

Tema 2: Aritmética mercantil.

2.1 Proporciones, tantos por 1, tantos por 100 y tantos por 1000.

- Hay varias formas de expresar el significado relativo de una parte respecto al total:
 - Razón o proporción: se expresa con claridad el valor de la parte y del total (pueden ser números decimales). Ejemplo: dos de cada cinco.
 - Fracción: se expresa en el numerador la parte y en el denominador el total (normalmente ambos serán números enteros). Ejemplo: $\frac{2}{5}$.
 - Tanto por 1: se expresa una cantidad tomando como referencia que la cantidad total es la unidad. Ejemplo: 0,4 (por 1).
 - Porcentaje: se expresa una cantidad tomando como referencia que la cantidad total es 100. Ejemplo: 40%.
 - Tantos por mil se expresa una cantidad tomando como referencia que la cantidad total será 1000. Ejemplo: 400‰.

Razón	Fracción	Tanto por 1	%	‰
2 de 5	$\frac{2}{5}$	0,4	40	400
1 de 4	$\frac{1}{4}$	0,25	25	250
0,5 de 4	$\frac{1}{8}$	0,125	12,5	125
0,2 de 5	$\frac{1}{25}$	0,04	4	40
4 de 9	$\frac{4}{9}$	0,4444...	44,44...	444,4...
5 de 10	$\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$	0,5	50	500
2 de 7	$\frac{2}{7}$	0,142857...	14,2857...	142,857...
12 de 100	$\frac{12}{100}=\frac{3}{25}$	0,12	12	120
15 de 75	$\frac{15}{75}=\frac{1}{5}$	0,2	20	200
0,34 de 1	$\frac{17}{50}$	0,34	34	340

2.2 Incrementos y descuentos porcentuales.

- Al realizar un incremento porcentual, se añade un porcentaje al total. Hay varias formas de obtener el resultado final:
 - Hallar el porcentaje y sumarlo a la cantidad. Ejemplo 500 € +20%.
Como el 20% de 500 es: $\frac{20 \times 500}{100} = \frac{10.000}{100} = 100 \text{ €} \Rightarrow 500 + 100 = 600 \text{ €}$.
 - Hacer una regla de tres para obtener un porcentaje mayor que 100.

$$\begin{array}{lcl}
 100\% & \longrightarrow & 500 \\
 120\% & \longrightarrow & x
 \end{array}
 \quad
 x = \frac{120 \cdot 500}{100} = \frac{60000}{100} = 600 \text{ €}.$$
 - Multiplicar por el tanto por 1 asociado al incremento, que será “uno y pico”, 1,20 en nuestro ejemplo: $\Rightarrow 500 \cdot 1,20 = 600 \text{ €}$

- Aplicar la fórmula: $C_{\text{Final}} = C_{\text{Inicial}} \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)$, siendo r el tanto por ciento de incremento (la letra r viene de rédito o interés bancario). En el ejemplo:

$$C_{\text{Final}} = 500 \cdot \left(1 + \frac{20}{100}\right) = 500 \cdot 1,20 = 600 \text{ €}.$$

Otro ejemplo: un artículo cuesta sin I.V.A. 80 €. ¿Cuál es su precio con I.V.A. incluido del 21%?

Utilizamos el método más rápido, el tanto por 1 $\Rightarrow 80 \cdot 1,21 = 96,8 \text{ €}$

- Para deshacer un incremento porcentual y volver a la cantidad inicial, no sería correcto realizar un descuento de igual porcentaje, porque se aplicaría sobre una cantidad diferente: en el ejemplo es **incorrecto** hacer $600 \text{ €} - 20\%$.

