Tema 7: Integrales.

7.1 Función Primitiva.

- Una función F(x) es primitiva de otra función f(x) cuando $F'(x) = f(x)$. Por ejemplo $F(x) = x^2$ es primitiva de f(x) = 2x. Otra primitiva de f(x) = 2x podría ser $F(x) = x^2 + 5$, o en general, $F(x) = x^2 + C$, donde C es una constante. Por lo tanto una función f(x) tiene infinitas primitivas. Al conjunto de todas las funciones primitivas se le llama **integral indefinida** y se representa de la siguiente forma: $\int f(x)\,dx$. Es decir: $\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow F'(x) = f(x)}$.

  Ejemplos: $\int 3x^2 dx = x^3 + C$, $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$, $\int \frac{1}{x} dx = Lx + C$.

7.2 Propiedades de la integral indefinida:

- La integral de la suma es la suma de las integrales:

  $$\boxed{\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx}$$

  Demostración: al derivar el segundo miembro debe resultar $f(x) + g(x)$.

  Por definición $\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.

  $$\left(\int f(x)dx + \int g(x)dx\right)' = \left(\int f(x)dx\right)' + \left(\int g(x)dx\right)' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

  Ejemplo: $\int 2x + \cos x dx = \int 2x dx + \int \cos x dx = x^2 + \operatorname{sen} x + C$

- Las constantes o números que multiplican una función salen fuera de la integral.

  $$\boxed{\int k \bullet f(x)dx = k \bullet \int f(x)dx}$$

  Demostración: queremos demostrar que si derivamos el segundo miembro nos tiene que salir $k \bullet f(x)$.

  $$\left(k \bullet \int f(x)dx\right)' = k \bullet \left(\int f(x)dx\right)' = k \bullet F'(x) = k \bullet f(x)$$

  Ejemplo: $\int 5 \bullet \frac{1}{x} dx = 5 \bullet \int \frac{1}{x} dx = 5 \bullet Lx + C$

  Ejemplo: $\int \operatorname{sen} 4x dx = \int \frac{4 \bullet \operatorname{sen} 4x}{4} dx = \frac{1}{4} \int 4 \bullet \operatorname{sen} 4x dx = \frac{1}{4}(-\cos 4x) + C$

7.3 Integrales inmediatas.

- Teniendo en cuenta la tabla de derivadas inmediatas (y también la tabla de derivadas compuestas), surgen de forma natural las siguientes fórmulas de la izquierda llamadas integrales inmediatas así como las fórmulas de la derecha que son las mismas pero aplicadas a funciones compuestas en las que aparece también la derivada dentro de la integral.

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{para } n \neq -1$	$\int f(x)^n \bullet f'(x) dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \text{Ln}x + C$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \text{Ln}f(x) + C$
$\int \frac{1}{x} \log_a e \, dx = \log_a x + C$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \log_a e \, dx = \log_a f(x) + C$
$\int a^x \text{Ln}a \, dx = a^x + C$	$\int a^{f(x)} f'(x) \text{Ln}a \, dx = a^{f(x)} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + C$
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$	$\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx = \sqrt{f(x)} + C$
$\int \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} dx = \sqrt[n]{x} + C$	$\int \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}} dx = \sqrt[n]{f(x)} + C$
$\int \text{sen}\, x \, dx = -\cos x + C$	$\int \text{sen}\, f(x) \bullet f'(x) dx = -\cos f(x) + C$
$\int \cos x \, dx = \text{sen}\, x + C$	$\int \cos f(x) \bullet f'(x) dx = \text{sen}\, f(x) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \text{tg}\, x + C$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \text{tg}\, f(x) + C$
$\int \frac{-1}{\text{sen}^2 x} dx = \cot g x + C$	$\int \frac{-f'(x)}{\text{sen}^2 f(x)} dx = \cot g f(x) + C$
$\int \frac{\text{sen}\, x}{\cos^2 x} dx = \sec x + C$	$\int \frac{\text{sen}\, f(x)}{\cos^2 f(x)} f'(x) dx = \sec f(x) + C$
$\int \frac{-\cos x}{\text{sen}^2 x} dx = \text{cosec}\, x + C$	$\int \frac{-\cos f(x)}{\text{sen}^2 f(x)} f'(x) dx = \text{cosec}\, f(x) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{arcsen}\, x + C$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx = \text{arcsen}\, f(x) + C$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + C$	$\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx = \arccos f(x) + C$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{arctg}\, x + C$	$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} dx = \text{arctg}\, f(x) + C$

