Tema 7: Integrales.

7.1 Función Primitiva.

- Una función $F(x)$ es una primitiva de la función $f(x)$ cuando se cumple que: $F'(x) = f(x)$. Por ejemplo: $F(x) = x^2$ es una primitiva de $f(x) = 2x$. Otra primitiva podría ser $F(x) = x^2 + 5$ y, en general, $F(x) = x^2 + C$, donde C es una constante. Por tanto, una función $f(x)$ tiene infinitas funciones primitivas y, al conjunto de todas ellas se le llama **integral indefinida**, que se representa así: $\int f(x)\,dx$. Es decir: $\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C \quad \text{con} \quad F'(x) = f(x)}$.

  Ejemplos: $\int 3x^2 dx = x^3 + C$, $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$, $\int \frac{1}{x} dx = Lx + C$, etc.

7.2 Propiedades de la integral indefinida.

- La integral de la suma es la suma de las integrales:

$$\boxed{[f(x) + g(x)]dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx}$$

  Demostración:

  Por definición: $\int f(x)\,dx = F(x) + C \Rightarrow \left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.

  Vamos a ver que al derivar el segundo miembro debe resultar: $f(x) + g(x)$.

  $\left(\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right)' = \left(\int f(x)\,dx\right)' + \left(\int g(x)\,dx\right)' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$.

  Ejemplo: $\int 2x + \cos x\, dx = \int 2x\, dx + \int \cos x\, dx = x^2 + \operatorname{sen} x + C$.

- Las constantes o números que multiplican una función pueden sacarse fuera de la integral.

$$\boxed{\int [k \cdot f(x)]dx = k \cdot \int f(x)\,dx}$$

  Demostración: si derivamos el segundo miembro debe obtenerse: $k \cdot f(x)$.

  En efecto: $\left(k \cdot \int f(x)\,dx\right)' = k \cdot \left(\int f(x)\,dx\right)' = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x)$.

  Ejemplo: $\int 5 \cdot \frac{1}{x} dx = 5 \cdot \int \frac{1}{x} dx = 5 \cdot Lx + C$.

  Ejemplo: $\int \operatorname{sen} 4x\, dx = \int \frac{4 \cdot \operatorname{sen} 4x}{4} dx = \frac{1}{4} \int 4 \cdot \operatorname{sen} 4x\, dx = \frac{1}{4}(-\cos 4x) + C$.

7.3 Integrales inmediatas.

- Teniendo en cuenta la tabla de derivadas inmediatas (así como la tabla de derivadas compuestas), se obtienen de forma natural las siguientes fórmulas, llamadas integrales inmediatas (a la izquierda).

- Además, al aplicar la regla de la cadena, se obtienen las fórmulas correspondientes a funciones compuestas (a la derecha), en las que aparece siempre la derivada de la función dentro de la integral.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{para } n \neq -1 \qquad \int f(x)^n \cdot f'(x) dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \mathrm{Ln}x + C \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \mathrm{Ln}[f(x)] + C$$

$$\int \frac{1}{x} \log_a(e) \cdot dx = \log_a x + C \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)} \log_a(e) \cdot dx = \log_a[f(x)] + C$$

$$\int a^x \cdot \mathrm{Ln}a \cdot dx = a^x + C \qquad \int a^{f(x)} f'(x) \cdot \mathrm{Ln}a \cdot dx = a^{f(x)} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int e^{f(x)} f'(x) \cdot dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C \qquad \int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx = \sqrt{f(x)} + C$$

$$\int \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} dx = \sqrt[n]{x} + C \qquad \int \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}} dx = \sqrt[n]{f(x)} + C$$

$$\int \mathrm{sen}x \cdot dx = -\cos x + C \qquad \int \mathrm{sen}[f(x)] \cdot f'(x) \cdot dx = -\cos[f(x)] + C$$