Veámoslo:

$$\text{El } 20\% \text{ de } 600 \text{ es: } \frac{20 \times 600}{100} = \frac{12.000}{100} = 120 \text{ €} \Rightarrow 600 - 120 = 480 \text{ €}. \text{ FALSO.}$$

Los otros procesos sí permiten deshacer la operación y son correctos:

- Hacer una regla de tres para obtener el porcentaje inicial del 100%.

$$\begin{array}{ccc} 120\% & \longrightarrow & 600 \\ 100\% & \longrightarrow & x \end{array} \quad x = \frac{100 \cdot 600}{120} = \frac{60000}{120} = 500 \text{ €}.$$
- Dividir por el tanto por 1 asociado al incremento, para volver al principio, en nuestro ejemplo: $600 : 1,2 = 500 \text{ €}$
- Aplicar la fórmula: $C_{\text{Inicial}} = \frac{C_{\text{Final}}}{\left(1 + \frac{r}{100}\right)} \Rightarrow C_{\text{Inicial}} = \frac{600}{\left(1 + \frac{20}{100}\right)} = \frac{600}{1,20} = 500 \text{ €}$

Otro ejemplo: un artículo cuesta con I.V.A. incluido del 21% 96,8 €. ¿Cuál es su precio sin I.V.A.?

Utilizamos el método más rápido, dividir por el tanto por 1 $\Rightarrow 96,8 : 1,21 = 80 \text{ €}$

- Al realizar un descuento porcentual, se resta un porcentaje al total. Hay varias formas de obtener el resultado final:
 - Hallar el porcentaje y restarlo a la cantidad. Ejemplo $300 \text{ €} - 15\%$.
 Como el 15% de 300 es: $\frac{15 \times 300}{100} = \frac{4.500}{100} = 45 \text{ €} \Rightarrow 300 - 45 = 255 \text{ €}.$
 - Hacer una regla de tres para obtener un porcentaje menor que 100.

$$\begin{array}{ccc} 100\% & \longrightarrow & 300 \\ 85\% & \longrightarrow & x \end{array} \quad x = \frac{85 \cdot 300}{100} = \frac{25500}{100} = 255 \text{ €}.$$
 - Multiplicar por el tanto por 1 asociado al descuento, que será “cero y pico”, en nuestro ejemplo $0,85 \Rightarrow 300 \cdot 0,85 = 255 \text{ €}$
 - Aplicar la fórmula: $C_{\text{Final}} = C_{\text{Inicial}} \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right)$. En el ejemplo:

$$C_{\text{Final}} = 300 \cdot \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 300 \cdot 0,85 = 255 \text{ €}.$$

Otro ejemplo: un artículo que cuesta 50 € se rebaja un 30%. ¿Cuál es su nuevo precio rebajado?

Utilizamos el método más rápido, el tanto por 1 $\Rightarrow 50 \cdot 0,7 = 35 \text{ €}$

- Para deshacer un descuento porcentual y volver a la cantidad inicial, no sería correcto realizar un incremento de igual porcentaje, porque se aplicaría sobre una cantidad diferente: en el ejemplo actual, **sería incorrecto** 255 € +15%.

$$15\% \text{ de } 255 \text{ es: } \frac{15 \times 255}{100} = \frac{3825}{100} = 38,25 \text{ €} \Rightarrow 255 + 38,25 = 293,25 \text{ €}. \text{ FALSO.}$$

Los otros procesos sí permiten deshacer la operación y son correctos:

- Hacer una regla de tres para obtener el porcentaje inicial del 100%.

$$\begin{array}{ccc} 85\% & \longrightarrow & 255 \\ 100\% & \longrightarrow & x \end{array} \quad x = \frac{100 \cdot 255}{85} = \frac{2550}{85} = 300 \text{ €}.$$
- Dividir por el tanto por 1 asociado al descuento, para volver al principio, en nuestro ejemplo: $255 : 0,85 = 300 \text{ €}$
- Por la fórmula: $C_{\text{Inicial}} = \frac{C_{\text{Final}}}{\left(1 - \frac{r}{100}\right)} \Rightarrow C_{\text{Inicial}} = \frac{255}{\left(1 - \frac{15}{100}\right)} = \frac{255}{0,85} = 300 \text{ €}.$

Otro ejemplo: un artículo rebajado el 30% cuesta 35 €. ¿Cuál era su antiguo precio antes de ser rebajado?