7.4 Integrales por descomposición.

- Este método de integración consiste en aplicar las propiedades de la integral (linealidad de la integral) y las integrales inmediatas anteriores. Sólo es posible aplicarlo en ocasiones en las que no aparecen productos ni cocientes y las integrales son sencillas. Ejemplos:
  - $\int (x^3 - 2x^2 + x - 1)dx = \int x^3 dx - 2\int x^2 dx + \int x dx - \int 1 dx =$

    $= \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + C$
  - $\int \left(-2\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x} - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} \right) dx = -2\int x^{\frac{1}{3}} dx + 3\int x^{\frac{1}{2}} dx - 3\int \frac{1}{x} dx + 2\int x^{-3} dx =$

    $= -2\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + 3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 3Lx + 2\frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^4} + 2\sqrt{x^3} - 3Lx - \frac{1}{x^2} + C$
  - $\int \left(\frac{-2x^2 - 5x + 6}{x - 1} \right) dx$ →Hacemos en primer lugar la división, que en este caso puede realizarse por el método de Ruffini:

	-2	-5	$+6$
1		-2	-7
	-2	-7	-1

    A continuación expresamos el dividendo como divisor por cociente más el resto:

    $\int \left(\frac{(x-1)(-2x-7)-1}{x-1} \right) dx$ y ahora al separar en suma de dos integrales, tendremos integrales inmediatas.

    $\int \left(\frac{-2x^2 - 5x + 6}{x - 1} \right) dx = \int \left(\frac{(x-1)(-2x-7)-1}{x-1} \right) dx =$

    $= \int (-2x - 7)dx - \int \frac{1}{x-1} dx = -2\int x dx - 7\int 1 dx - \int \frac{1}{x-1} dx =$

    $= -2\frac{x^2}{2} - 7x - L|x - 1| + C$

    (se escribe valor absoluto para que el logaritmo tenga sentido).

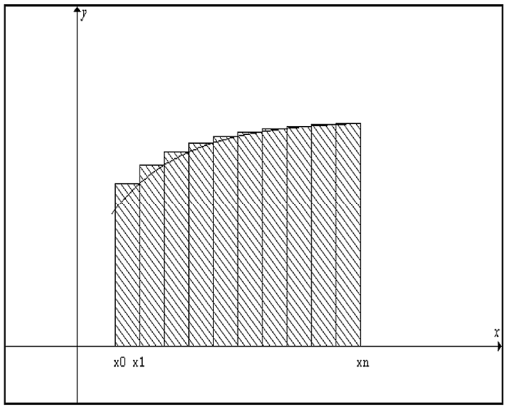
7.5 Concepto de integral definida.

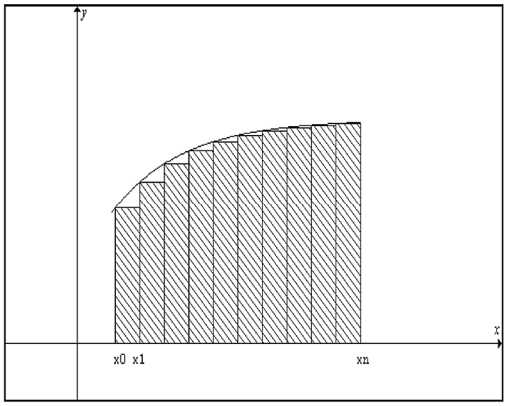
- Sea f una función continua definida en [a,b]. Supongamos que dividimos este intervalo en n subintervalos: $[a,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$,....., $[x_{n-2},x_{n-1}]$, $[x_{n-1},b]$. Podríamos calcular la suma de todas las áreas de los rectángulos superiores e inferiores y obtendríamos:

  $S_{sup}(f) = M_1(x_1-x_0)+ M_2(x_2-x_1)+ M_3(x_3-x_2)+..... +M_n(x_n-x_{n-1})$ siendo M_1, M_2, etc., los máximos de f en cada uno de los subintervalos.

$S_{inf}(f) = m_1(x_1-x_0)+ m_2(x_2-x_1)+ m_3(x_3-x_2)+.....+m_n(x_n-x_{n-1})$ siendo m_1, m_2, etc., los mínimos de f en cada uno de los subintervalos.
Lógicamente S_{inf} < Área de f(x) < $S_{sup.}$

Cuando n tiende a infinito, es decir, cuando aumenta indefinidamente el número de subintervalos tendremos:

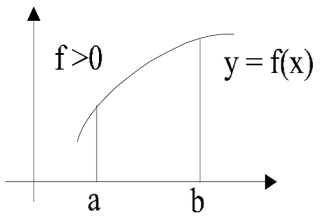
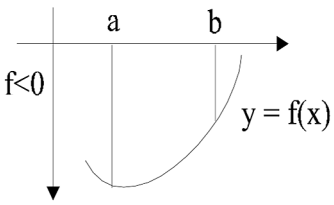
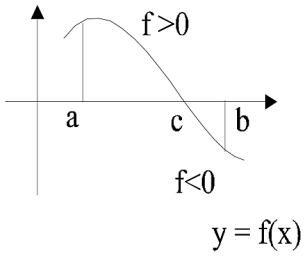




$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_{inf} = \lim_{n\to\infty} S_{sup} = \text{Area de } f(x) = \text{Integral definida} = \int_a^b f(x)dx}$$

Si la función está por encima del eje de abscisas, el área y la integral son exactamente lo mismo, por definición. Pero si la función está por debajo del eje x la amplitud de los intervalos sigue siendo positiva, pero los números M_i y m_i son negativos, por lo que la suma dará una cantidad negativa y por tanto el resultado de la integral será negativo. En este caso, para obtener el área hay que cambiar de signo o bien tomar el valor absoluto de la integral.

Es decir, la integral definida es "casi" igual que el área, sólo que son opuestas cuando la función es negativa. Si una curva cruza el eje x tendrá una parte positiva y otra negativa. Si queremos calcular el área total debemos calcular el punto de corte con el eje x, y calcular el área de la parte de arriba, que coincidirá con la integral, y el área de la parte de abajo, que será opuesta a la integral. En todo caso el área total será la suma de todas las integrales en valor absoluto.

		
Si f(x) ≥ 0 en [a,b] $\text{Área}=\int_a^b f(x)\,dx$	Si f(x) ≤ 0 en [a,b] $\text{Área}=-\int_a^b f(x)\,dx$	En general $\text{Área}=\int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$

7.6 Propiedades de la integral definida.

1. $\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$. Siendo $c \in [a,b]$

2. $\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}$

3. $\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}$

4. $\boxed{\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx}$

5. $\boxed{\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx}$. Siendo k un número real

7.7 Regla de Barrow.

- $\boxed{\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)}$. Siendo G(x) una primitiva de la función f(x).