$$\int \cos x \cdot dx = \mathrm{sen}x + C \qquad \int \cos[f(x)] \cdot f'(x) \cdot dx = \mathrm{sen}[f(x)] + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg}x + C \qquad \int \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]} dx = \mathrm{tg}[f(x)] + C$$

$$\int \frac{-1}{\mathrm{sen}^2 x} dx = \mathrm{cotg}x + C \qquad \int \frac{-f'(x)}{\mathrm{sen}^2[f(x)]} dx = \mathrm{cotg}[f(x)] + C$$

$$\int \frac{\mathrm{sen}x}{\cos^2 x} dx = \sec x + C \qquad \int \frac{\mathrm{sen}[f(x)]}{\cos^2[f(x)]} f'(x) \cdot dx = \sec[f(x)] + C$$

$$\int \frac{-\cos x}{\mathrm{sen}^2 x} dx = \mathrm{cosec}x + C \qquad \int \frac{-\cos[f(x)]}{\mathrm{sen}^2[f(x)]} f'(x) \cdot dx = \mathrm{cosec}[f(x)] + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \mathrm{arcsen}x + C \qquad \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx = \mathrm{arcsen}[f(x)] + C$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + C \qquad \int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx = \arccos[f(x)] + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \mathrm{arctg}x + C \qquad \int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} dx = \mathrm{arctg}[f(x)] + C$$

7.4 Integrales por descomposición.

- Este método de integración consiste en aplicar las propiedades de linealidad de la integral junto con las integrales inmediatas anteriores.
  Solo puede aplicarse en casos en los que no aparecen productos ni cocientes y las integrales son sencillas. Ejemplos:

  - $\int \left(x^3 - 2x^2 + x - 1\right) dx = \int x^3 dx - 2\int x^2 dx + \int x dx - \int 1 dx =$

    $= \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + C$

  - $\int \left(-2\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x} - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3}\right) dx = -2\int x^{\frac{1}{3}} dx + 3\int x^{\frac{1}{2}} dx - 3\int \frac{1}{x} dx + 2\int x^{-3} dx =$

    $= -2\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + 3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 3Lx + 2\frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^4} + 2\sqrt{x^3} - 3Lx - \frac{1}{x^2} + C$

  - $\int \left(\frac{-2x^2 - 5x + 6}{x - 1}\right) dx$

    $$\begin{array}{c|ccc} & -2 & -5 & +6 \\ 1 & & -2 & -7 \\ \hline & -2 & -7 & \boxed{-1} \end{array}$$

    En primer lugar, hacemos la división, (por ejemplo, mediante la regla de Ruffini)
    Después, expresamos el numerador como:
    dividendo = divisor · cociente + resto.

    De esta forma, podemos descomponer la fracción en suma de polinomio (el cociente) y una fracción más sencilla (el resto entre el divisor):

    $\frac{-2x^2 - 5x + 6}{x - 1} = \frac{(x-1)(-2x-7) - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(-2x-7)}{x-1} - \frac{1}{x-1} = -2x + 7 - \frac{1}{x-1}$

    $\int \left(\frac{-2x^2 - 5x + 6}{x - 1}\right) dx = \int (-2x - 7) dx - \int \frac{1}{x-1} dx =$

    $= -2\int x dx - 7\int 1 dx - \int \frac{1}{x-1} dx = -2\frac{x^2}{2} - 7x - L|x - 1| + C$.

