Tema 1:Sistemas de Ecuaciones. Matrices y Determinantes.

1.1 Introducción a los sistemas de ecuaciones.

- Una ecuación lineal es una expresión de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$, donde a_i, $b \in R$ son los coeficientes y término independiente respectivamente y x_i, son las incógnitas. Es decir sólo está permitido multiplicar a las incógnitas por números o coeficientes, y sumar. Ejemplo: $2x - y + z = -1$.
- Un sistema de m-ecuaciones lineales con n-incógnitas es una expresión de la forma $\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$ donde:
  - a_{ij} son los coeficientes, (i=1,2,...,m) (j=1,2,...,n), el primer subíndice hace referencia a la fila o ecuación en que está el elemento y el segundo subíndice indica la columna o incógnita que se está multiplicando.
  - x_j son las incógnitas, (j=1,2,...,n).
  - b_i son las términos independientes (i=1,2,...,m)

  Ejemplo: $\left.\begin{array}{c} 2x - y + z = -1 \\ -x + y - z = 2 \\ x - y + 2z = -3 \end{array}\right\}$ Es un sist. lineal de 3 ecuaciones y 3 incógnitas.
- La solución de un sistema es un conjunto de números, uno para cada incógnita, que cumplen simultáneamente todas las ecuaciones, es decir son números $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, ..., x_n = \alpha_n$ que al sustituir por ellos resultan igualdades numéricas ciertas. Ejemplo: el sistema anterior tiene como única solución: $\boxed{\begin{array}{c} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{array}}$ porque al sustituir, resulta: $\left.\begin{array}{c} 2 - 2 - 1 = -1 \\ -1 + 2 + 1 = 2 \\ 1 - 2 - 2 = -3 \end{array}\right\}$
- Dos sistemas de ecuaciones se dice que son equivalentes si tienen igual solución o soluciones. Se puede pasar de un sistema a otro equivalente realizando transformaciones elementales que no alteran la solución:
  - Intercambiar de lugar las ecuaciones.
  - Multiplicar en ambos miembros de una ecuación por un número.
  - Sumarle a una ecuación otra del sistema.
  - Sumarle a una ecuación otra multiplicada por un número.
  - Sumarle a una ecuación una combinación lineal de las otras.
- Atendiendo al número de soluciones que tiene un sistema, podemos clasificarlos de la siguiente forma:

$$\text{Sistemas}\begin{cases} \text{Compatible (tiene solución)}\begin{cases} \text{Determinado (una única solución)} \\ \text{Indeterminado (infinitas soluciones)} \end{cases} \\ \text{Incompatible (no tiene solución)} \end{cases}$$

- Un caso particular de sistema es el sistema homogéneo, en el que todos los términos independientes valen 0. Estos sistemas son siempre compatibles porque como mínimo tienen la solución nula.

1.2 Matrices. Tipos.

- Se llama matriz de orden o dimensión m x n a un conjunto de números distribuidos en una tabla de m filas y n columnas, encerrados entre paréntesis de la forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

El primer subíndice (i) indica la fila, el segundo (j) la columna. Así, el elemento a_{32} es el que está en la tercera fila y la segunda columna.
Se representa por A o (aij), y su dimensión es m x n.

- La primera utilidad de las matrices es la expresión simplificada de los sistemas de ecuaciones:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ y } \overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} & b_2 \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ se llaman matriz asociada y matriz ampliada respectivamente.

Sea la matriz de incógnitas $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix}$ y términos independientes $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_m \end{pmatrix}$.

El sistema entonces se expresa matricialmente así: $A \cdot X = B$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Ejemplo: en el sistema: $\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = -1 \\ -x + y - z = 2 \\ x - y + 2z = -3 \end{array}\right\}$ las matrices asociada y ampliada son: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right)$. Y la expresión matricial del sistema es: $A \cdot X = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

- Tipos de matrices:

- matriz fila: es la que sólo tiene una fila, su dimensión es 1x n. Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tiene dimensión 1 x 5.
- matriz columna: es la que sólo tiene una columna, su dimensión es m x 1. Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ tiene dimensión 3 x 1.
- matriz nula: todos sus elementos son nulos. Ejemplo: $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- matriz cuadrada: tiene igual número de filas que de columnas, es decir su dimensión es n x n (los elementos donde i=j forman la diagonal principal). Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ es de dimensión 3 x 3. También se dice que es una matriz cuadrada de orden 3.
- matriz diagonal: es aquella matriz cuadrada con elementos nulos fuera de la diagonal principal: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$
- matriz identidad: es la matriz cuadrada cuyos elementos de la diagonal principal valen 1 y el resto de elementos son 0. Ejemplo: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz identidad de orden 3.
- matriz triangular superior: es una matriz en la que todos los elementos situados por debajo de la diagonal principal son nulos. Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
- matriz triangular inferior: es una matriz en la que todos los elementos situados por encima de la diagonal principal son nulos. Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

  Las matrices triangulares hacen referencia a matrices cuadradas, pero también se puede hablar de matrices triangulares en un sentido general, también son conocidas por el nombre de matrices escalonadas.
- matriz traspuesta A^t de otra matriz A, es la que se obtiene al intercambiar las filas por columnas sin alterar su orden de colocación. Si $A=(a_{ij})$, $A^t=(a_{ji})$. Si A es de orden m x n, A^t será de orden n x m.

- Ejemplo: si $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$, $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$. A es de dimensión 2x3 y A^t es de dimensión 3x2.

- matriz opuesta: $-A$ de otra matriz A, es la que tiene por elementos los opuestos de los elementos de A. Si A=(a_{ij}), $-A = (-a_{ij})$. Ejemplo:
  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ $-A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 5 & -6 & -7 \end{pmatrix}$.
- matriz simétrica: es aquella matriz cuadrada que verifica: A= A^t.
  Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & -3 \\ 5 & -3 & 9 \end{pmatrix}$
- matriz antisimétrica: es aquella matriz cuadrada que verifica: A= $-A^t$.
  Ejemplo $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1.3 Operaciones con matrices.

- Suma o resta de matrices: para que dos matrices se puedan sumar o restar, deben tener la misma dimensión y la nueva matriz se obtiene sumando o restando los elementos que ocupan el mismo lugar.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -11 & 5 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -10 \\ -14 & 10 & -5 \end{pmatrix}$$

- Producto de un número por una matriz: se obtiene multiplicando cada uno de los elementos de la matriz por el número.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow k \cdot A = \begin{pmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} & \cdots & k\cdot a_{1n} \\ k\cdot a_{21} & k\cdot a_{22} & \cdots & k\cdot a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k\cdot a_{m1} & k\cdot a_{m2} & \cdots & k\cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (-2)\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 12 \\ 6 & -10 & 0 \end{pmatrix}$

- Las matrices con respecto a las operaciones anteriores cumplen las siguientes propiedades:
  - Conmutativa: A+B = B+A.
  - Asociativa: (A+B)+C = A+(B+C).
  - Elemento neutro: A+0=A. Siendo 0 la matriz nula.
  - Elemento opuesto: $A + (-A) = 0$.
  - Doble distributividad: $\begin{cases} \lambda \cdot (A+B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B \\ (\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B \end{cases}$
  - Asociatividad: $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu) \cdot A$
  - Elemento unidad: $1 \cdot A = A$
- Multiplicación de matrices. Veamos en primer lugar cómo se multiplica una matriz fila por una matriz columna cuando tienen los mismos elementos:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ .... \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + ... + a_{1n} \cdot b_{n1}$$

Es decir, se multiplican los elementos uno a uno y se suman. Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-1) = 4 - 3 - 3 + 2 = 0$$

