

Tema 6: Representación gráfica de funciones.

6.1 Dominio.

- El dominio de definición de una función es el conjunto números reales que tienen imagen. Es importante conocer el dominio de una función porque sólo ahí puede representarse gráficamente. La determinación del dominio varía según el tipo de función:

- Si la función es polinómica, no hay ninguna dificultad para obtener cualquier imagen, por lo que el dominio es todo el conjunto de los números reales: $D = \mathbb{R}$.
- Si la función es racional, sólo habrá problemas cuando el denominador sea 0, esos números no estarán en el dominio. Es decir, resolvemos la ecuación “Denominador = 0” y las soluciones se restan o quitan al conjunto de números reales \mathbb{R} . Ejemplo, hallar el dominio de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{x-2}{x-1} \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1} \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x = \pm 1 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}.$$

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-4x} \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0,4\}.$$

- Si la función es irracional tendrán imagen aquellos números en los que el radicando sea mayor o igual que cero. Es decir, el dominio es el conjunto solución de la inecuación “Radicando ≥ 0 ”. Ejemplo, hallar el dominio de las siguientes funciones:

$$f(x) = \sqrt{x-3} \Rightarrow x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \quad D = [3, +\infty)$$

$f(x) = \sqrt{x^2-6x+8} \Rightarrow x^2-6x+8 \geq 0 \Rightarrow$ Descomponemos en factores el polinomio: $x^2-6x+8 = (x-2)(x-4)$ y estudiamos los signos de cada factor y luego el signo del producto:

$$\text{Signo de } x-2: \quad \begin{array}{c} - \qquad \qquad + \qquad \qquad + \\ \hline \qquad \qquad | \qquad \qquad | \qquad \qquad \\ \qquad \qquad 2 \qquad \qquad 4 \end{array}$$

$$\text{Signo de } x-4: \quad \begin{array}{c} - \qquad \qquad - \qquad \qquad + \\ \hline \qquad \qquad | \qquad \qquad | \qquad \qquad \\ \qquad \qquad 2 \qquad \qquad 4 \end{array}$$

$$\text{Signo de } (x-2)(x-4): \quad \begin{array}{c} + \qquad \qquad - \qquad \qquad + \\ \hline \qquad \qquad | \qquad \qquad | \qquad \qquad \\ \qquad \qquad 2 \qquad \qquad 4 \end{array}$$

Luego el dominio es $D = (-\infty, 2] \cup [4, +\infty)$ que es donde el radicando o polinomio es positivo o cero.

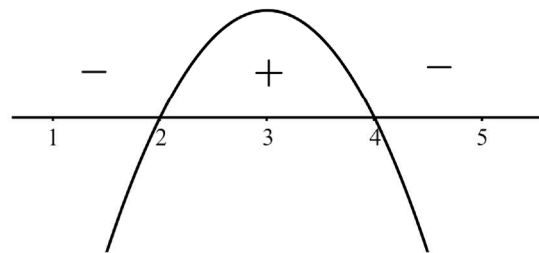
- Si la función es logarítmica el argumento del logaritmo deberá ser positivo, con lo que habrá que hallar la solución de la inecuación “Argumento > 0 ”. Ejemplo: hallar el dominio de las siguientes funciones:

$$f(x) = \log_2(x+2) \Rightarrow x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$$

$$D = (-2, +\infty)$$

$$f(x) = \ln(-x^2 + 6x - 8) \Rightarrow -x^2 + 6x - 8 > 0$$

Resolveremos ahora la inecuación de forma gráfica fijándonos para cuáles números la parábola es positiva y está por encima del eje de abscisas: $D = (2, 4)$.



- Si la función es mixta porque intervienen diversos tipos de los anteriores, el dominio final será la intersección de los dominios parciales. Ejemplo: hallar el dominio de las siguientes funciones:

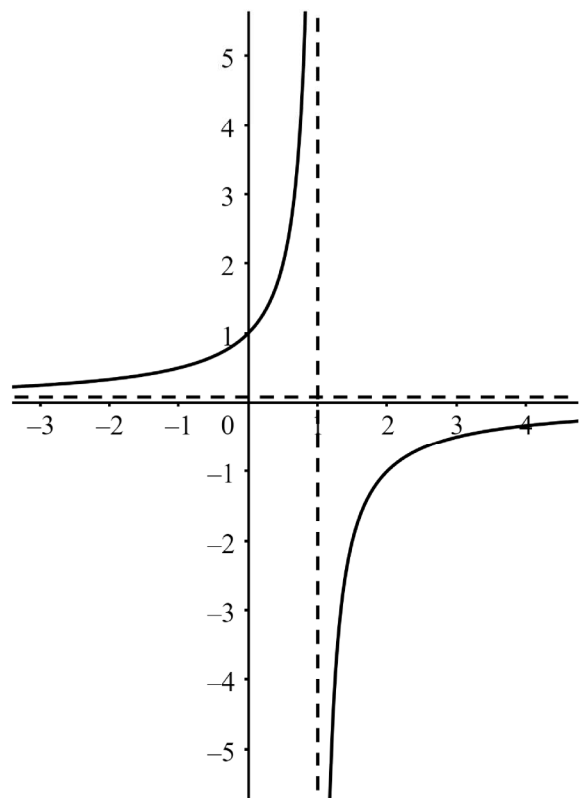
$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x-1} \Rightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \\ x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases} \quad D = [-3, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$f(x) = \frac{\ln(-x^2 + 6x - 8)}{x-3} \Rightarrow \begin{cases} -x^2 + 6x - 8 > 0 \Rightarrow \text{Sol } (2, 4) \text{ anterior} \\ x-3 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