Utilizamos el método más rápido, dividir por el tanto por 1 $\Rightarrow 35 : 0,7 = 50 \text{ €}$

2.3 Interés simple.

- En el interés simple el capital inicial permanece constante y los intereses obtenidos no se acumulan al capital.

Si llamamos i al interés en tanto por 1, es decir: $i = \frac{r}{100}$ y llamamos t al

número de años, podemos razonar el capital final resultante de la siguiente forma: por cada año, se obtiene de intereses la cantidad $C_{\text{Inicial}} \cdot i$. Por lo tanto,

al cabo de t años tendremos de intereses $C_{\text{Inicial}} \cdot i \cdot t$ y el resultado final será

$C_{\text{Final}} = C_{\text{Inicial}} + C_{\text{Inicial}} \cdot i \cdot t$, que sacando factor común resulta la siguiente

fórmula: $C_{\text{Final}} = C_{\text{Inicial}} (1 + i \cdot t)$.

Ejemplo: se depositan 20.000 € al 12% de interés simple durante 5 años.

Crear una tabla con el capital final en cada uno de los años.

Años	Capital	Interés	C_{Final}
1	20.000 €	2.400 €	22.400 €
2	20.000 €	2.400 €	24.800 €
3	20.000 €	2.400 €	27.200 €
4	20.000 €	2.400 €	29.600 €
5	20.000 €	2.400 €	32.000 €

$$C_{\text{Final}} = 20.000(1 + 0,12 \cdot 5) = 20.000(1 + 0,6) = 20.000 \cdot 1,6 = 32.000 \text{ €}$$

Nota: si los intereses se pagan por meses o días, la fórmula no varía:

- Meses: $C_{\text{final}} = C_{\text{inicial}} \cdot \left(1 + \frac{i \cdot 12 \cdot t}{12}\right) = C_{\text{inicial}} \cdot (1 + i \cdot t)$
- Días: $C_{\text{final}} = C_{\text{inicial}} \cdot \left(1 + \frac{i \cdot 365 \cdot t}{365}\right) = C_{\text{inicial}} \cdot (1 + i \cdot t)$

2.4 Interés compuesto.

- En el interés compuesto, el capital varía cada año porque los intereses obtenidos se van acumulando al capital.

Si llamamos i al interés: $i = \frac{r}{100}$ y t al número de años, podemos razonar el

capital final resultante de la siguiente forma:

Cada año se está realizando un incremento porcentual. Por tanto, se está multiplicando por $(1 + i)$, por lo que al cabo de t años habremos multiplicado por esa cantidad t veces, es decir $(1 + i)^t$ y tendremos la siguiente fórmula:

$$C_{\text{Final}} = C_{\text{Inicial}} \cdot (1 + i)^t$$

Ejemplo: se depositan 20.000 € al 12% de interés compuesto durante 5 años. Crear una tabla con el capital final en cada uno de los años.

Años	Capital	Interes	C_{Final}
1	20.000 €	2.400 €	22.400 €
2	22.400 €	2.688 €	25.088 €
3	25.088 €	3.010,56 €	28.098,56 €
4	28.098,56 €	3.371,8272 €	31.470,3872 €
5	31.470,3872 €	3.776,446464 €	35.246,833664 €

$$C_{\text{Final}} = 20.000(1 + 0,12)^5 = 20.000(1,12)^5 = 20.000 \cdot 1,7623416832 = 35.246,833664 \text{ €}$$

Se han mantenido todos los decimales sin redondear al céntimo, para comprobar que los resultados de la tabla coinciden con la fórmula.