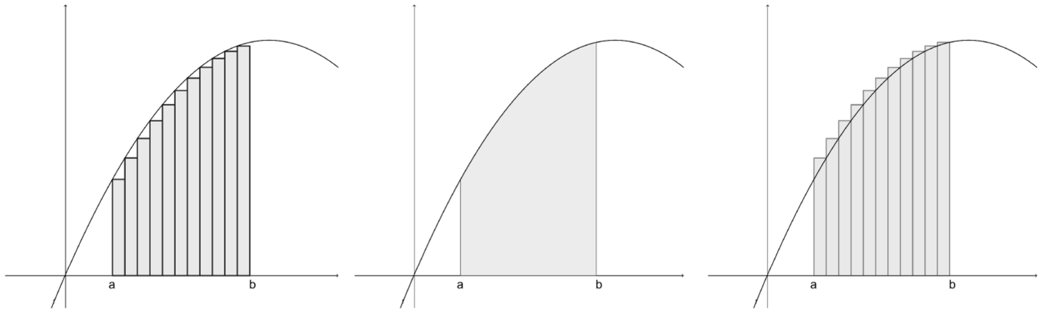
    (se escribe valor absoluto para que el logaritmo tenga sentido).

7.5 Concepto de integral definida.

- Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$. Si dividimos este intervalo en 'n' subintervalos: $[a,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$,......., $[x_{n-2},x_{n-1}]$, $[x_{n-1},b]$, podemos calcular la suma de todas las áreas de los rectángulos superiores e inferiores, obteniendo:
  $S_{\inf}(f) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + m_3(x_3 - x_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots + m_n(x_{n-1} - x_n)$,
  donde m_1, m_2, etc., son los mínimos de $f(x)$ en cada subintervalo.

$S_{sup}(f) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + M_3(x_3 - x_2) + ... + M_n(x_{n-1} - x_n)$,
donde M_1, M_2, etc., son los máximos de $f(x)$ en cada subintervalo.

Lógicamente, se cumple: $S_{inf}(f) <$ Área bajo f(x) $< S_{sup}(f)$



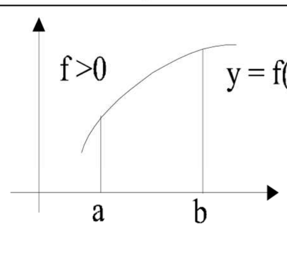
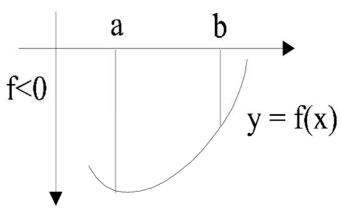
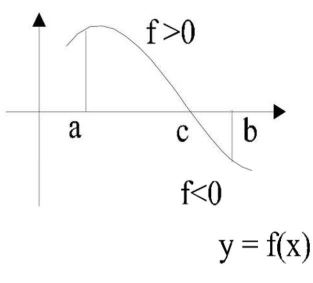
Cuando 'n' tiende a infinito, es decir, cuando aumenta indefinidamente el número de subintervalos, ambas sumas tienden al mismo valor, que se define como la integral definida:

$$\boxed{\text{Por definición, la integral definida} = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_{inf} = \lim_{n\to\infty} S_{sup}}$$

Si la función está por encima del eje de abscisas, el área coincide con la integral. Sin embargo, si la función está por debajo del eje 'x', los valores M_i y m_i son negativos, por lo que la integral también será negativa. En este caso, el área y la integral tienen signos opuestos; para obtener el área, es necesario tomar el valor absoluto de la integral.

En resumen, la integral definida coincide con el área, salvo por el signo cuando la función es negativa.

Cuando la función corta el eje 'x', presenta una parte positiva y otra negativa. Para hallar el área total, debemos determinar el punto de corte con el eje 'x' y calcular, por un lado, el área de la parte superior, que coincide con la integral, y, por otro, el área de la parte inferior, que es opuesta a la integral.
En cualquier caso, el área total siempre será la suma de todas las integrales en valor absoluto.

Si $f(x) \geq 0$ en $[a,b]$ $\text{Área} = \int_a^b f(x)\,dx$	Si $f(x) \leq 0$ en $[a,b]$ $\text{Área} = -\int_a^b f(x)\,dx$	En general, distintos signos: $\text{Área} = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$
		

7.6 Propiedades de la integral definida.

1. $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$. Siendo $c \in [a,b]$

2. $\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}$

3. $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx}$

4. $\boxed{\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx}$

5. $\boxed{\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx}$. Siendo k un número real

7.7 Regla de Barrow.

- Sea G(x) una primitiva de la función f(x).