Para multiplicar dos matrices, el número de columnas de la primera matriz debe coincidir con el número de filas de la segunda. La matriz producto tendrá tantas filas como la primera y tantas columnas como la segunda y cada elemento c_{ij} se obtiene multiplicando cada la fila i de la 1ª matriz por la columna j de la 2ª matriz.

$$\underbrace{A}_{(m,n)} \cdot \underbrace{B}_{(n,k)} = \underbrace{C}_{(m,k)}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mk} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i} \cdot b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{1i} \cdot b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{1i} \cdot b_{ik} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i} \cdot b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{2i} \cdot b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{2i} \cdot b_{ik} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi} \cdot b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{mi} \cdot b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{mi} \cdot b_{ik} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{A}_{(3,2)} \cdot \underbrace{B}_{(2,3)} = \underbrace{C}_{(3,3)} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ -5 & 3 & 7 \\ -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Fila 1 x Col 1: $c_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 4 - 2 = 2$

Fila 1 x Col 2: $c_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 0 + 2 = 2$

Fila 1 x Col 3: $c_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 4 + 6 = 10$

Fila 2 x Col 1: $c_{21} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = -2 - 3 = -5$

Fila 2 x Col 2: $c_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 0 + 3 = 3$

Fila 2 x Col 3: $c_{23} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 3 = -2 + 9 = 7$

Fila 3 x Col 1: $c_{31} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (-2) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = -4 - 1 = -5$

Fila 3 x Col 2: $c_{32} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 0 + 1 = 1$

Fila 3 x Col 3: $c_{33} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 3 = -4 + 3 = -1$

El producto de matrices NO ES CONMUTATIVO. Hay muchas ocasiones en que sólo se puede realizar uno de los productos. En el ejemplo anterior sí que puede hacerse el producto al revés, pero el resultado es muy diferente:

$$\underbrace{B}_{(2,3)} \cdot \underbrace{A}_{(3,2)} = \underbrace{C}_{(2,2)} \Rightarrow B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo de multiplicación de matrices: en la sala de un hospital dedicado al tratamiento de diabéticos se administra insulina de tres clases: semilenta, lenta y ultralenta. El número de unidades diarias que se aplica a los pacientes de los cinco ingresados viene dado por la siguiente tabla:

	Pac. 1	Pac. 2	Pac. 3	Pac. 4	Pac. 5
Semilenta	15	15	20	30	10
Lenta	20	20	15	5	20
Ultralenta	10	5	10	10	15

El número de días que ha estado internado cada paciente es:

	Pac. 1	Pac. 2	Pac. 3	Pac. 4	Pac. 5
Nº de días	3	7	5	12	20

La matriz de necesidades diarias es: $A = \begin{pmatrix} 15 & 15 & 20 & 30 & 10 \\ 20 & 20 & 15 & 5 & 20 \\ 10 & 5 & 10 & 10 & 15 \end{pmatrix}$.

La matriz columna que expresa el número de días es: $D = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix}$.

Para hallar el número de unidades totales de cada clase que han sido administradas a los pacientes calculamos el producto:

$$A \cdot D = \begin{pmatrix} 15 & 15 & 20 & 30 & 10 \\ 20 & 20 & 15 & 5 & 20 \\ 10 & 5 & 10 & 10 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 810 \\ 735 \\ 535 \end{pmatrix}.$$

1.4 Método de Gauss.

- El método de Gauss consiste en realizar transformaciones elementales en la matriz ampliada del sistema hasta conseguir que sea triangular superior, es decir debajo de la diagonal superior deben quedar ceros. Las transformaciones elementales que mantienen la equivalencia del sistema son las siguientes:
  - Intercambiar de lugar las ecuaciones o filas.
  - Multiplicar en ambos miembros de una ecuación o fila por un número.
  - Sumarle a una ecuación o fila otra del sistema.
  - Sumarle a una ecuación o fila otra multiplicada por un número.

- Sumarle a una ecuación o fila una combinación lineal de las otras.

Una vez aplicadas correctamente las transformaciones y conseguido el objetivo de que la matriz ampliada sea triangular, el sistema se resuelve fácilmente comenzando desde abajo para después continuar hacia arriba.

Ejemplo, resolver el siguiente sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = -1 \\ -x + y - z = 2 \\ x + y + 2z = 1 \end{array}\right\}$

La matriz ampliada es $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$. En primer lugar vamos a intercambiar las filas 1 y 3 porque es conveniente que el primer coeficiente arriba a la izquierda sea 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \boxed{\begin{array}{c} \mathbf{2^a} = 2^a + 1^a \\ \mathbf{3^a} = 3^a - 2 \cdot 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{array}\right) \boxed{\mathbf{3^a} = 2 \cdot 3^a + 3 \cdot 2^a} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

Operaciones:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}^{+} \qquad \begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 0 & -3 & -3 & -3 \end{array}^{+} \qquad \begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 3 & 9 \\ 0 & -6 & -6 & -6 \\ \hline 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}^{+}$$

El sistema ahora queda expresado de forma triangular así:

$\left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 1 \\ 2y + z = 3 \\ -3z = 3 \end{array}\right\}$ de donde: $\boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{array}}$.

Ejemplo, resolver el siguiente sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x - y + z = 2 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ x + 2y - z = 2 \end{array}\right\}$

La matriz ampliada es $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \boxed{\begin{array}{c} \mathbf{2^a} = 2^a - 2 \cdot 1^a \\ \mathbf{3^a} = 3^a - 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \boxed{\mathbf{3^a} = 3^a + 3 \cdot 2^a} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right)$$

Operaciones:

$$\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ \hline 0 & -1 & -1 & -5 \end{array}^{+} \qquad \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ \hline 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}^{+} \qquad \begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}^{+}$$

El sistema ahora queda expresado de forma triangular así:

$\left.\begin{array}{r} x - y + z = 2 \\ -y - z = -5 \\ -5z = -15 \end{array}\right\}$ de donde: $\boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{array}}$.

Ejemplo, estudiar la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro m: $\left.\begin{array}{r} x + y + mz = 0 \\ 3x + 2y + 4mz = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{array}\right\}$.

Más adelante cuando estudiemos los determinantes tendremos otras herramientas, pero de momento sólo disponemos del método de Gauss.

La matriz ampliada es $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 0 \\ 3 & 2 & 4m & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$. En primer lugar intercambiamos las filas 1ª y 3ª para razonar con los parámetros después de aplicar el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4m & 0 \\ 1 & 1 & m & 0 \end{array}\right) \boxed{\begin{array}{c} \mathbf{2^a} = 2\cdot 2^a - 3\cdot 1^a \\ \mathbf{3^a} = 2\cdot 3^a - 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 8m-9 & 0 \\ 0 & 1 & 2m-3 & 0 \end{array}\right) \boxed{\mathbf{3^a} = 3^a - 2^a} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 8m-9 & 0 \\ 0 & 0 & -6m+6 & 0 \end{array}\right)$$

Operaciones:

$$\begin{array}{rrr|r} -6 & -3 & -9 & 0 \\ 6 & 4 & 8m & 0 \\ \hline 0 & 1 & 8m-9 & 0 \end{array}^{+} \quad \begin{array}{rrr|r} -2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 2m & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2m-3 & 0 \end{array}^{+} \quad \begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & -8m+9 & 0 \\ 0 & 1 & 2m-3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -6m+6 & 0 \end{array}^{+}$$

El sistema ahora queda expresado de forma triangular así:

$\left.\begin{array}{r} 2x + y + 3z = 0 \\ y + (8m-9)z = 0 \\ (-6m+6)z = 0 \end{array}\right\}$ Habrá ahora dos posibilidades:

- Si $m \neq 1 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado porque podrá despejarse z y tendremos una única solución $\boxed{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}}$.
- Si $m = 1 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado porque la última ecuación desaparece y tendremos dos ecuaciones con tres incógnitas, con lo que habrá infinitas soluciones: $\left.\begin{array}{r} 2x + y + 3z = 0 \\ y - z = 0 \end{array}\right\}$ $\boxed{\begin{array}{c} x = -2k \\ y = k \\ z = k \end{array}}$ $(0,0,0);(-2,1,1);$etc.