Nota: si los intereses se pagan por semestres, trimestres, bimestres, meses o días, la fórmula pasa a ser la siguiente:

- Semestres: $C_{\text{final}} = C_{\text{inicial}} \cdot \left(1 + \frac{i}{2}\right)^{2t}$
- Trimestres: $C_{\text{final}} = C_{\text{inicial}} \cdot \left(1 + \frac{i}{4}\right)^{4t}$
- Bimestres: $C_{\text{final}} = C_{\text{inicial}} \cdot \left(1 + \frac{i}{6}\right)^{6t}$
- Meses: $C_{\text{final}} = C_{\text{inicial}} \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12t}$
- Días: $C_{\text{final}} = C_{\text{inicial}} \cdot \left(1 + \frac{i}{365}\right)^{365t}$

- La tasa anual equivalente es $T.A.E. = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k - 1$ (k es el nº de períodos).

2.5 Amortización de un préstamo.

- Veamos en primer lugar un repaso sobre las progresiones geométricas: una progresión geométrica es un caso particular de sucesión, en la que cada término se obtiene a partir del término anterior, multiplicando por un número fijo r llamado razón.

$$a_1 = a_1, a_2 = a_1 \cdot r, a_3 = a_1 \cdot r^2, a_4 = a_1 \cdot r^3, \dots \Rightarrow \boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}.$$

Es decir, todos los términos se expresan a partir del primero a_1 y de la razón r, multiplicando al primero por la razón (n-1)-veces.

Ejemplo: hallar el término general de la sucesión: $a_n \equiv 3, 6, 12, 24, \dots$

Claramente, el primer término es $a_1 = 3$ y la razón es $r = 2$.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1} \text{ y podemos comprobarlo sustituyendo n por } 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$a_1 = 3, a_2 = 6, a_3 = 12, a_4 = 24, \dots$$

En las progresiones geométricas se puede calcular la suma de los primeros

términos mediante la fórmula $\boxed{S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1 - r}}$. Ejemplo: hallar la suma de las

10 primeras potencias de 2. $a_n \equiv 2, 4, 8, 16, \dots$, el primer término es $a_1 = 2$, la razón es $r=2$ y el último término o término de lugar 10 es $a_{10} = 1024$, que se obtiene del término general: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$, sustituyendo por 10, $a_{10} = 2^{10} = 1024$. Luego aplicando la fórmula, la suma será:

$$S_{10} = \frac{a_1 - a_{10} \cdot r}{1 - r} = \frac{2 - 1024 \cdot 2}{1 - 2} = \frac{-2046}{-1} = 2046.$$

- Supongamos que pedimos al banco un préstamo de capital C a un interés i en tanto por uno $\left(i = \frac{r}{100}\right)$, que se amortizará en un número de años t mediante

anualidades constantes (sistema de amortización francés). Cada año se amortizará la misma cantidad "a". Esa cantidad "a" se llama anualidad de amortización, y se calcula según el siguiente proceso:

El banco deberá recibir al final según el interés compuesto: $C \cdot (1+i)^t$.

La amortización "a" que hace el cliente el primer año, genera intereses a favor del banco durante t-1 años, convirtiéndose en $a \cdot (1+i)^{t-1}$.

La amortización "a" que hace el cliente el segundo año, genera intereses a favor del banco durante t-2 años, convirtiéndose en $a \cdot (1+i)^{t-2}$.

Y así sucesivamente hasta el penúltimo año, en el que se amortizará una cantidad "a" que generará intereses durante un año, pasando a ser: $a \cdot (1+i)$.

Finalmente el último año se amortiza una cantidad "a" que no generará ningún interés.

Si igualamos la cantidad que debe recibir el banco con las cantidades amortizadas y los intereses que generan dichas cantidades, tendremos:

$$C(1+i)^t = a \cdot (1+i)^{t-1} + a \cdot (1+i)^{t-2} + \dots + a \cdot (1+i) + a$$

La parte de la derecha es la suma (“al revés”) de una progresión geométrica de razón $(1+i)$, y la suma se calcula a partir de la fórmula: $S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1-r}$.

$$C(1+i)^t = \frac{a - a \cdot (1+i)^t}{1 - (1+i)} \Rightarrow C(1+i)^t = \frac{a - a \cdot (1+i)^t}{-i} \Rightarrow C(1+i)^t = \frac{a \cdot (1+i)^t - a}{i}$$

$$\text{Luego: } C(1+i)^t = \frac{a[(1+i)^t - 1]}{i} \Rightarrow a[(1+i)^t - 1] = C(1+i)^t \cdot i \Rightarrow \boxed{a = \frac{C(1+i)^t \cdot i}{(1+i)^t - 1}}$$