  Entonces: $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)}$.

  Demostración:

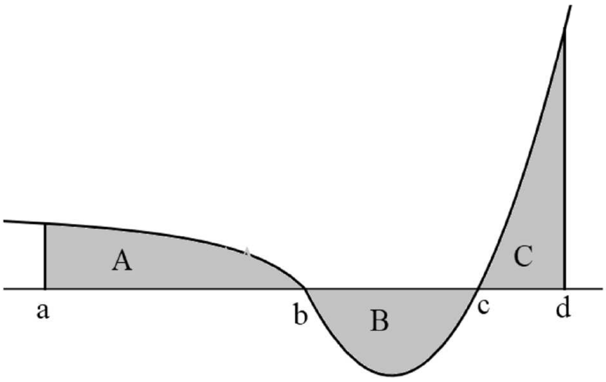
  Sea $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ la primitiva definida en el teorema fundamental del cálculo integral y sea $G(x)$ otra primitiva que ha sido calculada con integral indefinida. Sabemos que si $F(x)$ y $G(x)$ son dos primitivas de $f(x)$, entonces se diferencian en una constante: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = G(x) + C$.

  Si $x = a$, entonces: $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = G(a) + C \Rightarrow 0 = G(a) + C \Rightarrow -C = G(a)$,

  Por otro lado, si $x = b$: $F(b) = \int_a^b f(t)\,dt = G(b) + C = G(b) - G(a)$.

  Conclusión: $\boxed{\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)}$.

7.8 Área encerrada por una función y el eje x.



$$\text{Área} = A + B + C = \int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx$$

Ejemplo: Halla el área limitada por la función: $f(x) = x^2 - 6x + 5$ y el eje OX en el intervalo $[0,5]$.

Puntos de corte con el eje OX:

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

Hay dos recintos: $I = [0,1]$ y $II = [1,5]$

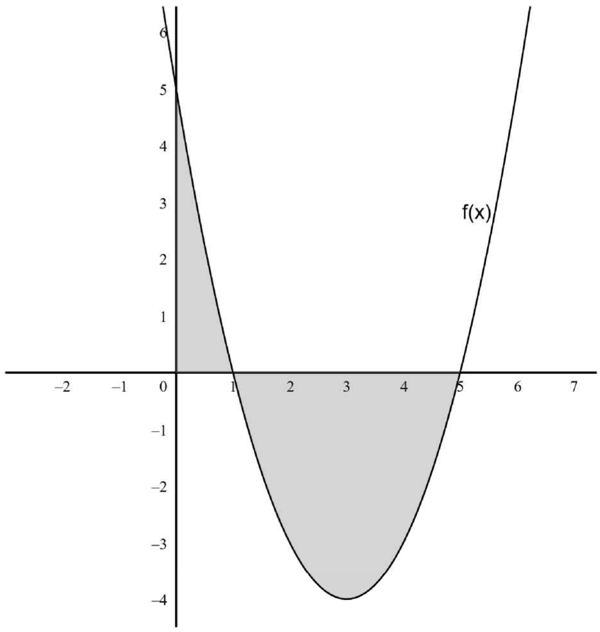
$$G(x) = \int \left(x^2 - 6x + 5\right) dx = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x$$

$$G(0) = 0 \;;\quad G(1) = \frac{7}{3} \;;\quad G(5) = \frac{-25}{3}$$

$$\text{Área del recinto I} = \left| G(1) - G(0) \right| = \frac{7}{3}$$

$$\text{Área del recinto II} = \left| G(5) - G(1) \right| = \frac{32}{3}$$

$$\text{Área total} = \frac{7}{3} + \frac{32}{3} = \frac{39}{3} = 13\,u^2$$



También puede calcularse de esta forma:

$$\text{Área total } = \int_0^1 \left(x^2 - 6x + 5\right)dx - \int_1^5 \left(x^2 - 6x + 5\right)dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x\right]_1^5 =$$

$$= \left(\frac{1}{3} - 3 + 5\right) - \left(\frac{0}{3} - 0 + 0\right) - \left[\left(\frac{125}{3} - 75 + 25\right) - \left(\frac{1}{3} - 3 + 5\right)\right] =$$