1.5 Rango de una matriz.

- La independencia de un conjunto de vectores se basa en las siguientes definiciones:
  - Si $\vec{w} = a\cdot\vec{u} + b\cdot\vec{v}$, se dice entonces que el vector $\vec{w}$ está expresado como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
  - Un conjunto de vectores son linealmente independientes si ninguno de ellos puede expresarse como combinación lineal de los otros. En el plano que dos vectores sean independientes significa que no son proporcionales.

En el espacio que tres vectores sean independientes significa que no están en el mismo plano.

En general un conjunto de vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, ..., \vec{u}_n$ son linealmente independientes si cualquier combinación lineal de ellos igualada al vector cero, obliga necesariamente a que todos los coeficientes de la combinación lineal sean nulos:

$$k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + k_3\vec{u}_3 + ... + k_n\vec{u}_n = \vec{0} \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = ... = k_n = 0$$

- El rango de un conjunto de vectores es el mayor número de ellos que son linealmente independientes.
  Las filas y las columnas de una matriz pueden estar representando vectores, por lo que tiene sentido hablar del rango de una matriz, qué será el mayor número de filas o columnas linealmente independientes (el rango por filas coincide con el rango por columnas).
  El rango de una matriz se puede obtener mediante el método de Gauss porque las transformaciones elementales que se realizan para llegar a una matriz triangular mantienen el rango invariante. Finalmente una vez aplicado el método de Gauss se eliminan las filas nulas porque el vector cero es linealmente dependiente junto con cualquier vector o vectores.

Ejemplo hallar el rango de la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 17 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{2^a} = 2^a - 2\cdot 1^a \\ \mathbf{3^a} = 3^a - 1^a \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 & 15 \end{pmatrix} \boxed{\mathbf{3^a} = 3^a + 3\cdot 2^a} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rg(A) = 2$$

Operaciones:

$$\begin{array}{rrrr} -2 & 2 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ \hline 0 & -1 & -1 & -5 \end{array}^{+} \qquad \begin{array}{rrrr} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & 17 \\ \hline 0 & 3 & 3 & 15 \end{array}^{+} \qquad \begin{array}{rrrr} 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & 3 & 3 & 15 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}^{+}$$

Ejemplo hallar el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & k \end{pmatrix}$ según los valores de k.

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{2^a} = 2^a - 2\cdot 1^a \\ \mathbf{3^a} = 3^a - 3\cdot 1^a \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & -4 & k+3 \end{pmatrix} \boxed{\mathbf{3^a} = 3^a - 2^a} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \Rightarrow Rg(A) = \begin{cases} 2 \text{ si } k = 0 \\ 3 \text{ si } k \neq 0 \end{cases}$$

Operaciones:

$$\begin{array}{rrr} -2 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -4 & 3 \end{array}^{+} \qquad \begin{array}{rrr} -3 & -6 & 3 \\ 3 & 2 & k \\ \hline 0 & -4 & k+3 \end{array}^{+} \qquad \begin{array}{rrr} 0 & 4 & -3 \\ 3 & -4 & k+3 \\ \hline 0 & 0 & k \end{array}^{+}$$

1.6 Inversa de una matriz (por el método de Gauss).

- Dada una matriz cuadrada A, la matriz inversa A^{-1} es aquella que al multiplicar por la inicial resulta la matriz identidad: $\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I}$

Para que una matriz cuadrada de orden n tenga inversa, su rango debe ser n. La matriz inversa puede obtenerse por el método de Gauss realizando transformaciones elementales en la matriz doble $(A|I)$ hasta conseguir en la izquierda la matriz identidad I, entonces a la derecha tendremos la matriz inversa $(I|A^{-1})$. Ejemplo, hallar la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \boxed{\mathbf{2^a} = 2\cdot 2^a - 1^a} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{array}\right) \boxed{\mathbf{1^a} = 5\cdot 1^a - 3\cdot 2^a} \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 0 & 8 & -6 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Operaciones:

$$\begin{array}{cc|cc} -2 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 5 & -1 & 2 \end{array} + \qquad \begin{array}{cc|cc} 10 & 15 & 5 & 0 \\ 0 & -15 & 3 & -6 \\ \hline 10 & 0 & 8 & -6 \end{array} +$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{1^a} = 1^a/10 \\ \mathbf{2^a} = 2^a/5 \end{array}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}\cdot 2 - \frac{3}{5}\cdot 1 & \frac{4}{5}\cdot 3 - \frac{3}{5}\cdot 4 \\ -\frac{1}{5}\cdot 2 + \frac{2}{5}\cdot 1 & -\frac{1}{5}\cdot 3 + \frac{2}{5}\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo, resolver utilizando matrices el siguiente sistema: $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = -1 \\ x + 4y = -3 \end{array}\right\}$

El sistema anterior se escribe matricialmente de la siguiente forma:

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot X = B$ y se resuelve multiplicando por la izquierda en ambos miembros por la inversa de A (calculada antes):

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

Luego $X = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}\cdot(-1) - \frac{3}{5}\cdot(-3) \\ -\frac{1}{5}\cdot(-1) + \frac{2}{5}\cdot(-3) \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

Ejemplo: hallar la matriz X que cumpla $A \cdot X \cdot B + C = D$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vemos en primer lugar la dimensión que debe tener la matriz X, y comprobamos que tienen sentido las operaciones entre las matrices:

$$\underbrace{\underbrace{\underset{(2,2)}{A} \cdot \underbrace{\underset{(2,3)}{X} \cdot \underset{(3,3)}{B}}_{(2,3)}}_{(2,3)} + \underset{(2,3)}{C}}_{} = \underset{(2,3)}{D}$$

A continuación calculamos las inversas de A y de B:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&0\\-1&1&0&1\end{array}\right)\boxed{\mathbf{2^a}=2^a+1^a}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&0\\0&1&1&1\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

En matrices 3x3 el método de Gauss es un poco largo, después veremos otro método con determinantes. Este ejemplo, no obstante, es muy sencillo.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&-1&1&0&0&1\end{array}\right)\boxed{\mathbf{3^a}=3^a+2^a}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right);B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

Finalmente despejamos X multiplicando por la inversa de A por la izquierda y por la inversa de B por la derecha (recordemos que el producto de matrices no es conmutativo):

$$A\cdot X\cdot B+C=D\Rightarrow A\cdot X\cdot B=(D-C)\Rightarrow\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I}\cdot X\cdot\underbrace{B\cdot B^{-1}}_{I}=A^{-1}\cdot(D-C)\cdot B^{-1}$$

$$X=A^{-1}\cdot(D-C)\cdot B^{-1}\Rightarrow D-C=\begin{pmatrix}3&1&2\\0&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&-1&3\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&-1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-2&-1\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&-1\\3&0&2\end{pmatrix}$$

1.7 Determinantes. Definición.

- Dada una matriz cuadrada su determinante es un número que se calcula para matrices 2x2, 3x3 y 4x4 de la siguiente forma:
  - Orden 2: $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=\boxed{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$
  - Orden 3: $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\boxed{\begin{array}{l}a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-\\-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}\end{array}}$

  Esta fórmula se conoce con el nombre de Regla de SARRUS.