$$D = (2, 3) \cup (3, 4)$$

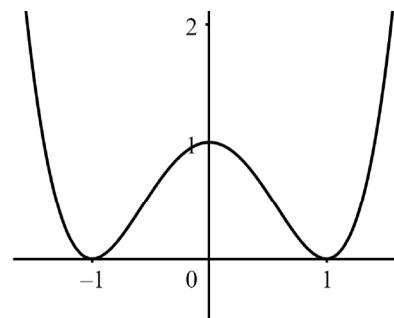
6.2 Continuidad.

- Recordemos que una función es continua en un número real 'a' si el límite y la imagen en dicho punto coinciden: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. En la práctica, salvo las funciones definidas a trozos, las funciones serán continuas en su dominio. Y en los puntos que no pertenecen al dominio podemos encontrar discontinuidades de salto infinito, donde los límites laterales son uno de ellos $+\infty$ y el otro $-\infty$, y en este punto tendremos una asíntota vertical. Ejemplo: dada la función $f(x) = \frac{-1}{x-1}$, los límites laterales son: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$. Por tanto, no existe el límite.

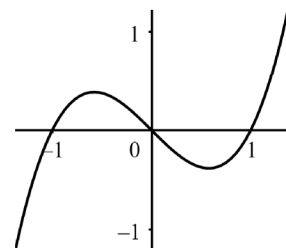


6.3 Simetrías.

- Simetría respecto al eje de ordenadas OY, también llamada simetría par. Tiene lugar cuando $f(-x) = f(x)$, es decir, la función es igual a la izquierda y la derecha del eje de ordenadas OY. Por ejemplo, la función $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ muestra simetría par, ya que los exponentes de 'x' son pares.

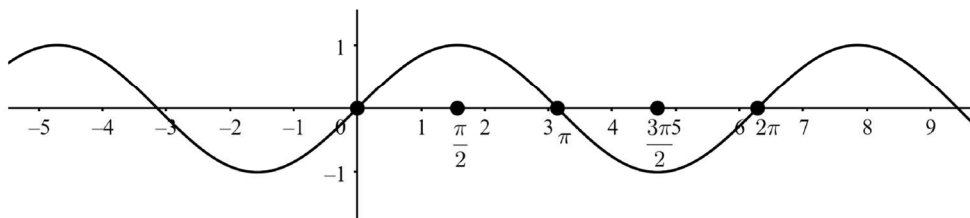


- Simetría respecto al origen O, también llamada simetría impar. Tiene lugar cuando $f(-x) = -f(x)$, es decir, la función es opuesta a la izquierda y la derecha del origen. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3 - x$ muestra simetría impar, ya que los exponentes de 'x' son impares.



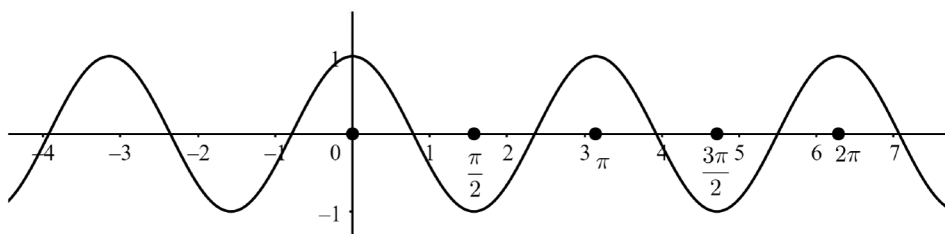
6.4 Periodicidad.

- Una función se dice que es periódica si existe un número T, llamado período, para el que se cumple: $f(x+T) = f(x)$. La periodicidad significa que la función se repite en cada intervalo de amplitud T. Ejemplo: $f(x) = \text{sen } x$. Esta función es periódica de período $T = 2\pi$ (radianes).



Ejemplo: $f(x) = \cos 2x$.

$$f(x+T) = f(x) \Rightarrow \cos(2x+2T) = \cos 2x \Rightarrow 2T = 2\pi \Rightarrow T = \pi.$$



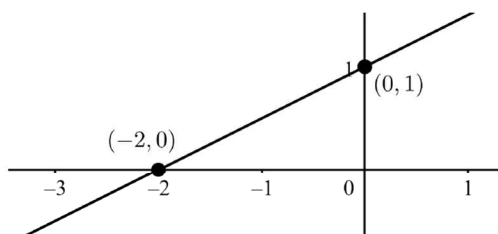
6.5 Cortes con los ejes.

- Cortes con el eje de abscisas OX. Los puntos situados en este eje tienen la segunda coordenada igual a 0, y la primera se obtiene resolviendo la ecuación $f(x) = 0$. Si las soluciones de esta ecuación son x_1, x_2, x_3, \dots , etc., entonces los puntos de corte con el eje OX son: $(x_1, 0), (x_2, 0), (x_3, 0), \dots$, etc.
- Corte con el eje de ordenadas OY. En este eje, la primera coordenada es 0, y la 2ª coordenada, como en toda función, será su imagen $f(0)$. Por tanto, el punto de corte con el eje OY es siempre: $(0, f(0))$.