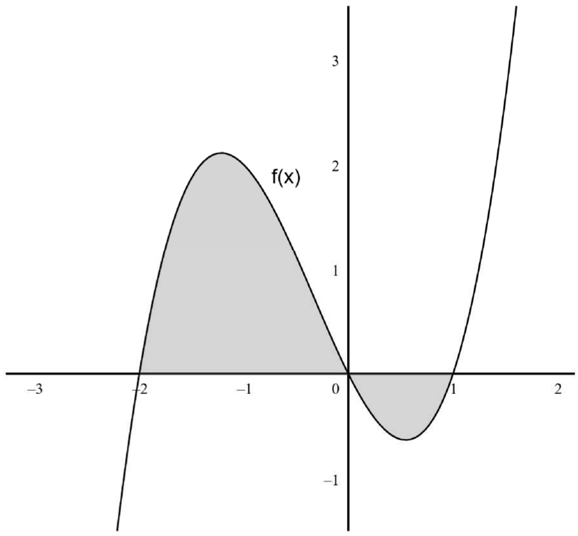
$$= \frac{7}{3} - 0 - \left[-\frac{25}{3} - \frac{7}{3}\right] = \frac{7}{3} + \frac{25}{3} + \frac{7}{3} = \frac{39}{3} = 13\,u^2.$$

Ejemplo: Halla el área limitada por la función $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ y el eje 'x'.

Puntos de corte con el eje 'x':

$$x^3 + x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x\left(x^2 + x - 2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 = 1 \\ x_3 = -2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Hay dos recintos: 1º $[-2,0]$ y 2º $[0,1]$



$$G(x) = \int \left(x^3 + x^2 - 2x\right)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2$$

$$G(-2) = -\frac{8}{3} \;;\quad G(0) = 0 \;;\quad G(1) = \frac{-5}{12}$$

$$\text{Área del recinto 1º} = \left| G(0) - G(-2) \right| = \frac{8}{3}$$

$$\text{Área del recinto 2º} = \left| G(1) - G(0) \right| = \frac{5}{12}$$

$$\text{Área total} = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}\,u^2.$$

También puede calcularse sin valor absoluto:

$$\text{Área total } = \int_{-2}^{0} \left(x^3 + x^2 - 2x\right)dx - \int_0^1 \left(x^3 + x^2 - 2x\right)dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-2}^{0} - \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^1 =$$

$$= \left(\frac{0}{4} + \frac{0}{3} - 0\right) - \left(\frac{16}{4} + \frac{-8}{3} - 4\right) - \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right) - \left(\frac{0}{4} + \frac{0}{3} - 0\right)\right] =$$

$$= 0 - \frac{-8}{3} - \left[-\frac{5}{12} - 0\right] = 0 + \frac{8}{3} + \frac{5}{12} + 0 = \frac{37}{12}\,u^2.$$

7.9 Área encerrada por dos funciones.

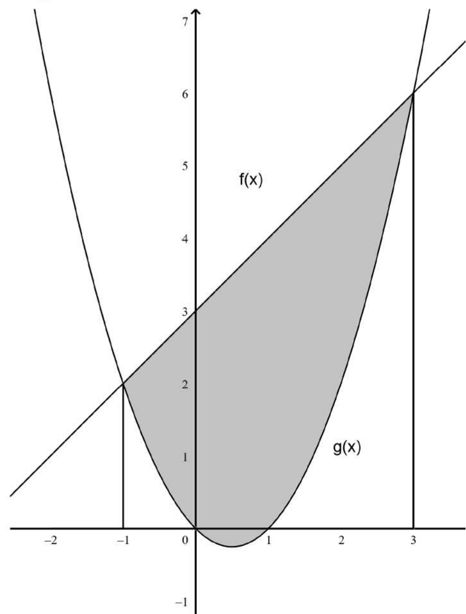
Sean f y g dos funciones continuas en $[a,b]$. Supongamos que sus gráficas se cortan en los puntos: $x = x_1$, $x = x_2$, ..., $x = x_n$ del intervalo $[a,b]$.