  - Orden 4:

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}=\begin{array}{l}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}+a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}+a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}+\\+a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}+a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}+a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}+a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}+\\+a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}+a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}+a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}+a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}+\\-a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}-a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}-\\-a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}-a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}-a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}-a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}-\\-a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}-a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}\end{array}$$

- Si nos fijamos en las definiciones o fórmulas anteriores, observamos los siguientes aspectos comunes:
  - Hay 2 sumandos en 2x2, 6 sumandos en 3x3 y 24 sumandos en 4x4. Es decir en general habrá n! sumandos.
  - En cada sumando aparecen multiplicándose n-factores.
  - En cada sumando hay un único factor de cada fila y también un único factor de cada columna.
  - En un determinado sumando, las filas de los factores aparecen siempre ordenadas, por lo que sólo varían las columnas de los factores que intervienen.
  - Delante de cada sumando hay un signo + para la mitad de sumandos y un signo − en la otra mitad.

  Sólo nos falta concretar este signo que tiene cada sumando para tener una definición general del determinante: este signo va a depender de la paridad del número de trasposiciones de columnas (o número de veces que los subíndices de las columnas no están en su orden natural) que hay en los factores de un cierto sumando. Concretamente el signo será positivo si el número de trasposiciones es par, y negativo cuando el número de trasposiciones es impar:
  - Ejemplo $a_{12}a_{21} \Rightarrow$ Columnas $21 \Rightarrow 1$ trasposición $\Rightarrow$ signo $-$
  - Ejemplo $a_{13}a_{21}a_{32} \Rightarrow$ Columnas $312 \Rightarrow 2$ trasposiciones $\Rightarrow$ signo $+$
  - Ejemplo $a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} \Rightarrow$ Columnas $2413 \Rightarrow 3$ trasposiciones $\Rightarrow$ signo $-$.
  - Ejemplo $a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} \Rightarrow$ Columnas $3124 \Rightarrow 2$ trasposiciones $\Rightarrow$ signo $+$.

  En definitiva: dada una matriz cuadrada de orden n, se define su determinante como el número que se obtiene al sumar n! sumandos en cada uno de los cuales aparecen todos los productos posibles con n-factores de elementos que están en una única fila y en una única columna de la matriz. Delante de cada sumando se antepone signo positivo o negativo según que el número de trasposiciones de las columnas sea par o impar respectivamente.

  Ejemplos: $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 5\cdot 4 - 2\cdot 6 = 20 - 12 = 8$

  $$\begin{vmatrix} 7 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} = 7\cdot 1\cdot 9 + 5\cdot 0\cdot 2 + 4\cdot 3\cdot 6 - 4\cdot 1\cdot 2 - 5\cdot 3\cdot 9 - 7\cdot 0\cdot 6 = \\ = 63 + 0 + 72 - 8 - 135 - 0 = 135 - 143 = -8 \end{matrix}$$

  $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \pm a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} = +2\cdot 1\cdot 1(-2) = -4$. Ya que sólo hay un producto no nulo, $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$ y el número de trasposiciones de 2143 es 4.

1.8 Propiedades de los determinantes. Método de Gauss.

1ª) $|0| = 0$. El determinante de la matriz nula es cero, porque todos sus elementos son cero y por tanto todos los productos.

2ª) $|I| = 1$. El determinante de la matriz identidad es 1 porque el único producto no nulo es el de los elementos de la diagonal principal (0 trasposiciones).

3ª) Si la matriz es triangular, el determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal, por la misma razón de antes. Ejemplo: $\begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 63$

4ª) $|A| = |A^t|$. Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 7\cdot1\cdot9 + 5\cdot0\cdot2 + 4\cdot3\cdot6 - 4\cdot1\cdot2 - 5\cdot3\cdot9 - 7\cdot0\cdot6 = \\ = 63 + 0 + 72 - 8 - 135 - 0 = 135 - 143 = -8$$

$$|A^t| = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 7\cdot1\cdot9 + 5\cdot0\cdot2 + 4\cdot3\cdot6 - 4\cdot1\cdot2 - 5\cdot3\cdot9 - 7\cdot0\cdot6 = \\ = 63 + 0 + 72 - 8 - 135 - 0 = 135 - 143 = -8$$

5ª) Al intercambiar dos filas el determinante cambia de signo. Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-3)\cdot1\cdot2 + 5\cdot0\cdot2 + 4\cdot3\cdot(-1) - 4\cdot1\cdot2 - 5\cdot3\cdot2 - (-3)\cdot0\cdot(-1) = \\ = -6 + 0 - 12 - 8 - 30 - 0 = -56$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot5\cdot2 + 1\cdot4\cdot2 + 0\cdot(-3)\cdot(-1) - 0\cdot5\cdot2 - 1\cdot(-3)\cdot2 - 3\cdot4\cdot(-1) = \\ = 30 + 8 + 0 - 0 + 6 + 12 = 56$$

6ª) Si hay dos filas o columnas iguales el determinante es cero. Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot1\cdot2 + 1\cdot0\cdot2 + 0\cdot3\cdot(-1) - 0\cdot1\cdot2 - 1\cdot3\cdot2 - 3\cdot0\cdot(-1) = \\ = 6 + 0 + 0 - 0 - 6 + 0 = 0$$

7ª) Si hay dos filas o columnas proporcionales el determinante es 0. Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2)\cdot2 + 1\cdot4\cdot2 + 0\cdot4\cdot(-1) - 0\cdot(-2)\cdot2 - 1\cdot4\cdot2 - 3\cdot4\cdot(-1) = \\ = -12 + 8 - 0 + 0 - 8 + 12 = 0$$

8ª) Si multiplicamos una fila o columna por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número. Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2)\cdot1 + 1\cdot4\cdot1 + 0\cdot4\cdot(-1) - 0\cdot(-2)\cdot1 - 1\cdot4\cdot1 - 3\cdot4\cdot(-1) = \\ = -6 + 4 - 0 + 0 - 4 + 12 = 6$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2)\cdot3 + 1\cdot4\cdot3 + 0\cdot4\cdot(-3) - 0\cdot(-2)\cdot3 - 1\cdot4\cdot3 - 3\cdot4\cdot(-3) = \\ = -18 + 12 - 0 + 0 - 12 + 36 = 18$$

Luego, $|A'| = 3\cdot|A| \Rightarrow 18 = 3\cdot6$

9ª) Si en una fila o columna los elementos están expresados mediante una suma de dos números, siendo A_1 y A_2 las matrices que se obtienen al considerar sólo el primer sumando y sólo el segundo sumando, entontes el determinante puede calcularse mediante la expresión: $\boxed{|A| = |A_1| + |A_2|}$. Es decir:

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 0+1 & 2 & 3 \\ -1+1 & 1 & 4 \\ 1+2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow 13=6+7$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot2 + 2\cdot4\cdot3 + 3\cdot0\cdot1 - 3\cdot1\cdot3 - 2\cdot0\cdot2 - 1\cdot4\cdot1 = \\ = 2+24+0-9-0-4 = 13$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0\cdot1\cdot2 + 2\cdot4\cdot1 + 3\cdot(-1)\cdot1 - 3\cdot1\cdot1 - 2\cdot(-1)\cdot2 - 0\cdot4\cdot1 = \\ = 0+8-3-3+4-0 = 6$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot2 + 2\cdot4\cdot2 + 3\cdot1\cdot1 - 3\cdot1\cdot2 - 2\cdot1\cdot2 - 1\cdot4\cdot1 = \\ = 2+16+3-6-4-4 = 7$$

10ª) Si una fila o columna es combinación lineal de las otras, el determinante vale cero.
Ejemplo: vamos a escribir una matriz en la que la 3ª fila sea una combinación lineal de las otras dos filas (3ª=1ª+2ª) y comprobaremos que el determinante vale 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot7 + 2\cdot4\cdot1 + 3\cdot0\cdot3 - 3\cdot1\cdot1 - 2\cdot0\cdot7 - 1\cdot4\cdot3 = \\ = 7+8+0-3-0-12 = 0$$