Ejemplo: $f(x) = \frac{x+2}{2}$. Resolvemos la ecuación $f(x) = 0$:

$$\frac{x+2}{2} = 0 \Rightarrow x+2 = 0 \Rightarrow x = -2. \text{ Luego el punto de corte con OX es } (-2,0).$$

Ahora calculamos $f(0) = \frac{0+2}{2} = 1$ y el punto de corte con OY es $(0,1)$.

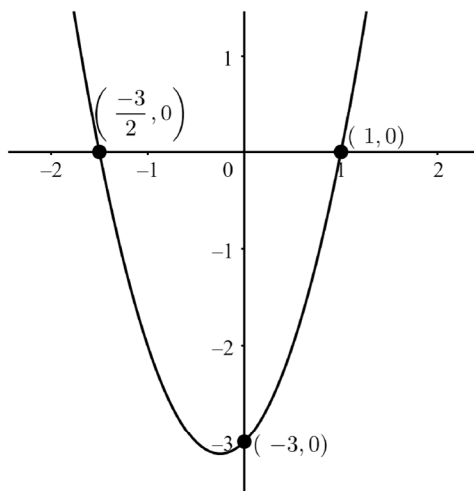


Ejemplo: $f(x) = 2x^2 + x - 3$. $2x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4} = \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Así que hay dos puntos de corte con OX: $(-\frac{3}{2}, 0)$ y $(1, 0)$.

Ahora calculamos $f(0) = 2 \cdot 0^2 + 0 - 3 = -3$. Luego el punto de corte con OY es $(0, -3)$.



6.6 Crecimiento.

- Recordemos que:

Si $f'(a) > 0 \Rightarrow f$ es creciente (estrictamente) en a
 Si $f'(a) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente (estrictamente) en a

Por tanto, tenemos que estudiar el signo de la derivada.

Ejemplo: estudiar el crecimiento de la función

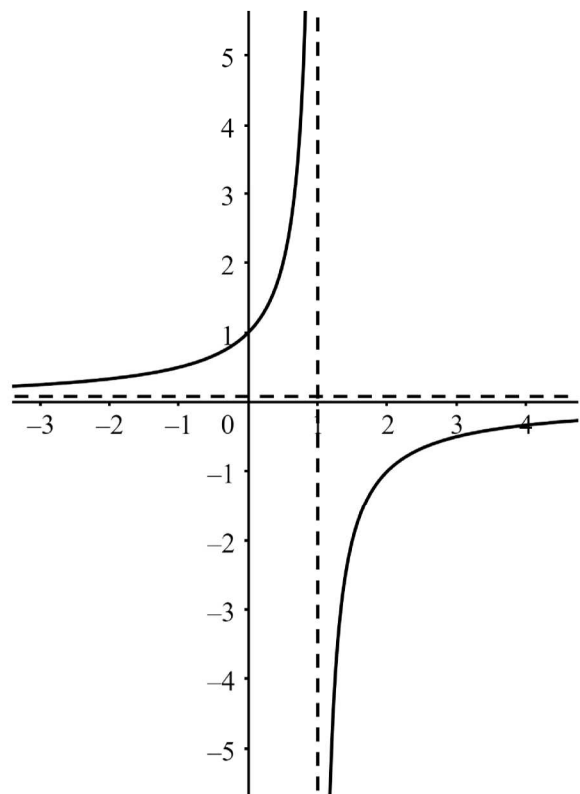
$$f(x) = \frac{-1}{x-1}.$$

La derivada es:

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (x-1) - (-1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Observamos que la derivada es siempre positiva, y por tanto, la función será siempre creciente.

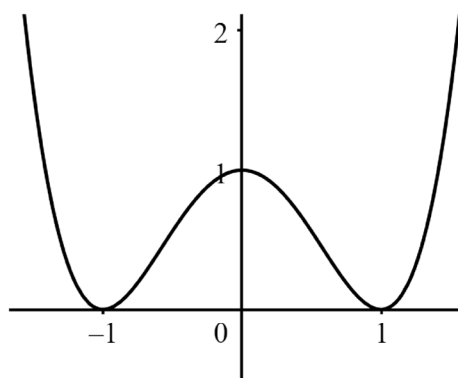
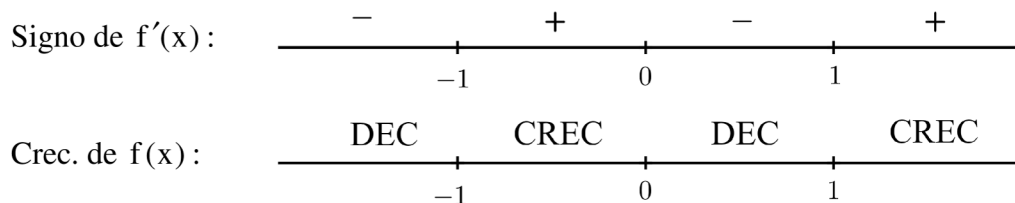
En general, si la función es racional, al calcular la derivada en el denominador, tendremos una expresión elevada al cuadrado que será siempre positiva, por lo que el signo dependerá exclusivamente del numerador.