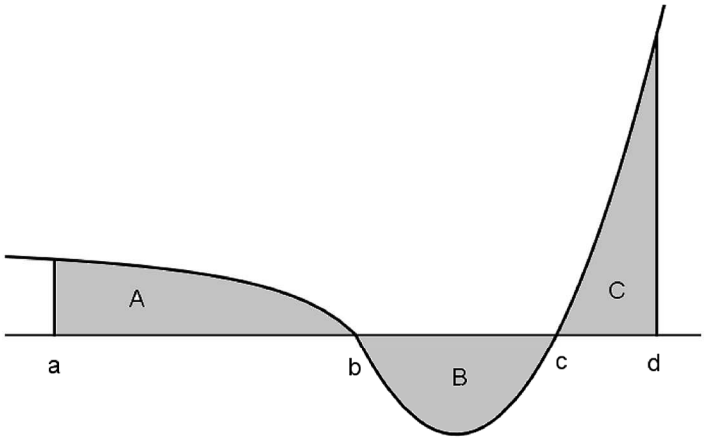
  Demostración:

  La primitiva F(x) es la que definimos en el teorema fundamental del cálculo integral y la otra primitiva G(x) se supone que ya ha sido calculada a partir de la integral indefinida. Sabemos que si F(x) y G(x) son dos primitivas de f(x), entonces se diferencian en una constante. $F(x) = \int_a^x f(t)dt = G(x) + C$

  Si x=a entonces $F(a) = 0 = G(a) + C$ luego $G(a) = -C$, por lo tanto:

  $F(b) = \int_a^b f(t)dt = G(b) + C = G(b) - G(a)$. Luego: $\boxed{\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)}$

7.8 Área encerrada por una función y el eje x.



$$\textbf{Área=A+B+C=}\int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx$$

Ejemplo: Halla el área limitada por la función $f(x) = x^2 - 6x + 5$ y el eje OX en el intervalo [0,5].

Puntos de corte con el eje OX:

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

Hay dos recintos: I=[0,1]; II=[1,5]

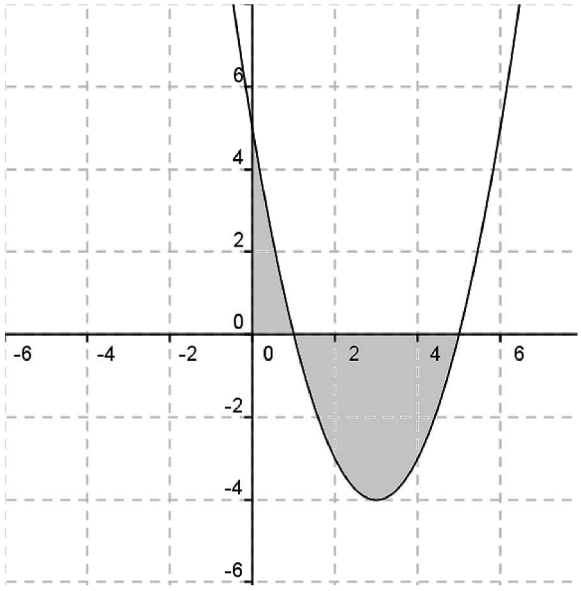
$$G(x) = \int (x^2 - 6x + 5)dx = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x$$

$$G(0) = 0 \;\; ; \;\; G(1) = \frac{7}{3} \;\; ; \;\; G(5) = \frac{-25}{3}$$

$$\text{Área del recinto I} = \left| G(1) - G(0) \right| = \frac{7}{3}$$

$$\text{Área del recinto II} = \left| G(5) - G(1) \right| = \frac{32}{3}$$

$$\text{Área total} = \frac{7}{3} + \frac{32}{3} = \frac{39}{3} = 13\,u^2$$



También puede hacerse así:

$$\text{Área total}=\int_0^1 \left(x^2-6x+5\right)dx-\int_1^5 \left(x^2-6x+5\right)dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+5x\right]_0^1-\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+5x\right]_1^5=$$