11ª) Si a una fila o columna le sumamos una combinación lineal de las otras, el determinante no varía.
Ejemplo: vamos a sumarle a la 3ª fila de la matriz una combinación lineal de las otras dos filas (3ª=3ª+1ª+2ª) y comprobaremos que el determinante no varía.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot2 + 2\cdot4\cdot3 + 3\cdot0\cdot1 - 3\cdot1\cdot3 - 2\cdot0\cdot2 - 1\cdot4\cdot1 = \\ = 2+24+0-9-0-4 = 13$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot9 + 2\cdot4\cdot4 + 3\cdot0\cdot4 - 3\cdot1\cdot4 - 2\cdot0\cdot9 - 1\cdot4\cdot4 = \\ = 9+32+0-12-0-16 = 13$$

12ª) Si las matrices A y B son cuadradas, $\boxed{|A \bullet B| = |A| \cdot |B|}$

Ejemplo: dado el producto: $A \bullet B = C \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 2 = -6$ $\qquad |B| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -0 - 6 = -6$;

$|A \bullet B| = |C| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 32 = 36$ $\qquad |A| \bullet |B| = (-6)\cdot(-6) = 36$

- De la propiedad 10: si una fila o columna es combinación lineal de las otras, el determinante vale cero, se deduce lo siguiente:

  Sea A una matriz cuadrada de orden $n \Rightarrow \left\langle \boxed{\begin{array}{l} |A| = 0 \Leftrightarrow Rg(A) < n \\ |A| \neq 0 \Leftrightarrow Rg(A) = n \end{array}} \right.$

  Ejemplo: calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & k \end{pmatrix}$

  $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & k \end{vmatrix} \begin{array}{l} = 1\cdot1\cdot k + 2\cdot4\cdot1 + 3\cdot0\cdot3 - 3\cdot1\cdot1 - 2\cdot0\cdot k - 1\cdot4\cdot3 = \\ = k + 8 + 0 - 3 - 0 - 12 = k - 7 \end{array}$$

  Luego: $\begin{cases} k = 7 \Rightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow Rg(A) < 3 \\ k \neq 7 \Rightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow Rg(A) = 3 \end{cases}$. Más adelante veremos que para k=7 el rango vale exactamente 2.

- De la propiedad 11: si a una fila o columna le sumamos una combinación lineal de las otras, el determinante no varía, resulta un método para calcular determinantes que consiste en aplicar el método de Gauss hasta que la matriz sea triangular y entonces su determinante será el producto de los elementos de la diagonal principal. Hay que tener en cuenta que cada vez que se multiplique por un número a la fila con la que se opera, el determinante también quedará multiplicado por dicho número por la propiedad 8.

  Ejemplo: calcular el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

  $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{\begin{array}{l} \mathbf{2^a} = 2^a - 1^a \\ \mathbf{3^a} = 3^a + 1^a \\ \mathbf{4^a} = 4^a - 1^a \end{array}} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \boxed{\mathbf{4^a} = 4\cdot4^a - 3\cdot2^a}$$

Operaciones: $\begin{pmatrix} 0 & 12 & -8 & -4 \\ 0 & -12 & -6 & 6 \\ \hline 0 & 0 & -14 & 2 \end{pmatrix}^{+} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -14 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \boxed{\mathbf{4^a} = 3\cdot 4^a + 14\cdot 3^a}$

Operaciones: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -42 & 6 \\ 0 & 0 & 42 & 42 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 48 \end{pmatrix}^{+} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 48 \end{vmatrix}}{4\cdot 3} = \dfrac{1\cdot 4\cdot 3\cdot 48}{4\cdot 3} = 48$.

Hay que observar, que se ha multiplicado la fila modificada en dos ocasiones (por 4 y por 3) y el determinante final será doce veces mayor que el inicial, por lo que hay que dividir por 12 para que el determinante no varíe.

1.9 Matriz complementaria y adjunta. Desarrollo de un determinante.

- Dada una matriz cuadrada A de orden n, el menor complementario α_{ij} de un elemento a_{ij} es el determinante de la matriz (de orden $n-1$) que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j. La matriz complementaria α de una matriz A es la que se obtiene al sustituir cada elemento por su menor complementario.

  Ejemplo: calcular la matriz complementaria de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

  $\alpha_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -13$ $\quad \alpha_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$ $\quad \alpha_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1$

  $\alpha_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11$ $\quad \alpha_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$ $\quad \alpha_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$

  $\alpha_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5$ $\quad \alpha_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$ $\quad \alpha_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

  Luego la matriz complementaria de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ es $\alpha = \begin{pmatrix} -13 & -4 & -1 \\ -11 & -4 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

- Dada una matriz cuadrada A de orden n, el adjunto A_{ij} de un elemento a_{ij} se define a partir del menor complementario de la siguiente forma:

  $\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot\alpha_{ij}}$, es decir el adjunto se obtiene del menor complementario

cambiándolo de signo si la suma de los subíndices es impar. Los signos que corresponden a los adjuntos de una matriz 3x3 son: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$.

Se define matriz adjunta de una matriz A como aquella que se obtiene al sustituir cada elemento por su adjunto.

Ejemplo: calcular la matriz adjunta de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

La matriz complementaria, ya calculada antes, es $\alpha = \begin{pmatrix} -13 & \mathbf{-4} & -1 \\ \mathbf{-11} & -4 & \mathbf{1} \\ 5 & \mathbf{4} & 1 \end{pmatrix}$, y la matriz adjunta se obtiene a partir de ella cambiando de signo los elementos señalados en negrita: $\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -13 & \mathbf{4} & -1 \\ \mathbf{11} & -4 & \mathbf{-1} \\ 5 & \mathbf{-4} & 1 \end{pmatrix}$

- A partir de las definiciones anteriores, tenemos un método para calcular determinantes desarrollando por los elementos de una fila o columna según las siguientes fórmulas:
  - Desarrollo por la fila i: $\boxed{|A| = a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{i2}\cdot A_{i2} + \ldots + a_{in}\cdot A_{in}}$
  - Desarrollo por la columna j: $\boxed{|A| = a_{1j}\cdot A_{1j} + a_{2j}\cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj}\cdot A_{nj}}$

  Es decir se multiplica cada elemento (de la fila o columna) por su adjunto y se suman los resultados.

  Ejemplo: calcular el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

  Vamos a hacer este determinante mediante la regla de Sarrus, y también desarrollando por la fila 2 y desarrollando por la columna 1 (los adjuntos ya están calculados en el ejercicio anterior):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} = 1\cdot 1\cdot(-.1) + 2\cdot 4\cdot 1 + 3\cdot 0\cdot 3 - 3\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 0\cdot(-1) - 1\cdot 4\cdot 3 = \\ = -1 + 8 + 0 - 3 - 0 - 12 = -8 \end{matrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} = a_{21}\cdot A_{21} + a_{22}\cdot A_{22} + a_{23}\cdot A_{23} = 0\cdot 11 + 1\cdot(-4) + 4\cdot(-1) = \\ = 0 - 4 - 4 = -8 \end{matrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} = a_{11}\cdot A_{11} + a_{21}\cdot A_{21} + a_{31}\cdot A_{31} = 1\cdot(-13) + 0\cdot 11 + 1\cdot 5 = \\ = -13 + 0 + 5 = -8 \end{matrix}$$

Ejemplo: calcular el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Este determinante ya se calculó por el método de Gauss y el resultado fue 48.

