

## Tema 2: Programación lineal.

### 2.1 Introducción.

- La programación lineal es una técnica matemática relativamente reciente (siglo XX) que se integra dentro de la rama de las matemáticas denominada investigación operativa. Su objetivo consiste en resolver problemas en los que se desea maximizar o minimizar una función cuyas variables están sujetas a restricciones: limitaciones económicas, de unidades, de espacio, de tiempo, etc. Las aplicaciones de la programación lineal están en todas las ciencias sociales: industria, economía, sociedad, estrategia militar, etc.
- La función que se desea optimizar se llama **función objetivo** y es una función de dos variables:  $z = f(x, y) = ax + by$ .
- Las **restricciones** constituyen un sistema de inecuaciones con dos incógnitas:

$$\left. \begin{array}{l} a_1x + b_1y \leq c_1 \\ a_2x + b_2y \leq c_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_mx + b_my \leq c_m \end{array} \right\} \text{La solución del sistema se llama } \mathbf{región factible}.$$

- Una solución factible es un punto del plano  $(x, y)$  que cumple todas las restricciones; es decir, es un punto de la región factible. El valor óptimo se obtiene evaluando las soluciones factibles en la función objetivo. **La solución óptima siempre se encuentra en algún vértice de la región factible.**
- Ejemplo: una pastelería elabora dos tipos de tartas: vienesa y real. Para una tarta vienesa se necesita 1 kg de bizcocho y 250 gr de relleno, y su precio es de 12,50 €. Por otra parte, para una tarta real se necesita 1 kg de bizcocho y medio kg de relleno, y su precio es de 20 €. En la pastelería pueden utilizarse diariamente 150 kg de bizcocho y 50 kg de relleno. ¿Cuántas tartas de cada clase deben fabricarse para que el beneficio sea máximo?

Es conveniente seguir el siguiente proceso:

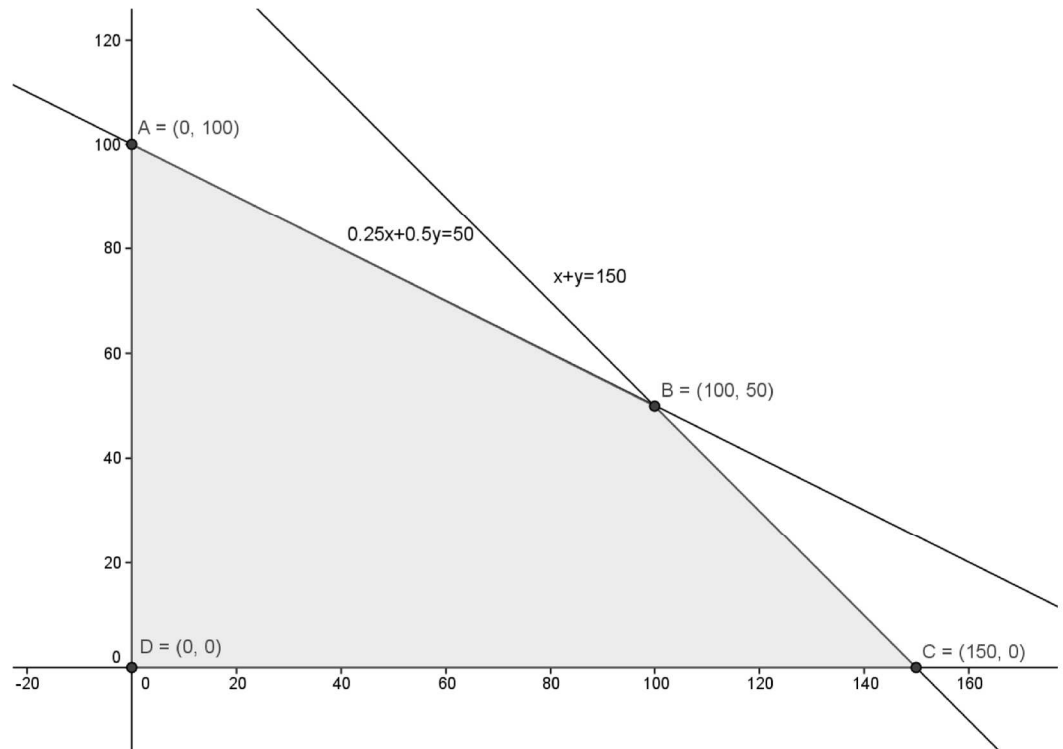
1º) Identificamos las incógnitas y hacemos una tabla para organizar los datos:

Tipo de tarta	Bizcocho	Relleno	Beneficio
Vienesas $\rightarrow x$	1 kg	0,250 kg	12,50 €
Real $\rightarrow y$	1 kg	0,500 kg	20,00 €
	Máx 150 kg	Máx 50 kg	

2º) La función objetivo a maximizar es:  $z = f(x, y) = 12,50x + 20,00y$ .

$$3^{\circ}) \text{ Las restricciones son: } \left. \begin{array}{l} x \geq 0, y \geq 0 \\ x + y \leq 150 \\ 0,250x + 0,500y \leq 50 \end{array} \right\}$$

4°) La región factible o solución del sistema anterior es:



5°) Al evaluar la función objetivo en los cuatro vértices de la región factible, obtenemos los siguientes valores:

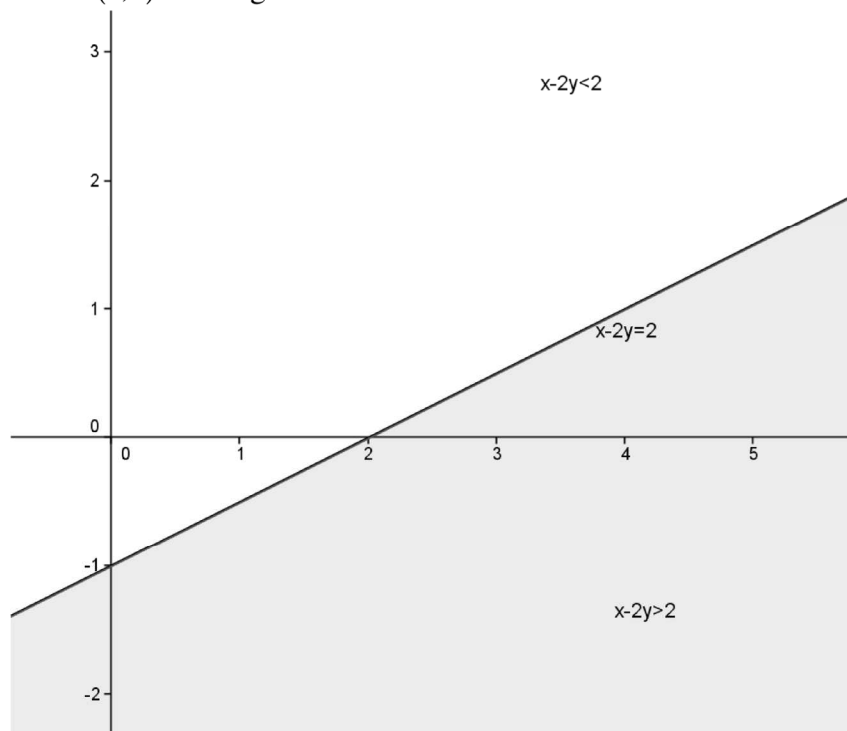
- En  $A=(0,100) \Rightarrow z(A) = f(0,100) = 12,50 \cdot 0 + 20,00 \cdot 100 = 2000 \text{ €} .$
- En  $B=(100,50) \Rightarrow z(B) = f(100,50) = 12,50 \cdot 100 + 20,00 \cdot 50 = 2250 \text{ €} .$
- En  $C=(150,0) \Rightarrow z(C) = f(150,0) = 12,50 \cdot 150 + 20,00 \cdot 0 = 1875 \text{ €} .$
- En  $D=(0,0) \Rightarrow z(D) = f(0,0) = 12,50 \cdot 0 + 20,00 \cdot 0 = 0 \text{ €} .$

Po tanto, la solución óptima para maximizar los beneficios es:  $B=(100,50)$ . Es decir, deben fabricarse 100 tartas vienasas y 50 tartas reales para obtener el beneficio máximo, que será de 2250 €.

## 2.2 Sistemas de inecuaciones lineales.

- De los cinco apartados seguidos en el ejemplo anterior, el único que hay que practicar es el apartado cuarto, relativo a la resolución del sistema de inecuaciones. Estudiaremos ahora esta cuestión paso a paso:
  - Una inecuación lineal con dos incógnitas.
  - Un sistema de dos inecuaciones lineales con dos incógnitas.
  - Un sistema de varias inecuaciones lineales con dos incógnitas.