Ejemplo: $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$ que tiene

$$\text{tres soluciones: } 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Estudiamos el signo en cada uno de los cuatro intervalos: dando valores a la izquierda, entre -1 y 0 , entre 0 y 1 y a la derecha de las soluciones:



6.7 Extremos relativos.

- Recordemos en primer lugar que:

$$\text{Si } \left. \begin{array}{l} f'(a) = 0 \\ f''(a) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ tiene en 'a' un m\u00ednimo relativo.}$$

$$\text{Si } \left. \begin{array}{l} f'(a) = 0 \\ f''(a) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ tiene en 'a' un m\u00e1ximo relativo.}$$

Lo mejor, en todo caso, es estudiar previamente el crecimiento y despu\u00e9s concluir d\u00f3nde hay extremos relativos.

Ejemplo: estudiar los extremos relativos de la funci\u00f3n $f(x) = \frac{-1}{x^2 - 1}$.

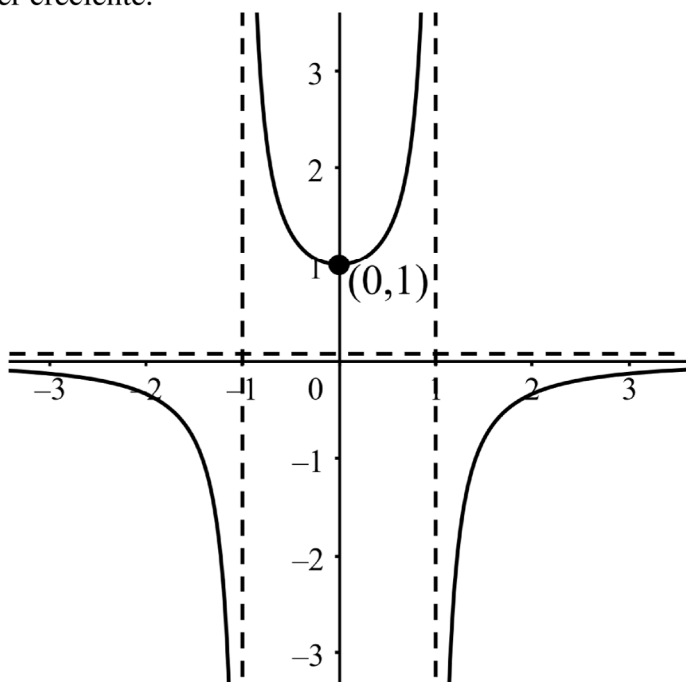
Resolvemos la ecuaci\u00f3n $f'(x) = 0$ que tiene una \u00fanica soluci\u00f3n:

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (x^2 - 1) - (-1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 - 1)^2} \quad ; \quad \frac{2x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Estudiamos el signo en cada uno de los dos intervalos dando valores a la izquierda y a la derecha del 0:

$$\begin{array}{l} \text{Signo de } f'(x) : \quad \begin{array}{c} - \qquad \qquad \qquad + \\ \hline \qquad \qquad \qquad 0 \end{array} \\ \\ \text{Crecimiento de } f(x) : \quad \begin{array}{c} \text{DEC} \qquad \qquad \qquad \text{CREC} \\ \hline \qquad \qquad \qquad 0 \end{array} \end{array}$$

Luego en $(0, f(0)) = (0, 1)$ la funci\u00f3n tiene un m\u00ednimo relativo porque pasa de ser decreciente a ser creciente.



Ejemplo: $f(x) = -x^3 + 3x$. Resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$ que tiene dos

$$\text{soluciones: } -3x^2 + 3 = 0 \Rightarrow -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Estudiamos el signo en cada uno de los tres intervalos dando valores a la izquierda de las soluciones, entre -1 y 1 y a la derecha de las soluciones:

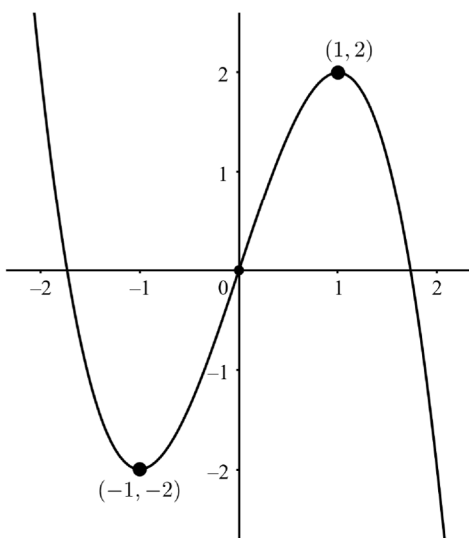
Signo de $f'(x)$:	$\begin{array}{c} - & & + & & - \\ \hline & -1 & & 1 & \\ \hline \end{array}$
Crecimiento de $f(x)$:	$\begin{array}{c} \text{DEC} & & \text{CREC} & & \text{DEC} \\ \hline & -1 & & 1 & \\ \hline \end{array}$