$$\boxed{\text{Área} = \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)|\,dx + \int_{x_2}^{x_3} |f(x) - g(x)|\,dx + \ldots\ldots\ldots\ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} |f(x) - g(x)|\,dx}$$

También puede calcularse sin utilizar valores absolutos, tomando en cada intervalo la diferencia entre la función superior menos la función inferior.

Ejemplo: Halla el área del recinto limitado por las funciones:
$f(x) = x + 3$ y $g(x) = x^2 - x$. Veamos que se cortan en $(-1,2)$ y $(3,6)$.

$$x + 3 = x^2 - x \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 = -1 \\ \\ x_2 = 3 \end{bmatrix}.$$



$$G(x) = \int \left(x^2 - 2x - 3\right) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x.$$

Recinto: $[-1,3]$ $G(-1) = \dfrac{5}{3}$; $G(3) = -9$

$$\text{Área} = |\,G(3) - G(-1)\,| = \left|-\frac{27}{3} - \frac{5}{3}\right| = \frac{32}{3}u^2$$

También puede hacerse así:

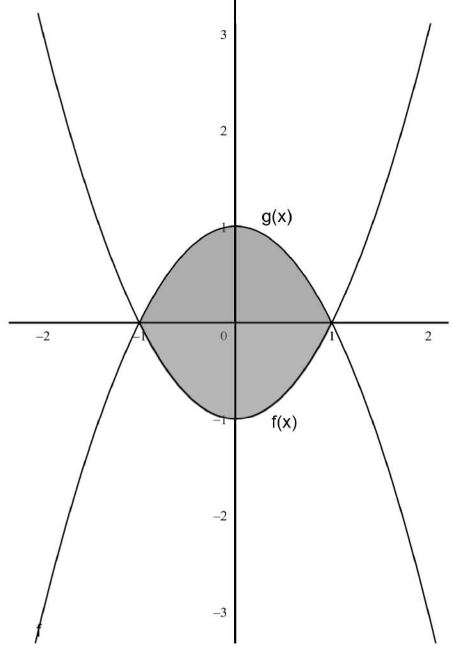
$$\text{Área} = \int_{-1}^{3} \left[(x+3) - \left(x^2 - x\right)\right] dx =$$

$$= \int_{-1}^{3} \left(-x^2 + 2x + 3\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^{3} =$$

$$= \left(-\frac{27}{3} + 9 + 9\right) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3\right) = 9 + \frac{5}{3} = \frac{32}{3}u^2$$

Ejemplo: Halla el área del recinto limitado por:
$f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 1 - x^2$.

$$\Rightarrow x^2 - 1 = 1 - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 = -1 \\ \\ x_2 = 1 \end{bmatrix}$$



$$G(x) = \int \left(2x^2 - 2\right) dx = \frac{2x^3}{3} - 2x$$

Recinto: $[-1,1]$ $G(-1) = \dfrac{4}{3}$; $G(1) = \dfrac{-4}{3}$

$$\text{Área} = |\,G(1) - G(-1)\,| = \frac{8}{3}u^2.$$

Segunda forma (sin valor absoluto):

$$\text{Área} = \int_{-1}^{1}\left[\left(1-x^2\right)-\left(x^2-1\right)\right]dx = \int_{-1}^{1}\left(-2x^2+2\right)dx =$$