Realizando el mismo proceso para una hipoteca que se amortiza en semestres, trimestres, bimestres, meses o incluso días, tendremos las fórmulas siguientes:

$$\text{Semestres: } S = \frac{C \left(1 + \frac{i}{2}\right)^{2t} \cdot \frac{i}{2}}{\left(1 + \frac{i}{2}\right)^{2t} - 1}$$

$$\text{Trimestres: } T = \frac{C \left(1 + \frac{i}{4}\right)^{4t} \cdot \frac{i}{4}}{\left(1 + \frac{i}{4}\right)^{4t} - 1}$$

$$\text{Bimestres: } B = \frac{C \left(1 + \frac{i}{6}\right)^{6t} \cdot \frac{i}{6}}{\left(1 + \frac{i}{6}\right)^{6t} - 1}$$

$$\text{Meses: } m = \frac{C \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12t} \cdot \frac{i}{12}}{\left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12t} - 1}$$

$$\text{Días: } d = \frac{C \left(1 + \frac{i}{365}\right)^{365t} \cdot \frac{i}{365}}{\left(1 + \frac{i}{365}\right)^{365t} - 1}$$

Ejemplo: pedimos un préstamo de 10.000 € al 12 % que pagaremos durante un año en 12 mensualidades.

- Hallar el valor de la mensualidad que debemos pagar.
- Escribir la tabla o cuadro de amortización.

$$\text{Aplicamos la fórmula } m = \frac{C \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12t} \cdot \frac{i}{12}}{\left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12t} - 1} \text{ siendo } C=10.000 \text{ €, } t=1 \text{ y el}$$

$$\text{interés en tanto por uno: } i = \frac{r}{100} = \frac{12}{100} = 0,12.$$

$$m = \frac{10000 \left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{12} \cdot \frac{0,12}{12}}{\left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{12} - 1} = \frac{10000(1+0,01)^{12} \cdot 0,01}{(1+0,01)^{12} - 1} = \frac{10000(1,01)^{12} \cdot 0,01}{(1,01)^{12} - 1}$$

$$m = \frac{100(1,12682503)}{1,12682503 - 1} = \frac{112,682503}{0,12682503} = 888,487886783417 \text{ €}.$$

Meses	Capital antes del pago	Mensualidad	Intereses	Capital amortizado	Capital restante
1	10000	888,487886783417	100	788,487886783417	9211,512113216580
2	9211,512113216580	888,487886783417	92,115121132166	796,372765651251	8415,139347565330
3	8415,139347565330	888,487886783417	84,151393475653	804,336493307763	7610,802854257570
4	7610,802854257570	888,487886783417	76,108028542576	812,379858240841	6798,422996016730
5	6798,422996016730	888,487886783417	67,984229960167	820,503656823249	5977,919339193480
6	5977,919339193480	888,487886783417	59,779193391935	828,708693391482	5149,210645802000
7	5149,210645802000	888,487886783417	51,492106458020	836,995780325397	4312,214865476600
8	4312,214865476600	888,487886783417	43,122148654766	845,365738128651	3466,849127347950
9	3466,849127347950	888,487886783417	34,668491273480	853,819395509937	2613,029731838010
10	2613,029731838010	888,487886783417	26,130297318380	862,357589465037	1750,672142372980
11	1750,672142372980	888,487886783417	17,506721423730	870,981165359687	879,690977013289
12	879,690977013289	888,487886783417	8,796909770133	879,690977013289	0
SUMA		10661,854641401	661,854641401	10000	

Se han mantenido todos los decimales, sin redondear al céntimo, para comprobar que la tabla y la fórmula son coherentes. Por tanto, al final no se debe nada. También puede observarse como la cantidad pagada coincide con la suma de capital más intereses.