P\left(\frac{X-2}{4}<\frac{7-2}{4}\right)=P\left(Z<-\frac{5}{4}\right)=P(Z>1{,}25)=1-P(Z<1{,}25)=$
$=1-0{,}8944=0{,}1056=10{,}56\%.$

Ejemplo: una cadena hotelera quiere ofrecer a un grupo de personas nuevos destinos turísticos. Para realizar la selección, tiene en cuenta dos factores: la edad y los ingresos mensuales. Se selecciona aleatoriamente un grupo de personas cuyas edades e ingresos siguen unas distribuciones $N(44,5)$ y $N(1900,150)$ respectivamente. Calcula el porcentaje de personas cuya edad está comprendida entre 38 y 50 años.

$P(38<X<50)=P\left(\frac{38-44}{5}<\frac{X-44}{5}<\frac{50-44}{5}\right)=P(-1{,}2<Z<1{,}2)=$
$=P(Z<1{,}2)-P(Z<-1{,}2)=P(Z<1{,}2)-P(Z>1{,}2)=P(Z<1{,}2)-[1-P(Z<1{,}2)]=$
$=P(Z<1{,}2)-1+P(Z<1{,}2)=0{,}8849-1+0{,}8849=0{,}7698=76{,}98\%.$

¿Qué porcentaje de personas tienen ingresos mensuales entre 1675€ y 2095€?
$P(1675<X<2095)=P\left(\frac{1675-1900}{150}<\frac{X-1900}{150}<\frac{2095-1900}{150}\right)=P(-1{,}5<Z<1{,}3)=$
$=P(Z<1{,}3)-P(Z<-1{,}5)=P(Z<1{,}3)-P(Z>1{,}5)=P(Z<1{,}3)-[1-P(Z<1{,}5)]=$
$=P(Z<1{,}3)-1+P(Z<1{,}5)=0{,}9032-1+0{,}9332=0{,}8364=83{,}64\%.$

Ejemplo: el C.I. de los 5600 alumnos de una provincia se distribuyen según una distribución normal $N(112,6)$. Calcula, aproximadamente, cuántos de ellos tienen: (practica ahora tú y comprueba los resultados)

a) más de 112..................2800 alumnos.................la mitad de los alumnos.
b) entre 106 y 118...........3823 alumnos.................este es el caso $(\mu \pm \sigma)$.
c) entre 106 y 112...........1911 alumnos
d) menos de 100................128 alumnos
e) más de 130........................7 alumnos
f) entre 118 y 124............761 alumnos

## 10.7 Aproximación de la distribución binomial.

- Cuando los valores de una distribución binomial son elevados y superan los valores de la tabla binomial, se puede obtener un resultado aproximado mediante la distribución normal. Según demostró De Moivre en su teorema: Dada una binomial $B(n,p)$, siendo: $np \geq 5$ y $nq \geq 5$, podemos aproximar las probabilidades mediante la distribución normal $N(np, \sqrt{npq})$. Que tipificando, tendremos: $Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$ que ahora es una distribución $N(0,1)$.

  Este procedimiento de aproximación es tanto más fiable cuanto mayor es el tamaño de la muestra n y cuanto más cerca está p de $0{,}5$.

  Ejemplo: Se ha comprobado que la probabilidad de que un individuo tenga los ojos marrones es $0{,}6$. Sea X la variable aleatoria que representa el número de individuos que tienen los ojos marrones de un grupo de 1100. Calcular $P(X > 680)$ y $P(X = 680)$.

  $$P(X > 680) = 1 - P(X < 680) = 1 - P\left(Z < \frac{680 - 1100\cdot 0{,}6}{\sqrt{1100\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4}}\right) = 1 - P(Z < 1{,}23) =$$
  $$= 1 - 0{,}8907 = 0{,}1093 = 10{,}93\%.$$

  $$P(X = 680) = P(679{,}5 < X < 680{,}5) = P\left(\frac{679{,}5 - 1100\cdot 0{,}6}{\sqrt{1100\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4}} < Z < \frac{680{,}5 - 1100\cdot 0{,}6}{\sqrt{1100\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4}}\right) =$$
  $$= P(1{,}20 < Z < 1{,}26) = P(Z < 1{,}26) - P(Z < 1{,}20) = 0{,}8962 - 0{,}8849 = 0{,}0113 = 1{,}13\%.$$

  En este apartado debe operarse así, porque en una variable continua, la probabilidad de un valor puntual es nula.