Luego en $(-1, f(-1)) = (-1, -2)$ la función tiene un mínimo relativo porque pasa de ser decreciente a ser creciente. Además podemos comprobar que

$$f'(-1) = 0 \text{ y } f''(-1) < 0 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = -3x^2 + 3 \Rightarrow f'(-1) = 0 \\ f''(x) = -6x \Rightarrow f''(-1) = 6 > 0 \end{cases}.$$

Y en $(1, f(1)) = (1, 2)$ la función tiene un Máximo relativo porque pasa de ser creciente a ser decreciente. Además podemos comprobar que $f'(1) = 0$ y

$$f''(1) > 0 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = -3x^2 + 3 \Rightarrow f'(1) = 0 \\ f''(x) = -6x \Rightarrow f''(1) = -6 < 0 \end{cases}.$$



6.8 Concavidad y convexidad.

- Es importante recordar en primer lugar que:

Si $f''(a) > 0 \Rightarrow f$ es cóncava en a
 Si $f''(a) < 0 \Rightarrow f$ es convexa en a

Por tanto, tenemos que estudiar el signo de la segunda derivada.

Ejemplo: estudiar la curvatura de la función $f(x) = \frac{-1}{x^2 - 1}$.

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (x^2 - 1) - (-1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 - 1)^2}.$$

$$f''(x) = \frac{2 \cdot (x^2 - 1)^2 - 2x \cdot 2 \cdot (x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x^4 - 4x^2 + 2 - 8x^4 + 8x^2}{(x^2 - 1)^2}.$$

$$\frac{-6x^4 + 4x^2 + 2}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Rightarrow -6x^4 + 4x^2 + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \text{ (bicuadrada).}$$

Estudiamos el signo en cada uno de los tres intervalos dando valores a la izquierda de -1 , entre -1 y 1 y a la derecha del 1 :

Signo de $f''(x)$:	-	+	-
	$\frac{\text{---}}{\text{---}}$		
	-1		1
Curvatura de $f(x)$:	CONVEXA	CÓNCAVA	CONVEXA
	$\frac{\text{---}}{\text{---}}$		
	-1		1

En general, la segunda derivada de las funciones racionales puede ser bastante complicada, por lo que la concavidad y convexidad de este tipo de funciones no suele estudiarse, ya que la información que se obtiene no compensa el trabajo que se realiza.

Ejemplo: estudiar la curvatura de la función $f(x) = -x^3 + 3x$.

Hallamos la segunda derivada: $f'(x) = -3x^2 + 3 = 0 \Rightarrow f''(x) = -6x$.

Resolvemos la ecuación $f''(x) = 0$, cuya solución es $x = 0$.

Estudiamos ahora el signo de la segunda derivada dando valores a cada lado.

$$f''(-2) = -6 \cdot (-2) = 12 \text{ (+)}$$

$$f''(3) = -6 \cdot 3 = -18 \text{ (-)}$$

La curvatura de $f(x)$ será pues:

+	-
$\frac{\text{---}}{\text{---}}$	
0	
CÓNCAVA	CONVEXA
$\frac{\text{---}}{\text{---}}$	
0	

Pueden comprobarse los resultados observando las gráficas del apartado anterior: extremos relativos.

6.9 Puntos de inflexión.

- Los puntos de inflexión son los puntos en los que cambia la curvatura de la función. En estos puntos, la segunda derivada debe ser 0.
 - Un punto de inflexión es convexo-cóncavo si la función pasa ahí de ser convexa a ser cóncava.
 - Un punto de inflexión es cóncavo-convexo si la función pasa ahí de ser cóncava a ser convexa.

En todo caso, es recomendable estudiar previamente la concavidad y convexidad y después indicar los puntos de inflexión.

Ejemplo: estudiar los puntos de inflexión de la función $f(x) = \frac{-1}{x^2 - 1}$. En el apartado anterior teníamos el siguiente resultado:

Signo de $f''(x)$:	$\begin{array}{c} - \qquad \qquad \qquad + \qquad \qquad \qquad - \\ \hline \qquad \qquad -1 \qquad \qquad \qquad 1 \end{array}$
Curvatura de $f(x)$:	$\begin{array}{c} \text{CONVEXA} \qquad \text{CÓNCAVA} \qquad \text{CONVEXA} \\ \hline \qquad \qquad -1 \qquad \qquad \qquad 1 \end{array}$

Por lo tanto, en principio parece que habría dos puntos de inflexión, pero no es así, porque en -1 y 1 la función no está definida. Luego, no hay puntos de inflexión.

Ejemplo: estudiar los puntos de inflexión de la función $f(x) = -x^3 + 3x$.

En el apartado anterior teníamos el siguiente resultado:

Signo de $f''(x)$:	$\begin{array}{c} + \qquad \qquad \qquad - \\ \hline \qquad \qquad \qquad 0 \end{array}$
Curvatura de $f(x)$:	$\begin{array}{c} \text{CÓNCAVA} \qquad \text{CONVEXA} \\ \hline \qquad \qquad \qquad 0 \end{array}$

Por lo tanto, en el punto $(0, f(0)) = (0, 0)$ la función tiene un punto de inflexión cóncavo-convexo, como puede observarse en la gráfica de la función, en el apartado: extremos relativos.