- Para resolver una inecuación lineal con dos incógnitas, se representa gráficamente la recta asociada a la inecuación con signo igual (=). La solución de la inecuación es un semiplano, que se obtiene de dos formas:
  - Despejamos la incógnita “y” y consideramos como solución el semiplano superior si el símbolo después de despejar es  $>$  ó  $\geq$ . Por el contrario, consideramos como solución el semiplano inferior si el símbolo después de despejar es  $<$  ó  $\leq$ .
  - Otra forma consiste en sustituir en la inecuación por un punto cualquiera, por ejemplo por el origen  $O = (0,0)$ , y comprobamos si dicho punto verifica o no la desigualdad y decidimos así cuál es el semiplano correcto. Ejemplo: la inecuación  $x - 2y > 2$ , tiene como solución el semiplano inferior porque al despejar “y” obtenemos  $\frac{x-2}{2} > y$ . O bien, porque al sustituir el punto  $O = (0,0)$  la desigualdad obtenida sería falsa:  $0 > 2$ .



Nota: en este ejemplo, la recta no está incluida en la solución.

- Para resolver un sistema de dos inecuaciones lineales con dos incógnitas, se representan gráficamente las rectas asociadas a cada inecuación, considerando el signo igual (=). La solución del sistema es una de las cuatro porciones en que queda dividido el plano. Podemos obtener la solución de dos formas:
  - Se despeja la variable “y” en ambas inecuaciones y se intersecan los dos semiplanos obtenidos. Ya sabemos que se considera en cada inecuación el semiplano superior si el símbolo después de despejar es  $>$  ó  $\geq$ ; y por el contrario, se considera el semiplano inferior si el símbolo después de despejar es  $<$  ó  $\leq$ .
  - Otra forma consiste en tomar un punto de cada una de las cuatro porciones en que queda dividido el plano y sustituir en las dos inecuaciones. La región correcta será aquella en la que el punto elegido satisface simultáneamente las dos inecuaciones.

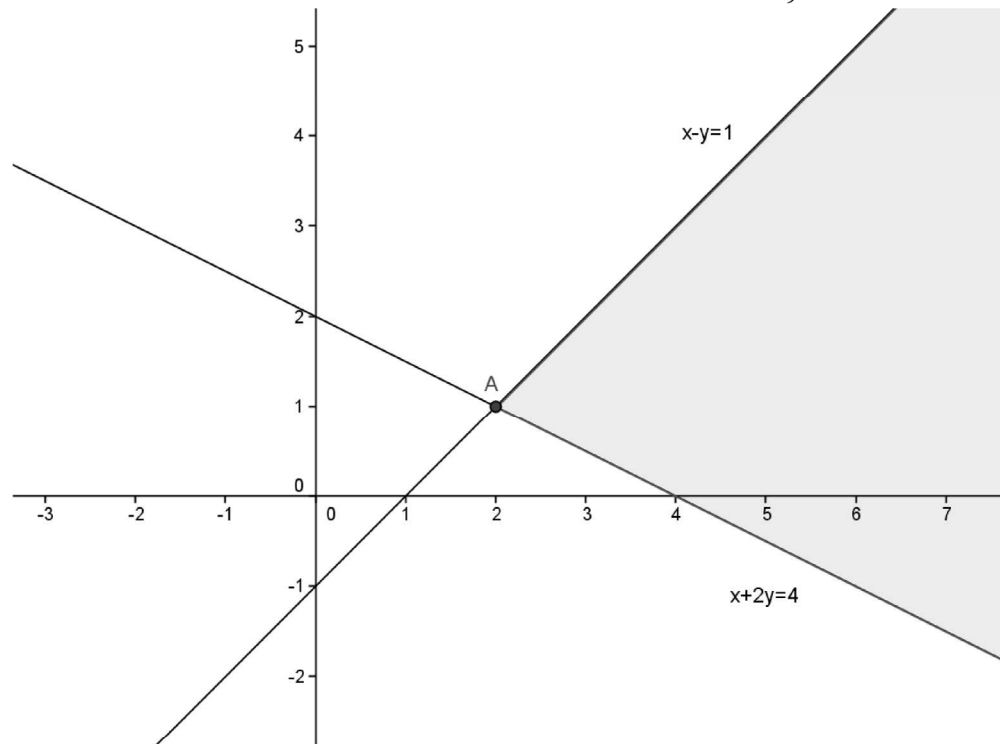
Ejemplo: El sistema de inecuaciones  $\left. \begin{array}{l} x - y \geq 1 \\ x + 2y \geq 4 \end{array} \right\}$  tiene como solución la

porción del plano señalada porque al despejar y obtenemos  $\left. \begin{array}{l} x - 1 \geq y \\ y \geq \frac{4 - x}{2} \end{array} \right\}$ . Es

decir, debajo de la primera recta y encima de la segunda recta.