Desarrollo por fila 4: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = a_{41}\cdot A_{41} + a_{42}\cdot A_{42} + a_{43}\cdot A_{43} + a_{44}\cdot A_{44} =$

$$= 1\cdot(-1)^5\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^6\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^7\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^8\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-1)\left[(-2)\cdot 3\cdot 2 + 1\cdot(-1)\cdot 2 + 1\cdot 2\cdot 2 - 1\cdot 3\cdot 2 - 1\cdot 2\cdot 2 - (-2)\cdot(-1)\cdot 2\right] +$$
$$+ 1\cdot 1\left[1\cdot 3\cdot 2 + 1\cdot(-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot 3\cdot(-1) - 1\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot(-1)\cdot 2\right] +$$
$$+ (-1)\cdot(-1)\left[1\cdot 2\cdot 2 + (-2)\cdot(-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot 2\cdot(-1) - (-2)\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot(-1)\cdot 2\right] +$$
$$+ 0\cdot 1\cdot\left[1\cdot 2\cdot 2 + (-2)\cdot 3\cdot(-1) + 1\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot 2\cdot(-1) - (-2)\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot 3\cdot 2\right] =$$
$$= -\left[-12 - 2 + 4 - 6 - 4 - 4\right] + \left[6 + 1 + 2 + 3 - 2 + 2\right] + \left[4 - 2 + 2 + 2 + 4 + 2\right] + 0 =$$
$$= 24 + 12 + 12 = 48$$

Es aconsejable utilizar de forma mixta los dos métodos, el método de Gauss y el desarrollo por una fila o columna: primero se aplica Gauss y después se desarrolla el determinante por la columna 1 porque tiene más ceros.

Ejemplo: calcular el determinante de Vandermonde $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \boxed{\begin{matrix} \mathbf{2^a} = 2^a - a\cdot 1^a \\ \mathbf{3^a} = 3^a - a\cdot 2^a \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2 - ab & c^2 - ac \end{vmatrix} = \text{col.}1 \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix} =$$

(Dividiendo cada columna) $= (b-a)\cdot(c-a)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} = (b-a)\cdot(c-a)\cdot(c-b)$

1.10 Rango de una matriz por el método de los menores.

- Dada una matriz cualquiera, no tiene porqué ser cuadrada, se define menor de orden p como el determinante de una submatriz cuadrada de orden p obtenida eliminando algunas filas o columnas de la matriz. En particular, cada elemento de la matriz será un menor de orden1, y si la matriz es cuadrada de orden n, un menor de orden n será el propio determinante.

Ejemplo: en la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, hay tres menores de orden 2 tras eliminar una columna: $m_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2$; $m_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8$; $m_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$

El rango de una matriz es el mayor orden de los menores no nulos

Ejemplo: hallar el rango de la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 17 \end{pmatrix}$. Ya se estudió el rango de esta matriz por el método de Gauss y el resultado fue 2.
Ahora por el método de los menores, tenemos 4 menores de orden 3 tras eliminar cada fila.
Si alguno de ellos es distinto de 0 el rango será 3 y si todos valen 0 el rango será 2 porque siempre es fácil encontrar menores de orden 2 no nulos salvo que todas las filas sean proporcionales.

$$m_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 17 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1\cdot 17 + 1\cdot(-1)\cdot 2 + 2\cdot(-3)\cdot 4 - 2\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot(-3)\cdot 17 - \\ -(-1)\cdot(-1)\cdot 4 = -17 - 2 - 24 - 4 + 51 - 4 = 0$$

$$m_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 17 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 17 + 1\cdot(-1)\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 4 - 2\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 17 - 1\cdot(-1)\cdot 4 = \\ = 17 - 1 + 16 - 2 - 34 + 4 = 0$$

$$m_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 17 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3)\cdot 17 + (-1)\cdot(-1)\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 2 - 2\cdot(-3)\cdot 1 - (-1)\cdot 2\cdot 17 - \\ -1\cdot(-1)\cdot 2 = -51 + 1 + 8 + 6 + 34 + 2 = 0$$

$$m_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3)\cdot 4 + (-1)\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 2 - 1\cdot(-3)\cdot 1 - (-1)\cdot 2\cdot 4 - 1\cdot 1\cdot 2 = \\ = -12 - 1 + 4 + 3 + 8 - 2 = 0$$

Como todos los menores de orden 3 son nulos, y hay menores de orden 2 no nulos, por ejemplo: $m = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1$, el rango de la matriz es 2.

Ejemplo hallar el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & k \end{pmatrix}$ según los valores de k. Ya se estudió el rango de esta matriz por el método de Gauss y el resultado fue el siguiente: $Rg(A) = \begin{cases} 2 \text{ si } k = 0 \\ 3 \text{ si } k \neq 0 \end{cases}$.

Ahora por el método de los menores, tenemos un menor de orden 3 que es el propio determinante, si vale 0 el rango será 2 porque hay menores de orden 2 no nulos y si el determinante es distinto de 0 el rango será 3.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & k \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot k + 2\cdot 1\cdot 3 + (-1)\cdot 2\cdot 2 - (-1)\cdot 0\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot k - 1\cdot 1\cdot 2 = \\ = 0 + 6 - 4 + 0 - 4k - 2 = -4k$$

Luego: $\begin{cases} k = 0 \Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow Rg(A) = 2 \\ k \neq 0 \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow Rg(A) = 3 \end{cases}$.

1.11 Matriz inversa por determinantes.

- Recordemos que dada una matriz cuadrada A, la matriz inversa A^{-1} es aquella que al multiplicar por la inicial resulta la matriz identidad:
  $\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I}$
  Para que una matriz cuadrada de orden n tenga inversa, su rango debe ser n, o lo que es lo mismo, su determinante debe ser distinto de cero.
  La matriz inversa se obtiene mediante la fórmula $\boxed{A^{-1} = \dfrac{[Adj(A)]^t}{|A|}}$.
  Es decir hay que seguir el siguiente proceso:
  $$A \to Compl(A) \to Adj(A) \to [Adj(A)]^t \to \frac{[Adj(A)]^t}{|A|}$$
  Ejemplo: hallar la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. (Se hizo por Gauss).
  $$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \to Compl(A) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \to Adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \to [Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
  Luego $A^{-1} = \dfrac{[Adj(A)]^t}{|A|} = \dfrac{\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{5} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$
  Ejemplo: hallar la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. (Se hizo por Gauss).
  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to Compl(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$
  $$\to [Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{[Adj(A)]^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: hallar la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot1\cdot(-1) + 2\cdot2\cdot1 + 3\cdot0\cdot0 - 3\cdot1\cdot1 - 2\cdot0\cdot1 - 2\cdot2\cdot0 =$$
$$= -2 + 4 + 0 - 3 - 0 - 0 = -1$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \text{Compl}(A) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & -5 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to [\text{Adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{[\text{Adj}(A)]^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Comprobación: $A^{-1} \bullet A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.12 Regla de Cramer.

- Un sistema de Cramer es el que tiene igual número de ecuaciones que incógnitas y el determinante de la matriz asociada es distinto de cero.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

$$\text{Rg}(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = n \Leftrightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

- Si el sistema es de Cramer puede resolverse utilizando determinantes calculando cada incógnita de la siguiente forma:

$$\boxed{x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \ldots\ldots x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}}{|A|}}$$

Es decir, cada incógnita se calcula a partir del determinante de la matriz que resulta al sustituir la columna de coeficiente de la incógnita por la columna de términos independientes.