6.10 Asíntotas.

- Asíntotas verticales:

La recta $x = a$ es una asíntota vertical si alguno de los límites laterales en el número a vale infinito, es decir: $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$. Las asíntotas verticales suelen encontrarse en los números que anulan el denominador de las funciones racionales, aunque también pueden existir en las funciones logarítmicas. En cualquier caso, siempre se encontrarán en números que no pertenecen al dominio de la función.

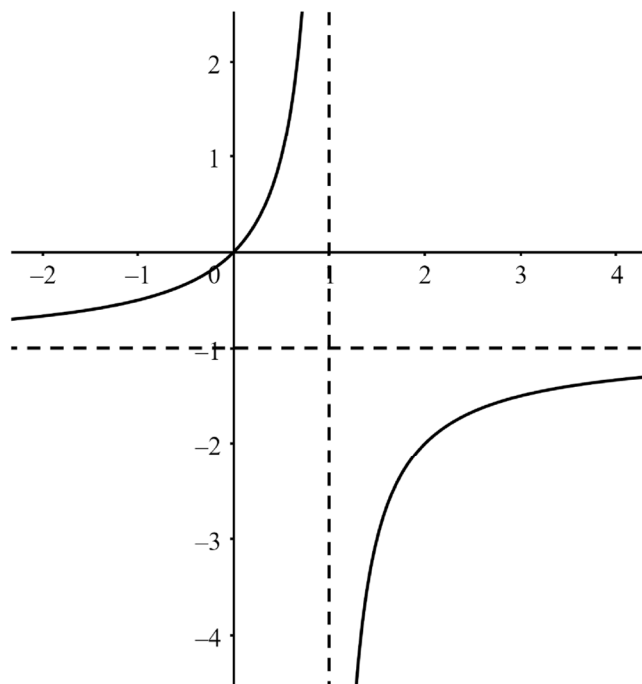
Ejemplo: la función $f(x) = \frac{x}{1-x}$ tiene como dominio $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ y los límites

laterales son: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{1-x} = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{1-x} = -\infty$, luego la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

- Asíntotas horizontales:

La recta $y = b$ es una asíntota horizontal si alguno de los límites en el infinito vale b , es decir: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$. Ejemplo: la función $f(x) = \frac{x}{1-x}$ tiene por

límites en el infinito: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1-x} = -1^+$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1-x} = -1^-$, luego la recta $y = -1$ es una asíntota horizontal.



- Asíntotas oblicuas:

La recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua si coinciden los límites en el infinito de la función y de la recta, es decir, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (mx + n)$. Este tipo de asíntotas podemos encontrarlas en las funciones racionales cuando el grado del numerador supera en una unidad al grado del denominador. Además, es importante notar que una función no puede tener una asíntota oblicua en el mismo extremo donde tiene una asíntota horizontal.

- Dividiendo por x en la expresión anterior se obtiene el valor de la

pendiente m : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{mx + n}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} m + \frac{n}{x} = m + 0 = m$. Luego,

la pendiente es: $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$.

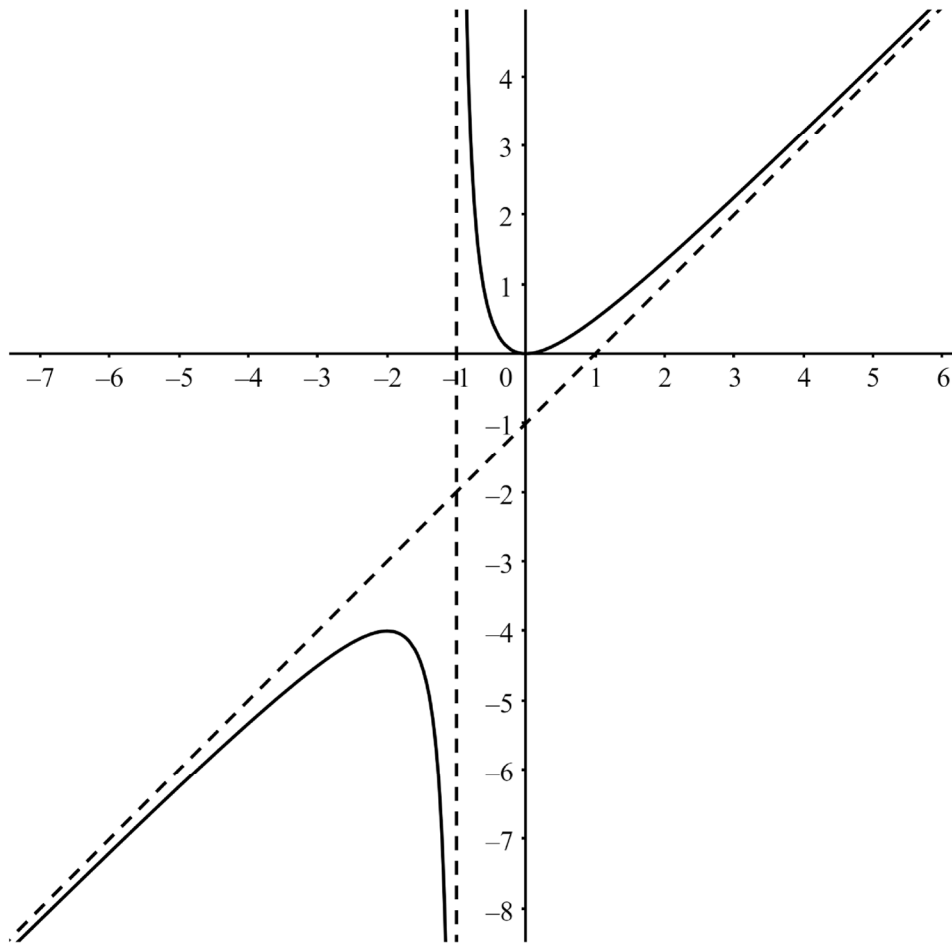
- Una vez conocida la pendiente m , el término independiente n se obtiene despejando en la expresión inicial:

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (mx + n) = \left(\lim_{x \rightarrow \pm\infty} mx \right) + n$, de donde: $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$.