También podemos seguir el otro procedimiento de “tantear puntos”:

- |  |                       |      |
|--|-----------------------|------|
| - En la parte de arriba, $P_1 = (2,3)$       | $2 - 3 \geq 1$ falso  | } NO |
|  | $2 + 6 \geq 4$ cierto |      |
| - En la parte de la derecha, $P_2 = (4,1)$   | $4 - 1 \geq 1$ cierto | } SI |
|  | $4 + 2 \geq 4$ cierto |      |
| - En la parte de abajo, $P_3 = (2,0)$        | $2 - 0 \geq 1$ cierto | } NO |
|  | $2 + 0 \geq 4$ falso  |      |
| - En la parte de la izquierda, $P_4 = (0,0)$ | $0 - 0 \geq 1$ falso  | } NO |
|  | $0 + 0 \geq 4$ falso  |      |



Nota: el símbolo inicial en ambas inecuaciones iniciales era  $\geq$ . Por tanto, las semirrectas (de la zona señalada) y el punto A están incluidos en la solución.

- Para resolver un sistema de varias inecuaciones lineales con dos incógnitas, se representan gráficamente todas las rectas asociadas a las inecuaciones. La solución del sistema es la intersección de todos los semiplanos solución de cada una de las inecuaciones. Es conveniente seguir los procedimientos estudiados en los casos anteriores. En los problemas de programación lineal normalmente nos encontraremos con la restricción inicial de que las variables

deben ser positivas ( $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ ). Esto significa que la solución del sistema se encuentra normalmente en el primer cuadrante.

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema de inecuaciones:

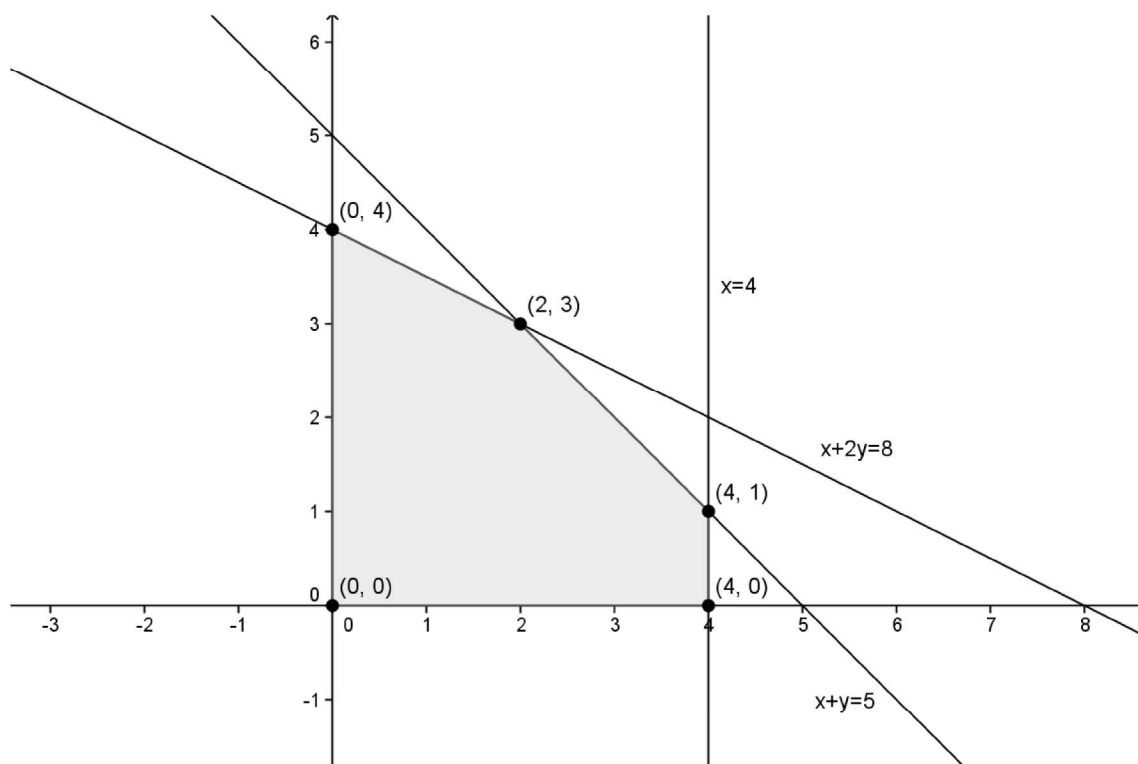
$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \\ x \leq 4 \\ x + y \leq 5 \\ x + 2y \leq 8 \end{array} \right\}$$

Las dos primeras inecuaciones ( $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ ) indican que estamos en el primer cuadrante. La inecuación ( $x \leq 4$ ) significa a la izquierda del 4.