Demostración: utilizaremos la expresión matricial en columnas del sistema:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ .... \\ a_{n1} \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ .... \\ a_{n2} \end{pmatrix} \cdot x_2 + ... + \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ .... \\ a_{nn} \end{pmatrix} \cdot x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow C_1 x_1 + C_2 x_2 + ... + C_n x_n = B$$

$$|B, C_2, ..., C_n| = |C_1 x_1 + C_2 x_2 + ... + C_n x_n, C_2, ..., C_n| = \text{por la propiedad 9}$$

$$= |C_1 x_1, C_2, ..., C_n| + |C_2 x_2, C_2, ..., C_n| + ... + |C_n x_n, C_2, ..., C_n| = \text{por la propiedad 8}$$

$$= x_1 |C_1, C_2, ..., C_n| + x_2 |C_2, C_2, ..., C_n| + ... + x_n |C_n, C_2, ..., C_n| = \text{por la propiedad 6}$$

$$= x_1 |C_1, C_2, ..., C_n| + 0 + ... + 0 = x_1 |C_1, C_2, ..., C_n| \text{ y ahora despejando :}$$

$$x_1 |C_1, C_2, ..., C_n| = |B, C_2, ..., C_n| \Rightarrow x_1 = \frac{|B, C_2, ..., C_n|}{|C_1, C_2, ..., C_n|} \Rightarrow x_1 = \frac{|B, C_2, ..., C_n|}{|A|}$$

De igual manera, el mismo proceso anterior se repetiría para las otras incógnitas, cambiando la columna de coeficientes de la incógnita por la columna de términos independientes, y tendríamos la misma fórmula.

Ejemplo: resolver por Cramer el siguiente sistema $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = -1 \\ x + 4y = -3 \end{array}\right\}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \ |A| = 8 - 3 = 5$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-4+9}{5} = \frac{5}{5} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-6+1}{5} = \frac{-5}{5} = -1$$

Ejemplo: resolver por Cramer el siguiente sistema $\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = -1 \\ -x + y - z = 2 \\ x - y + 2z = -3 \end{array}\right\}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot1\cdot2 + (-1)\cdot(-1)\cdot1 + 1\cdot(-1)\cdot(-1) - 1\cdot1\cdot1 - (-1)\cdot(-1)\cdot2 - 2\cdot(-1)\cdot(-1) =$$
$$= 4 + 1 + 1 - 1 - 2 - 2 = 1$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1}{1} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2}{1} = 2 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-1}{1} = -1$$

Operaciones:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot1\cdot2 + (-1)\cdot(-1)\cdot(-3) + 1\cdot2\cdot(-1) - 1\cdot1\cdot(-3) - (-1)\cdot2\cdot2 - (-1)\cdot(-1)\cdot(-1) =$$
$$= -2 - 3 - 2 + 3 + 4 + 1 = 1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 2 + (-1)\cdot(-1)\cdot 1 + 1\cdot(-1)\cdot(-3) - 1\cdot 2\cdot 1 - (-1)\cdot(-1)\cdot 2 - 2\cdot(-1)\cdot(-3) = \\ = 8 + 1 + 3 - 2 - 2 - 6 = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot(-3) + (-1)\cdot 2\cdot 1 + (-1)\cdot(-1)\cdot(-1) - (-1)\cdot 1\cdot 1 - (-1)\cdot(-1)\cdot(-3) - 2\cdot 2\cdot(-1) = \\ = -6 - 2 - 1 + 1 + 3 + 4 = -1$$

1.13 Discusión de un sistema. Teorema de Rouché-Fröbenius.

- El teorema de Rouché-Fröbenius afirma que para que un sistema sea compatible (tiene solución) es condición necesaria y suficiente que el rango de la matriz asociada y el rango de la matriz ampliada coincidan.
  $\boxed{\text{Sistema compatible} \Leftrightarrow Rg(A) = Rg(\overline{A})}$. La expresión matricial es:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_m \end{pmatrix}.$$

  Y la expresión matricial en columnas del sistema es:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ .... \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ .... \\ a_{m2} \end{pmatrix} \cdot x_2 + ... + \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ .... \\ a_{mn} \end{pmatrix} \cdot x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n = B$$

  Que el sistema sea compatible quiere decir que tiene solución, es decir, existen n-números, uno para cada incógnita, $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, ..., x_n = \alpha_n$ que cumplen simultáneamente todas las ecuaciones. Por lo tanto al sustituir las incógnitas por estos valores la igualdad matricial escrita en columnas: $C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 + ... + C_n\alpha_n = B$ es cierta. Esto quiere decir que la columna B es combinación lineal de las otras y por tanto al añadir una columna dependiente de las otras, el rango no variará. Resumiendo:

  $$\text{Compatible} \Leftrightarrow Rg(C_1, C_2, ..., C_n) = Rg(C_1, C_2, ..., C_n | B) \Leftrightarrow \boxed{Rg(A) = Rg(\overline{A})}$$

  La clasificación inicial sobre tipos de sistemas puede ahora completarse gracias al teorema de Rouché-Fröbenius de la siguiente forma:

$$\text{Sistema}\begin{cases} \underbrace{\text{Compatible (tiene solución)}}_{Rg(A)=Rg(\overline{A})}\begin{cases} \underbrace{\text{Determinado (una única solución)}}_{Rg(A)=Rg(\overline{A})=\text{nº incógnitas}\Rightarrow\text{CRAMER}} \\ \underbrace{\text{Indeterminado (infinitas soluciones)}}_{Rg(A)=Rg(\overline{A})<\text{nº incógnitas}} \end{cases} \\ \underbrace{\text{Incompatible (no tiene solución)}}_{Rg(A)<Rg(\overline{A})} \end{cases}$$

- Ejemplo: estudiar la compatibilidad del siguiente sistema según los valores del paramento indeterminado y resolverlo para los casos compatibles:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-3y=5 \\ 4x+ky=2 \end{array}\right\}$$

Las matrices asociada y ampliada son: $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & k \end{pmatrix}$ y $\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 5 \\ 4 & k & 2 \end{array}\right)$.

Comenzaremos el estudio de los rangos con A porque es cuadrada y será fácil utilizar determinantes.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & k \end{vmatrix}=2k+12\rightarrow 2k+12=0\Leftrightarrow k=-6$$

Luego: $\begin{cases} k=-6\Leftrightarrow |A|=0\Leftrightarrow Rg(A)=1 \\ k\neq -6\Leftrightarrow |A|\neq 0\Leftrightarrow Rg(A)=2 \end{cases}$.

El rango de $\overline{A}$ claramente es 2 porque hay un menor de orden 2 no nulo. $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\neq 0$. En general el rango de $\overline{A}$ bien coincide con el de A o es mayor en una unidad porque se ha añadido únicamente una columna.

Escribimos ahora el resumen o clasificación en una tabla:

Valor de k	$Rg(A)$	$Rg(\overline{A})$	Nº incóg	Tipo de sistema
$k\neq -6$	2	2	2	S. Comp. Determinado
$k=-6$	1	2	2	S. Incompatible

Para resolverlo en los casos compatible determinado, podemos utilizar la regla de Cramer, y la solución única es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & k \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{5k+6}{2k+12} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-16}{2k+12}$$

En definitiva para los infinitos los valores del parámetro k (excepto para $k=-6$) el sistema tendrá una única solución que dependerá de k. Por ejemplo para k=0 la única solución es $\begin{cases} x=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{-16}{12}=-\dfrac{4}{3} \end{cases}$

- Ejemplo: estudiar la compatibilidad del siguiente sistema según los valores del paramento indeterminado, y resolverlo para los casos compatibles:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=5 \\ x+2y=3 \\ ax+y=3 \end{array}\right\}$$

Las matrices asociada y ampliada son: $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ y $\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ a & 1 & 3 \end{array}\right)$.