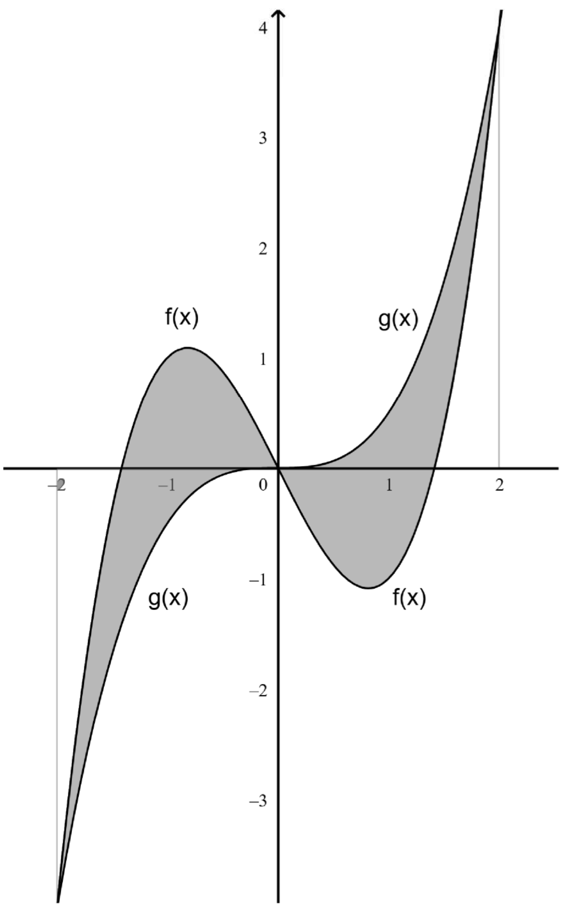
$$= \left[-\frac{2x^3}{3}+2x\right]_{-1}^{1} = \left(-\frac{2}{3}+2\right)-\left(\frac{2}{3}-2\right) = -\frac{2}{3}+2-\frac{2}{3}+2 = \frac{8}{3}u^2.$$

Ejemplo: Halla el área del recinto limitado por las funciones:

$f(x) = x^3 - 2x$ y $g(x) = \dfrac{x^3}{2}$.

$$x^3 - 2x = \frac{x^3}{2} \Rightarrow \frac{x^3}{2} - 2x = 0 \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x\left(x^2-4\right) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 = -2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \end{bmatrix}.$$

Hay dos recintos: 1º $[-2,0]$ y 2º $[0,2]$



$$G(x) = \int\left(\frac{x^3}{2}-2x\right)dx = \frac{x^4}{8} - x^2$$

$G(-2) = -2$; $G(0) = 0$; $G(2) = -2$

Área recinto 1º $= \left|G(0) - G(-2)\right| = 2$

Área recinto 2º $= \left|G(2) - G(0)\right| = 2$

Área total $= 2 + 2 = 4\,u^2$.

Forma alternativa (sin valor absoluto):

$$\int_{-2}^{0}\left[f(x)-g(x)\right]dx + \int_{0}^{2}\left[g(x)-f(x)\right]dx =$$

$$= \int_{-2}^{0}\left[\left(x^3-2x\right)-\left(\frac{x^3}{2}\right)\right]dx + \int_{0}^{2}\left[\left(\frac{x^3}{2}\right)-\left(x^3-2x\right)\right]dx =$$

$$= \int_{-2}^{0}\left(\frac{x^3}{2}-2x\right)dx + \int_{0}^{2}\left(-\frac{x^3}{2}+2x\right)dx = \left[\frac{x^4}{8}-x^2\right]_{-2}^{0} + \left[-\frac{x^4}{8}+x^2\right]_{0}^{2} =$$

$$= \left[\left(\frac{0}{8}-0\right)-\left(\frac{16}{8}-4\right)\right] + \left[\left(-\frac{16}{8}+4\right)-\left(-\frac{0}{8}+0\right)\right] = 0+2+2-0 = 4\,u^2$$