Ejemplo: la función $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$: $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 + x} = 1$

$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x+1} - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - x^2 - x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$

Luego la recta $y = x - 1$ es una asíntota oblicua (y además también hay una asíntota vertical en $x = -1$).



6.11 Representación de funciones polinómicas.

- Todas las funciones polinómicas tienen por dominio $D = \mathbb{R}$, son siempre continuas, es fácil ver si son simétricas observando la paridad de los exponentes, no son funciones periódicas y lo más importante, no tienen asíntotas de ningún tipo. Por lo tanto, para representar estas funciones se estudian: **puntos de corte, crecimiento (y extremos) y curvatura**.

Ejemplo, $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 1$.

- Puntos de corte con los ejes: para obtener los cortes con el eje OX resolvemos la ecuación $-x^4 + 2x^2 - 1 = 0$. Como es bicuadrada, se resuelve haciendo el cambio de variable $z = x^2$, con lo que la ecuación pasa a ser de 2º grado, se resuelve z y luego se halla $x = \pm\sqrt{z}$.

$$-x^4 + 2x^2 - 1 = 0, \text{ si } z = x^2, \text{ tendremos: } -z^2 + 2z - 1 = 0.$$

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4}}{-2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Si $z = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$. Luego, hay dos puntos de corte con OX:

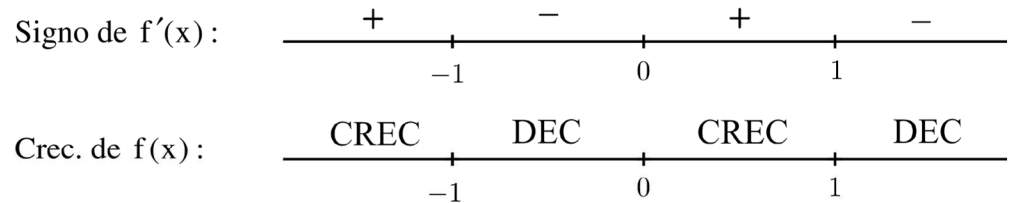
$(-1,0)$ y $(1,0)$.

Ahora calculamos $f(0) = -0^4 + 2 \cdot 0^2 - 1 = -1$. Así que el punto de corte

con OY es $(0,-1)$.

- Crecimiento y extremos: resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$ que tiene tres

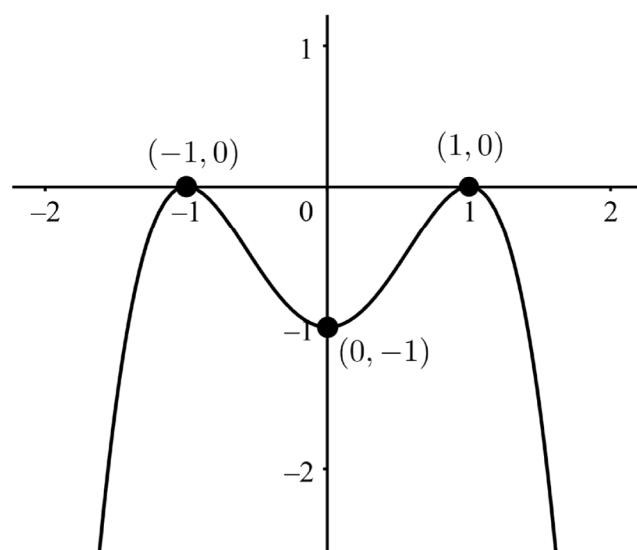
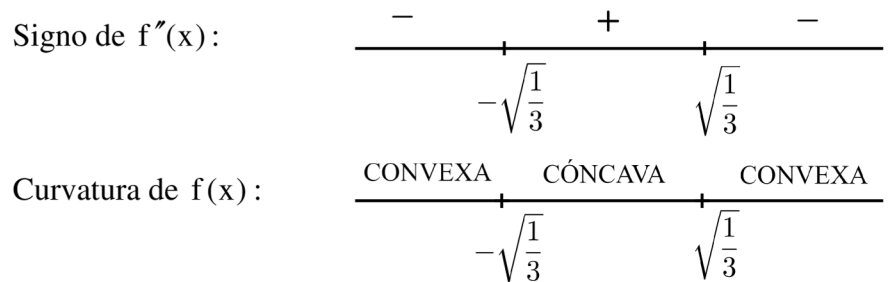
$$\text{soluciones: } -4x^3 + 4x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$



En $(-1, f(-1)) = (-1, 0)$ la función tiene un Máximo relativo, en $(0, f(0)) = (0, -1)$ un mínimo relativo y en $(1, f(1)) = (1, 0)$ tiene otro Máximo relativo.