Claramente el rango de A es 2 porque hay un menor de orden 2 no nulo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1\neq 0$$

Veamos ahora el rango de $\overline{A}$, que como es cuadrada podemos razonar con su determinante:

$$\left|\overline{A}\right|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ a & 1 & 3 \end{vmatrix}=2\cdot 2\cdot 3+3\cdot 3\cdot a+5\cdot 1\cdot 1-5\cdot 2\cdot a-3\cdot 1\cdot 3-2\cdot 3\cdot 1=$$
$$=12+9a+5-10a-9-6=-a+2$$

$|A|=0\Leftrightarrow -a+2=0\Leftrightarrow a=2$. Luego: $\begin{cases} a=2\Leftrightarrow \left|\overline{A}\right|=0\Leftrightarrow Rg\left(\overline{A}\right)=2 \\ a\neq 6\Leftrightarrow \left|\overline{A}\right|\neq 0\Leftrightarrow Rg\left(\overline{A}\right)=3 \end{cases}$.

Escribimos ahora el resumen o clasificación en una tabla:

Valor de a	$Rg(A)$	$Rg(\overline{A})$	Nº incóg	Tipo de sistema
$a\neq 2$	2	3	2	S. Incompatible
$a=2$	2	2	2	S. Comp. Determinado

Para resolverlo en el caso compatible determinado, podemos utilizar la regla de Cramer, eliminando una ecuación que está sobrando porque es combinación lineal de las otras y no aporta información.

Para a=2 $\left.\begin{array}{r} 2x+3y=5 \\ x+2y=3 \\ 2x+y=3 \end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+3y=5 \\ x+2y=3 \end{array}\right\}$ y la solución única es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{1}=1 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{1}=1$$

En definitiva para los infinitos los valores del parámetro a (excepto para $a=2$) el sistema no tiene solución. Y para $a=2$ la única solución es $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

- Ejemplo, estudiar la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro, y resolverlo en los casos compatibles:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+mz=0 \\ 3x+2y+4mz=0 \\ 2x+y+3z=0 \end{array}\right\}.$$

Las matrices son: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 3 & 2 & 4m \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 0 \\ 3 & 2 & 4m & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$.

Comenzaremos el estudio de los rangos con A porque es cuadrada y será fácil utilizar determinantes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 3 & 2 & 4m \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 4m\cdot 2 + m\cdot 3\cdot 1 - m\cdot 2\cdot 2 - 1\cdot 3\cdot 3 - 1\cdot 4m\cdot 1 =$$
$$= 6 + 8m + 3m - 4m - 9 - 4m = 3m - 3$$

$|A| = 0 \Leftrightarrow 3m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1$. Luego: $\begin{cases} m = 1 \Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow Rg(A) = 2 \\ m \neq 1 \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow Rg(A) = 3 \end{cases}$.

El rango de $\overline{A}$ coincidirá con el rango de A porque se añade una columna nula. Recordemos que este sistema es homogéneo y por tanto siempre compatible. Escribimos ahora el resumen o clasificación en una tabla:

Valor de m	$Rg(A)$	$Rg(\overline{A})$	Nº incóg	Tipo de sistema
$m \neq 1$	3	3	3	S. Comp. Determinado
$m = 1$	2	2	3	S. Comp. Indeterminado

Resolución:

- Si $m \neq 1 \Rightarrow$ Hay una única solución que forzosamente debe ser $\boxed{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}}$ porque es un sistema homogéneo y en estos sistemas siempre tienen como mínimo esta solución, y además por ser compatible determinado está será la única solución.
- Si $m = 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + 4z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{array}\right\}$

Para resolver los sistemas compatibles indeterminados se aplica el método de Gauss (no puede utilizarse el método de Cramer porque el determinante de la matriz es cero). Además el método de Gauss simplifica las últimas ecuaciones haciendo más fácil la resolución.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \boxed{\begin{array}{l} \mathbf{2^a} = 2^a - 3\cdot 1^a \\ \mathbf{3^a} = 3^a - 2\cdot 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \boxed{\mathbf{3^a} = 3^a - 2^a} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Operaciones:
$$\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} + \quad \begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} + \quad \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} +$$

$\left.\begin{array}{r} 2x + y + 3z = 0 \\ -y + z = 0 \end{array}\right\}$ la última ecuación ha desaparecido y tenemos dos ecuaciones con tres incógnitas, con lo que habrá infinitas soluciones:

$\boxed{\begin{array}{c} x = -2k \\ y = k \\ z = k \end{array}}$ (0,0,0);(−2,1,1);etc. Dando valores al nuevo parámetro k.

En definitiva para los infinitos los valores del parámetro m (excepto para $m = 1$) el sistema tiene una única solución $\boxed{\begin{array}{c} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}}$. Y para $m = 1$ el sistema tiene infinitas soluciones, todas ellas son de la forma $\boxed{\begin{array}{c} x = -2k \\ y = k \\ z = k \end{array}}$.

- Ejemplo, estudiar la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro: $\left.\begin{array}{r} 3x + my + z = m - 2 \\ x + y + 2z = 0 \\ mx + y - z = m - 2 \end{array}\right\}$.

Las matrices son: $A = \begin{pmatrix} 3 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & m & 1 & m-2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ m & 1 & -1 & m-2 \end{array}\right)$.

Comenzaremos el estudio de los rangos con A porque es cuadrada.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot1\cdot(-1) + m\cdot2\cdot m + 1\cdot1\cdot1 - 1\cdot1\cdot m - m\cdot1\cdot(-1) - 3\cdot2\cdot1 =$$
$$= -3 + 2m^2 + 1 - m + m - 6 = 2m^2 - 8$$

$|A| = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$. Luego: $\begin{cases} m = \pm 2 \Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow Rg(A) = 2 \\ m \neq \pm 2 \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow Rg(A) = 3 \end{cases}$.

El rango de $\overline{A}$ sólo hay que estudiarlo para $m = -2$ y $m = 2$ porque en los demás valores de m el rango será 3 porque en la matriz ampliada se añade una columna a la matriz A y no puede ser 4 porque sólo hay 3 filas.

- Si $m = 2 \Rightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$ tiene rango 2 porque todos los menores de orden 3 valen 0, el primero porque ya vimos que $|A| = 0$ para $m = 2$ y los otros por tener una columna nula.

- Si $m=-2 \Rightarrow \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right)$ tiene rango 3 porque hay un menor de orden 3 no nulo:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 2\cdot(-4)+1\cdot 0\cdot 1+(-4)\cdot 1\cdot(-1)-(-4)\cdot 2\cdot 1-1\cdot 1\cdot(-4)-$$
$$-(-2)\cdot 0\cdot(-1)=16+0+4+8+4-0=32$$

Valor de m	$Rg(A)$	$Rg(\overline{A})$	Nº incóg	Tipo de sistema
$m \neq -2,2$	3	3	3	S. Comp. Determinado
$m=2$	2	2	3	S. Comp. Indeterminado
$m=-2$	2	3	3	S. Incompatible.

En definitiva para los infinitos los valores del parámetro m (excepto para $m=\pm 2$) el sistema tiene una única solución que podrá obtenerse por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} m-2 & m & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ m-2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & m-2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ m & m-2 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 3 & m & m-2 \\ 1 & 1 & 0 \\ m & 1 & m-2 \end{vmatrix}}{|A|}$$

Para $m=-2$ el sistema no tiene solución y para $m=2$ el sistema tiene infinitas soluciones.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \boxed{\begin{array}{c} \mathbf{2^a}=3\cdot 2^a-1^a \\ \mathbf{3^a}=3\cdot 3^a-2\cdot 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right) \boxed{\mathbf{3^a}=3^a+2^a} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\left.\begin{array}{r} 3x+2y+z=0 \\ y+5z=0 \end{array}\right\}$ la última ecuación ha desaparecido y tenemos dos ecuaciones con tres incógnitas, con lo que habrá infinitas soluciones:

$\boxed{\begin{array}{c} x=3k \\ y=-5k \\ z=k \end{array}}$ (0,0,0);(3, – 5 ,1);etc. Dando valores al nuevo parámetro k.