La inecuación ( $x + y \leq 5$ ) tiene como solución la parte situada debajo de la recta  $x + y = 5$ . La inecuación ( $x + 2y \leq 8$ ) tiene como solución, igual que antes, la parte situada debajo de la recta  $x + 2y = 8$ .

Los vértices de la región solución (región factible) se obtienen resolviendo el sistema que determina cada pareja de rectas:

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \text{Sol: } (0,0) \\ \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x + 2y = 8 \end{array} \right\} \text{Sol: } (0,4). \\ \left. \begin{array}{l} x + y = 5 \\ x + 2y = 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \text{ por } -1 \Rightarrow \\ -x - y = -5 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} + \Rightarrow x = 2. \text{ Sol: } (2,3) \\ \left. \begin{array}{l} x + y = 5 \\ x = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 1. \text{ Sol: } (4,1) \\ \left. \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 0 \end{array} \right\} \text{Sol: } (4,0). \end{array}$$



### 2.3 El problema de la planificación de la producción.

- Se pretende planificar la producción de una empresa, teniendo en cuenta las materias primas disponibles y las horas de trabajo, con el objetivo de obtener el máximo beneficio.

Ejemplo: una fábrica produce sofás y tresillos de piel en sus talleres de carpintería y tapicería. Para un sofá se necesitan 3 horas de carpintería y 1 hora de tapicería, mientras que para hacer un tresillo se requiere 1 hora de carpintería y 2 horas de tapicería. En el taller de carpintería se dispone de un máximo de 90 horas de trabajo mensuales, y en el taller de tapicería el máximo es de 80 horas mensuales. Si los sofás se venden a 400 € y los tresillos a 600 €, ¿cuántos sofás y tresillos deben fabricarse cada mes para maximizar los ingresos?

1º) Indicamos las incógnitas y hacemos una tabla resumen:

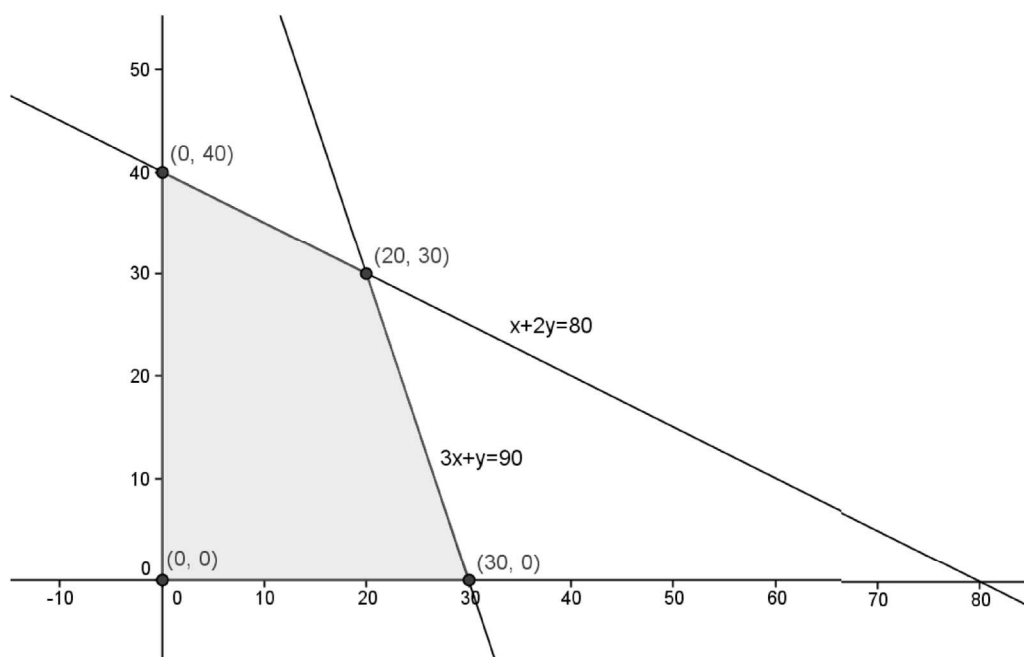
Tipo de mueble	Carpintería	Tapicería	Beneficio
Sofás $\rightarrow x$	3 h	1 h	400 €
Tresillos $\rightarrow y$	1 h	2 h	600 €
	Máx 90 h	Máx 80 h	

2º) La función objetivo es:  $z = f(x, y) = 400x + 600y$ .