- Curvatura: $f'(x) = -4x^3 + 4x \Rightarrow f''(x) = -12x^2 + 4$.

$$-12x^2 + 4 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}.$$



6.12 Representación de funciones racionales.

- En estas funciones estudiaremos principalmente **dominio, cortes con los ejes, crecimiento (y extremos) y asíntotas**.

Ejemplo: $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

- $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, porque ambos valores anulan el denominador.
- Puntos de corte con los ejes: la ecuación $\frac{1}{x^2 - 1} = 0$ no tiene solución, por lo que la función no tendrá cortes con el eje OX. Ahora, calculamos $f(0) = \frac{1}{0^2 - 1} = -1$. Así que el punto de corte con OY es $(0, -1)$.

- Crecimiento y extremos: $f'(x) = \frac{0 \cdot (x^2 - 1) - 1 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$;
 $\frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$.

Signo de $f'(x)$: $\begin{array}{c} + \qquad \qquad - \\ \hline \qquad \qquad 0 \end{array}$

Crecimiento de $f(x)$: $\begin{array}{c} \text{CREC} \qquad \qquad \text{DEC} \\ \hline \qquad \qquad 0 \end{array}$

Luego en $(0, f(0)) = (0, -1)$ la función tiene un Máximo relativo.

- Asíntotas: la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ tiene en los puntos que no están en el

dominio los siguientes límites laterales: $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty$,

$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty$. Luego, tenemos

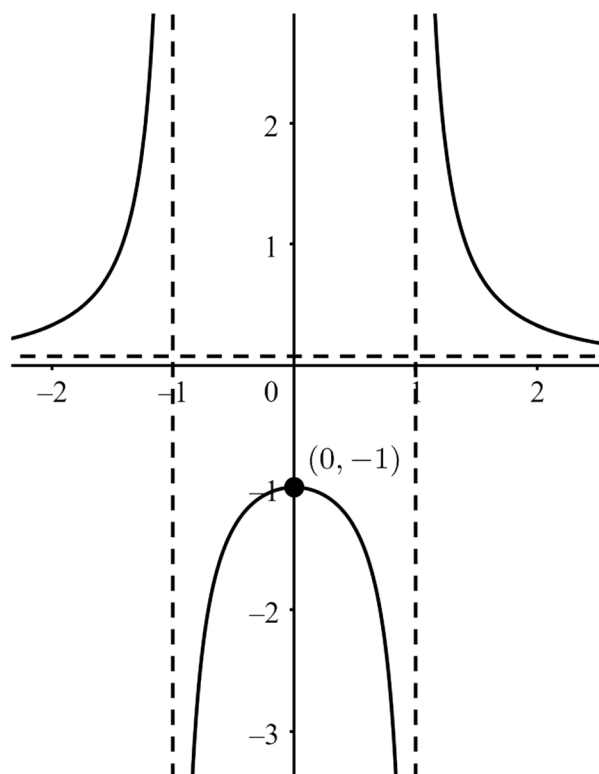
dos asíntotas verticales $x = -1$ y $x = 1$.

Para las asíntotas horizontales tenemos los siguientes límites en el

infinito: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0^+$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0^+$, luego, tenemos una asíntota

horizontal $y = 0$ en ambos lados.

En cuanto a las asíntotas oblicuas: si existen asíntotas horizontales, no se consideran las asíntotas oblicuas, ya que una función no puede tener ambos tipos de asíntotas en el mismo extremo.



6.13 Representación de otras funciones.

- Nos estamos refiriendo principalmente a funciones en cuya definición intervienen logaritmos o exponenciales. Para representar este tipo de funciones se estudian esencialmente: **crecimiento (y extremos) y asíntotas**. Posteriormente, continuamos con dominio, cortes con los ejes, entre otros aspectos, dependiendo de las características particulares de cada función.

Ejemplo $f(x) = \frac{1}{1-e^x}$.

- Crecimiento y extremos: $f'(x) = \frac{0 \cdot (1-e^x) - 1 \cdot e^x \cdot (-1)}{(1-e^x)^2} = \frac{e^x}{(1-e^x)^2}$. Como

la derivada es siempre positiva, la función será creciente siempre y, por lo tanto, no presentará extremos relativos.

- Asíntotas: estudiamos los límites laterales en el 0 que es el único número que no pertenece al dominio de la función: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1-e^x} = +\infty$ y

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-e^x} = -\infty. \text{ Luego, hay una asíntota vertical } x = 0.$$

Los límites en el infinito son: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-e^x} = \frac{1}{1-0^+} = 1^+$ y

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-e^x} = \frac{1}{-\infty} = 0^-.$$

Como los límites son distintos en cada extremo, se concluye que hay dos asíntotas horizontales, una para cada lado: $y = 1$ es asíntota por la izquierda, e $y = 0$ es asíntota por la derecha.

- Dominio: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Cortes con los ejes: la ecuación $\frac{1}{1-e^x} = 0$ no tiene solución y además $x = 0$ no tiene imagen, por lo que no hay cortes con los ejes.

Con los datos obtenidos, disponemos de suficiente información para representar gráficamente la función:

