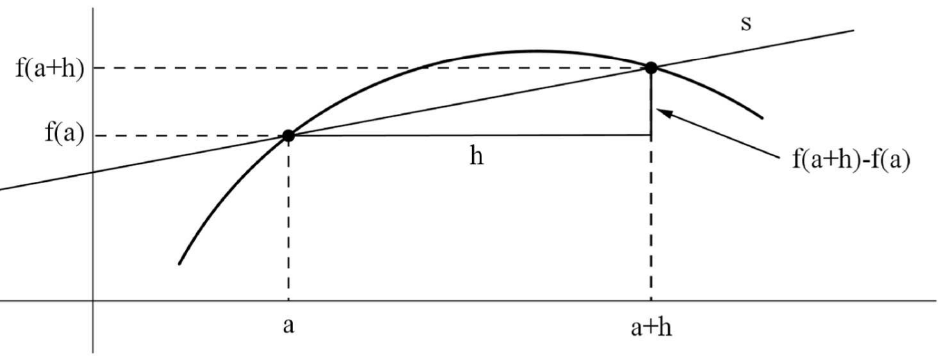
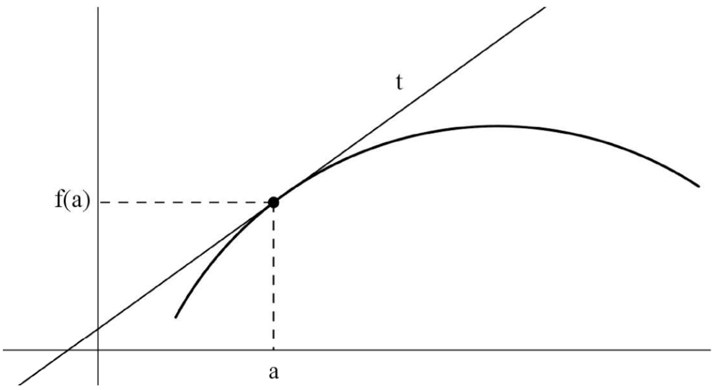
Tema 4: Derivadas.

4.1 Concepto de derivada. Interpretación gráfica.

- Definición: la derivada de una función f(x) en un número real 'a', es el siguiente límite: $\boxed{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$.



Cada cociente que interviene en la definición indica la pendiente de la recta secante 's' que une los puntos del plano $(a,f(a))$ y $(a+h,f(a+h))$, porque se divide el desplazamiento vertical $f(a+h)-f(a)$ entre el desplazamiento horizontal $a+h-a=h$.



Cuando h tiende a 0, ambos puntos tienden a ser el mismo y las sucesivas rectas secantes se convertirán en la recta 't' tangente a la gráfica en el punto.
Conclusión: **la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la gráfica en dicho punto.**

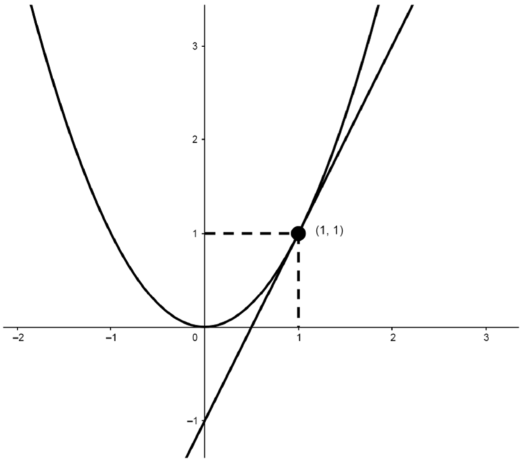
Ejemplo: consideremos la función $f(x)=x^2$, y el punto $a=1$. Hallar la derivada en este punto, la ecuación de la recta tangente y representar gráficamente la parábola y la recta tangente.
La derivada de la función $f(x)$ en $a=1$ es:

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1+2h+h^2-1}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2+h)}{h}=\lim_{h\to 0}2+h=2$$. Luego $\boxed{f'(1)=2}$

La definición de derivada nos proporciona el valor de la pendiente de la recta tangente a la parábola (en este caso es 2). Es decir, la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=x^2$ en el punto $a=1$, o punto del plano $(1,1)$, es 2.
La ecuación de una recta en forma punto-pendiente es: $\boxed{y-y_0=m\cdot(x-x_0)}$, o bien, utilizando funciones: $\boxed{y-f(a)=f'(a)\cdot(x-a)}$, que en nuestro caso, se obtiene como recta tangente: $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)\Rightarrow y-1^2=2\cdot(x-1)\Rightarrow$
$\Rightarrow y-1=2x-2\Rightarrow \boxed{y=2x-1}$.

A continuación, en la gráfica podemos observar que todo concuerda: vemos que la recta es, en efecto, tangente en el punto $(1,1)$ y, además, tiene como pendiente el valor de la derivada que es 2.

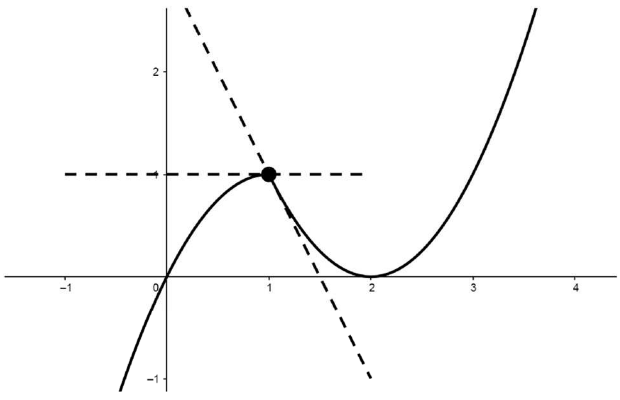


4.2 <u>Derivadas laterales. Derivabilidad.</u>

- Derivadas laterales: como la derivada es un límite, tiene sentido definir las derivadas laterales a partir de los límites laterales:
  - La derivada por la izquierda de una función $f(x)$ en un número real 'a' es el siguiente límite: $f'(a)^- = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
  - Análogamente, la derivada por la derecha de una función f(x) en un número real 'a' es el siguiente límite: $f'(a)^+ = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
- Una función será derivable en un punto si tiene derivada en dicho punto. Para que esto ocurra es necesario que existan las derivadas laterales y que ambos valores coincidan**.** En la práctica, que una función sea derivable significa que su gráfica no presenta cambios bruscos ni puntos angulosos**.**

  Por ejemplo: $f(x) = \begin{cases} -x^2+2x \text{ si } x \le 1 \\ x^2-4x+4 \text{ si } x>1 \end{cases}$ presenta en $a=1$ un punto anguloso, y las derivadas laterales no coinciden: $f'(1)^- = 0$ pero $f'(1)^+ = -2$.

  Por tanto, la función no es derivable en $a=1$.



- Derivabilidad y continuidad. Si una función es derivable en un punto, entonces también es continua en dicho punto. Al revés no, por ejemplo la función anterior es continua en el 1, pero no es derivable en dicho punto.

4.3 Función derivada.

- A partir de la definición de derivada de una función en un punto (que es un número) puede definirse una nueva función, que llamaremos función derivada, que consiste en asignar a cada número el valor de la derivada de la función en ese número.

$$\boxed{f'} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

Con esta nueva función conseguimos calcular la derivada en todos los puntos a la vez. Ejemplo: si tuviésemos que hallar la derivada de la función $f(x) = x^2$ en varios puntos $f'(1), f'(2), f'(3), f'(-1), f'(-2), f'(-3)$. Podríamos calcular seis límites distintos, pero sería un procedimiento largo. Es más sencillo hallar primero la función derivada y luego sustituir por cada uno de los seis números:

La función derivada de la función $f(x)$ es:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0} 2x+h = 2x$$. Luego $\boxed{f'(x) = 2x}$.

Ahora será: $f'(1) = 2, f'(2) = 4, f'(3) = 6, f'(-1) = -2, f'(-2) = -4, f'(-3) = -6$.

4.4 Reglas de derivación y tabla de derivadas.

- A partir de la definición de función derivada, y aplicando las propiedades de los límites, se demuestran las siguientes reglas de derivación:

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$
$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$
$$(k \cdot f)' = k \cdot f'$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

REGLA DE LA CADENA

$$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$
$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'}$$

- A partir de la definición de función derivada se demuestran las fórmulas de las derivadas elementales y de ellas se deducen las derivadas de las funciones compuestas, aplicando la regla de la cadena (por eso aparece siempre f').

DERIVADAS ELEMENTALES DERIVADAS COMPUESTAS

f(x)	f '(x)	y	y'
k	0		
x	1		
x^n	$n\cdot x^{n-1}$	f^n	$n\cdot f^{n-1}\cdot f'$
a^x	$a^x\cdot \ln a$	a^f	$a^f\cdot \ln a\cdot f'$
e^x	e^x	e^f	$e^f\cdot f'$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{f}$	$\frac{1}{2\sqrt{f}}\cdot f'$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\sqrt[n]{f}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{f^{n-1}}}\cdot f'$
$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e$	$\log_a f$	$\frac{1}{f}\log_a e\cdot f'$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\ln f$	$\frac{1}{f}\cdot f'$
$\text{sen } x$	$\cos x$	$\text{sen } f$	$\cos f\cdot f'$
$\cos x$	$-\text{sen } x$	$\cos f$	$-\text{sen } f\cdot f'$
$\text{tg } x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\text{tg } f$	$\frac{1}{\cos^2 f}\cdot f'$
$\text{cotg } x$	$\frac{-1}{\text{sen}^2 x}$	$\text{cotg } f$	$\frac{-1}{\text{sen}^2 f}\cdot f'$
$\sec x$	$\frac{\text{sen} x}{\cos^2 x}$	$\sec f$	$\frac{\text{sen} f}{\cos^2 f}\cdot f'$
$\text{cosec } x$	$\frac{-\cos x}{\text{sen}^2 x}$	$\text{cosec } f$	$\frac{-\cos f}{\text{sen}^2 f}\cdot f'$
$\text{arc sen } x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{arc sen } f$	$\frac{1}{\sqrt{1-f^2}}\cdot f'$
$\text{arc cos } x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{arc cos } f$	$\frac{-1}{\sqrt{1-f^2}}\cdot f'$
$\text{arc tg } x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{arc tg } f$	$\frac{1}{1+f^2}\cdot f'$
$\text{arc sec } x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\text{arc sec } f$	$\frac{1}{f\sqrt{f^2-1}}\cdot f'$
$\text{arc cosec } x$	$\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\text{arc cosec} f$	$\frac{-1}{f\sqrt{f^2-1}}\cdot f'$
$\text{arc cotg } x$	$\frac{-1}{1+x^2}$	$\text{arc cotg } f$	$\frac{-1}{1+f^2}\cdot f'$

-

4.5 Derivación.

- En la práctica, para calcular la derivada de una función compuesta podemos utilizar dos métodos, utilizar la fórmula o aplicar la regla de la cadena.
  Ejemplo: $y = (2x-3)^5$.

  - Mediante la fórmula: Hay que aplicar la fórmula de la derivada de una función potencial. Si $y = f^n \Rightarrow y' = nf^{n-1} \cdot f'$. En nuestro caso, la función es $f(x) = 2x-3$. Como $y = (2x-3)^5 \Rightarrow y' = 5(2x-3)^4 \cdot 2$
  - Aplicando la regla de la cadena:
    Tenemos dos funciones: $\begin{cases} g(x) = x^5 \\ f(x) = 2x-3 \end{cases}$ y sus derivadas son: $\begin{cases} g'(x) = 5x^4 \\ f'(x) = 2 \end{cases}$
    Claramente $y = (g \circ f)(x)$ y su derivada, por la regla de la cadena, será:
    $y' = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = 5(f(x))^4 \cdot 2 = 5(2x-3)^4 \cdot 2$

  Veamos otro ejemplo: $y = L(x^2 - 2x)$

  - Por la fórmula: Hay que aplicar la fórmula de la derivada de la función logarítmica. Si $y = Lf \Rightarrow y' = \dfrac{f'}{f}$. En nuestro caso, la función es $f(x) = x^2 - 2x$. Como $y = L(x^2-2x) \Rightarrow y' = \dfrac{2x-2}{x^2-2x}$
  - Aplicando la regla de la cadena:
    Tenemos dos funciones: $\begin{cases} g(x) = Lx \\ f(x) = x^2 - 2x \end{cases}$ y sus derivadas: $\begin{cases} g'(x) = \dfrac{1}{x} \\ f'(x) = 2x-2 \end{cases}$
    Claramente, $y = (g \circ f)(x)$ y su derivada, por la regla de la cadena, será:
    $y' = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \dfrac{1}{f(x)} \cdot (2x-2) = \dfrac{2x-2}{x^2-2x}$