3º) Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0, y \geq 0 \\ 3x + y \leq 90 \\ x + 2y \leq 80 \end{array} \right\}$$

4º) La región factible o solución del sistema está representada en esta figura:



5º) Al evaluar la función objetivo en los vértices obtenemos estos valores:

- En (0,0)  $\Rightarrow z = f(0,0) = 400 \cdot 0 + 600 \cdot 0 = 0 \text{€}$ .
- En (0,40)  $\Rightarrow z = f(0,40) = 400 \cdot 0 + 600 \cdot 40 = 24000 \text{€}$ .
- En (20,30)  $\Rightarrow z = f(20,30) = 400 \cdot 20 + 600 \cdot 30 = 26000 \text{€}$ .
- En (30,0)  $\Rightarrow z = f(30,0) = 400 \cdot 30 + 600 \cdot 0 = 12000 \text{€}$ .

Por tanto, la solución óptima para maximizar los beneficios es el punto: (20,30). Es decir, deben fabricarse 20 sofás y 30 tresillos, con lo que se obtienen ingresos mensuales de 26000 €.

## 2.4 El problema de la dieta.

- El problema de la dieta consiste en determinar qué alimentos deben incluirse en una dieta para garantizar una nutrición adecuada y, al mismo tiempo, minimizar el coste.

Ejemplo: se desea elaborar una dieta diaria para perros que satisfaga unas condiciones mínimas de contenido vitamínico: 2 mg de vitamina A, 3 mg de vitamina B, 30 mg de vitamina C y 2 mg de vitamina D. Para ello se van a mezclar dos tipos de piensos: cómplex (5 €/kg) y normal (3 €/kg), cuyos contenidos vitamínicos por kg se expresan en la siguiente tabla:

Tipo	A	B	C	D
Cómplex	1 mg	1 mg	20 mg	2 mg
Normal	1 mg	3 mg	7.5 mg	0 mg
	Min. 2 mg.	Min. 3 mg.	Min. 30 mg.	Min. 2 mg.

¿Cómo deben mezclarse ambos piensos para que el gasto sea mínimo?

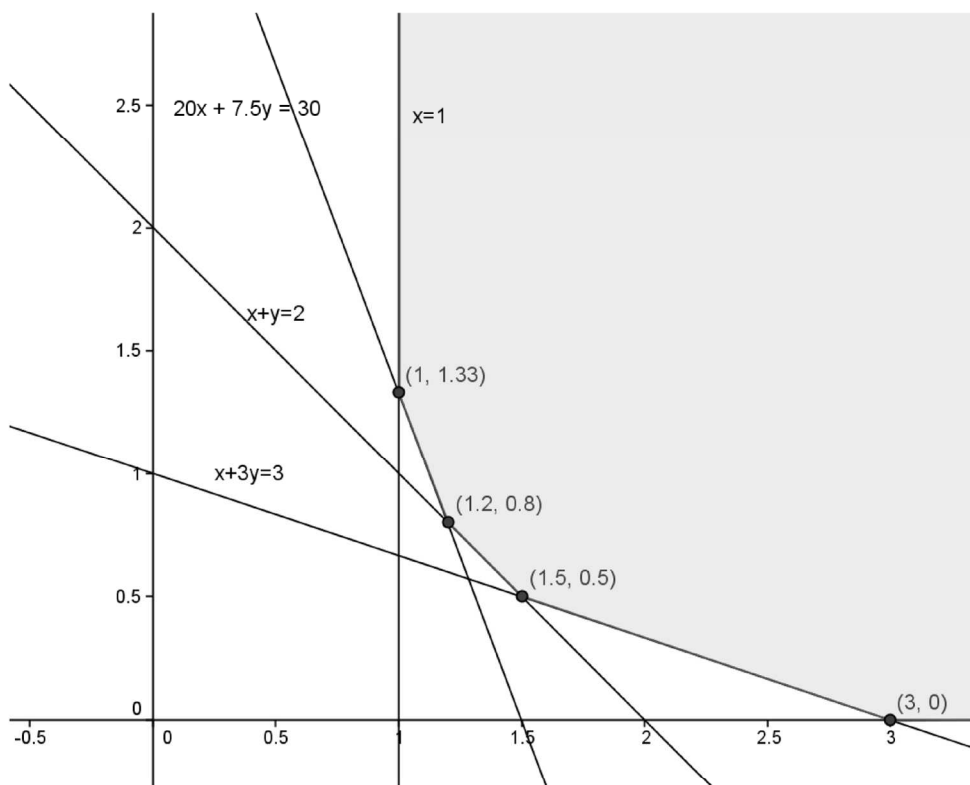
1º) Llamamos “x” e “y” a las cantidades (en kg) de pienso cómplex y normal, respectivamente.

2º) La función objetivo (a minimizar) es:  $z = f(x, y) = 5x + 3y$ .

3º) Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0, y \geq 0 \\ x + y \geq 2 \\ x + 3y \geq 3 \\ 20x + 7.5y \geq 30 \\ 2x \geq 2 \end{array} \right\}$$

4º) La región factible ahora es una región no acotada, ya que algunas restricciones son de tipo “mayor o igual”.



5º) Evaluamos la función objetivo en los vértices y obtenemos estos valores:

- En  $\left(1, \frac{4}{3}\right) \Rightarrow z = f\left(1, \frac{4}{3}\right) = 5 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{4}{3} = 9 \text{ €}.$
- En  $\left(\frac{6}{5}, \frac{4}{5}\right) \Rightarrow z = f\left(\frac{6}{5}, \frac{4}{5}\right) = 5 \cdot \frac{6}{5} + 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{42}{5} = 8.40 \text{ €}.$
- En  $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow z = f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = 5 \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ €}.$
- En  $(3,0) \Rightarrow z = f(3,0) = 5 \cdot 3 + 3 \cdot 0 = 15 \text{ €}.$

Por tanto, la solución óptima para minimizar los costes es  $\left(\frac{6}{5}, \frac{4}{5}\right)$ , es

decir, 1.2 kg del pienso cómplex y 0.8 kg del pienso normal. Con esta mezcla se satisfacen las necesidades vitamínicas y el coste mínimo es 8,40 € por 2 kg de mezcla, es decir, 4,20 € por kg.

## 2.5 El problema del transporte.

- El problema del transporte consiste en determinar cuántas unidades de un producto deben enviarse desde cada centro de origen hasta cada destino, de forma que se satisfagan las necesidades y se minimicen los costes de transporte.

El problema debe resolverse bajo las siguientes condiciones:

- Hay que satisfacer las demandas de cada destino.
- No debe excederse la capacidad de oferta de cada uno de los orígenes.

- La suma total de unidades que salen de los centros de origen debe ser igual a la suma total de unidades que llegan a los centros de destino.
- Deben minimizarse los costes totales del proceso de distribución.

Ejemplo: dos almacenes A y B deben distribuir fruta a tres tiendas de la ciudad. El almacén A dispone de 10 toneladas de fruta diarias y el B de 15 toneladas diarias, que se reparten en su totalidad. Las dos primeras tiendas necesitan diariamente 8 toneladas de fruta, mientras que la tercera necesita 9 toneladas diarias. El coste del transporte, desde cada almacén a cada tienda, viene reflejado en la siguiente tabla:

Almacén	Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3
A	10 €	15 €	20 €
B	15 €	10 €	10 €

Planifica el transporte para que el coste sea mínimo.

- 1º) Sea “x” la cantidad que irá del almacén A hacia la tienda 1. Y sea “y” la cantidad que irá del almacén A hacia la tienda 2. Tendremos entonces la siguiente tabla resumen:

Almacén	Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3	Total
A	x	y	10 - x - y	10
B	8 - x	8 - y	x + y - 1	15
Total	8	8	9	25

Observación: desde el almacén A a la tienda 3 se enviará la siguiente cantidad:  $9 - (10 - x - y) = x + y - 1$  ó  $15 - (8 - x + 8 - y) = x + y - 1$ .

- 2º) La función objetivo se obtiene multiplicando cantidades por costes:

$$z = f(x, y) = 10x + 15y + 20(10 - x - y) + 15(8 - x) + 10(8 - y) + 10(x + y - 1)$$

$$z = f(x, y) = 10x + 15y + 200 - 20x - 20y + 120 - 15x + 80 - 10y + 10x + 10y - 10$$

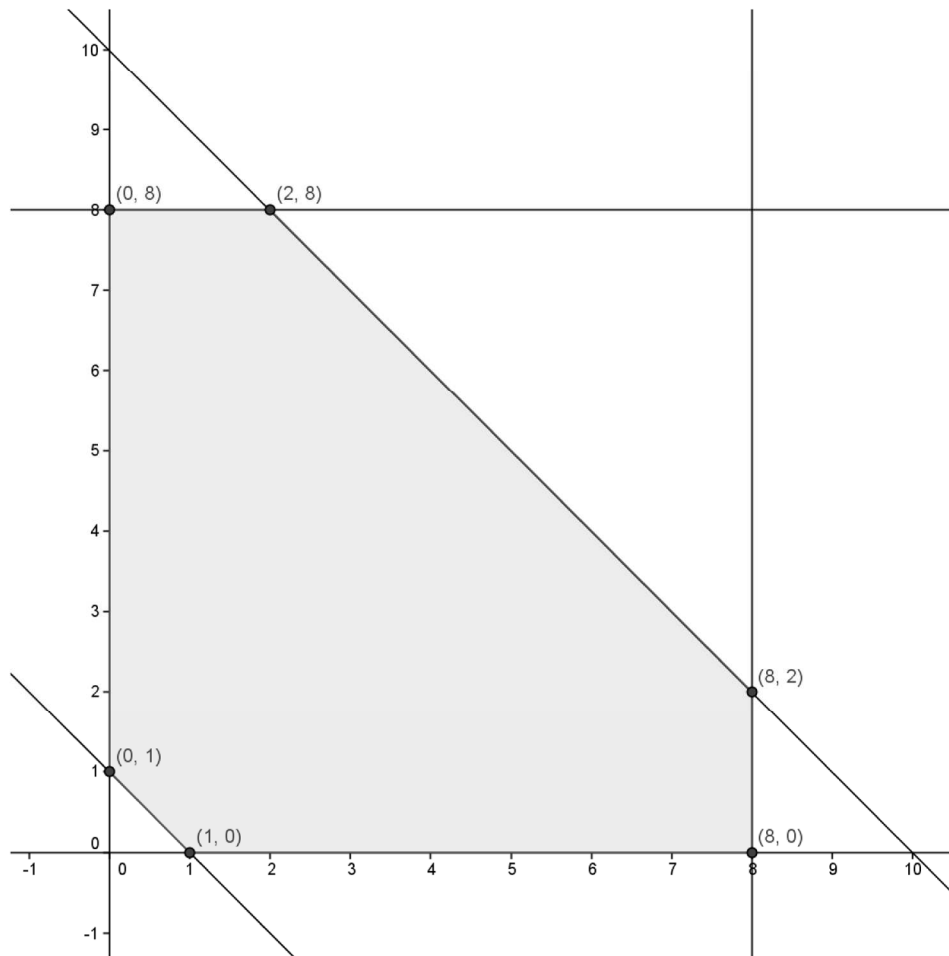
$$z = f(x, y) = 10x - 20x - 15x + 10x + 15y - 20y - 10y + 10y + 200 + 120 + 80 - 10$$

$$z = f(x, y) = -15x - 5y + 390$$

- 3º) Las restricciones para este tipo de problemas se basan en que todas las cantidades transportadas no pueden ser negativas (positivas o cero):

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0, y \geq 0 \\ 10 - x - y \geq 0 \\ 8 - x \geq 0 \\ 8 - y \geq 0 \\ x + y - 1 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 0, y \geq 0 \\ x + y \leq 10 \\ x \leq 8 \\ y \leq 8 \\ x + y \geq 1 \end{array} \right\}$$

4º) La región factible está representada gráficamente en la siguiente figura:



5º) Evaluamos la función objetivo en los vértices de la región factible:

- En  $(1,0) \Rightarrow z = f(1,0) = -15 \cdot 1 - 5 \cdot 0 + 390 = 375 \text{ €}$ .
- En  $(0,1) \Rightarrow z = f(0,1) = -15 \cdot 0 - 5 \cdot 1 + 390 = 385 \text{ €}$ .
- En  $(0,8) \Rightarrow z = f(0,8) = -15 \cdot 0 - 5 \cdot 8 + 390 = 350 \text{ €}$ .
- En  $(2,8) \Rightarrow z = f(2,8) = -15 \cdot 2 - 5 \cdot 8 + 390 = 320 \text{ €}$ .
- En  $(8,2) \Rightarrow z = f(8,2) = -15 \cdot 8 - 5 \cdot 2 + 390 = 260 \text{ €}$ .
- En  $(8,0) \Rightarrow z = f(8,0) = -15 \cdot 8 - 5 \cdot 0 + 390 = 270 \text{ €}$ .

Por tanto, la solución óptima para minimizar los costes de transporte tiene lugar en el punto  $(8,2)$ . El coste mínimo sería de 260 € y podemos

Almacén	Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3	Total
A	8 (80 €)	2 (30 €)	0	10
B	0	6 (60 €)	9 (90 €)	15
Total	8	8	9	25