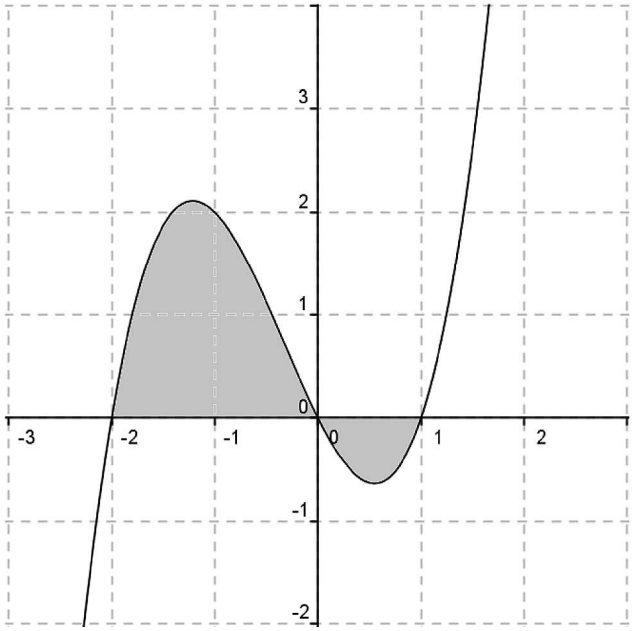
$$=\left(\frac{1}{3}-3+5\right)-\left(\frac{0}{3}-0+0\right)-\left[\left(\frac{125}{3}-75+25\right)-\left(\frac{1}{3}-3+5\right)\right]=$$

$$=\frac{7}{3}-0-\left[-\frac{25}{3}-\frac{7}{3}\right]=\frac{7}{3}+\frac{25}{3}+\frac{7}{3}=\frac{39}{3}=13u^2$$

Ejemplo: Halla el área limitada por la función $y=x^3+x^2-2x$ y el eje x.

Puntos de corte con el eje x:

$$x^3+x^2-2x=0 \quad \rightarrow \quad x\left(x^2+x-2\right)=0\begin{cases} x_1=0 \\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases} x_2=1 \\ x_3=-2 \end{cases} \end{cases}$$



Hay, entonces, dos recintos: $1^o[-2,0]$; $2^o[0,1]$

$$G(x)=\int\left(x^3+x^2-2x\right)dx=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2$$

$$G(-2)=-\frac{8}{3} \;;\quad G(0)=0 \;;\quad G(1)=\frac{-5}{12}$$

$$\text{Área del recinto } 1^o = \left|G(0)-G(-2)\right|=\frac{8}{3}$$

$$\text{Área del recinto } 2^o = \left|G(1)-G(0)\right|=\frac{5}{12}$$

$$\text{Área total}=\frac{8}{3}+\frac{5}{12}=\frac{37}{12}u^2$$

También puede hacerse así:

$$\text{Área total}=\int_{-2}^0 \left(x^3+x^2-2x\right)dx-\int_0^1 \left(x^3+x^2-2x\right)dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-2}^0-\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^1=$$

$$=\left(\frac{0}{4}+\frac{0}{3}-0\right)-\left(\frac{16}{4}+\frac{-8}{3}-4\right)-\left[\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right)-\left(\frac{0}{4}+\frac{0}{3}-0\right)\right]=$$

$$= 0 - \frac{-8}{3} - \left[-\frac{5}{12} - 0 \right] = 0 + \frac{8}{3} + \frac{5}{12} + 0 = \frac{37}{12} u^2$$

7.9 Área encerrada por dos funciones.

Sean f y g dos funciones continuas en [a,b]. Supongamos que sus gráficas se cortan en [a,b] en los puntos: $x = x_1$, $x = x_2$, ..., $x = x_n$.

$$\boxed{\text{Área} = \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)| dx + \int_{x_2}^{x_3} |f(x) - g(x)| dx + \ldots\ldots\ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} |f(x) - g(x)| dx}$$

También puede hacerse sin utilizar valores absolutos, considerando siempre en cada intervalo la diferencia entre la función superior menos la función inferior. Ejemplo: Halla el área del recinto limitado por las funciones:
$y = x^2 - x$ e $y = x + 3$.
Vemos en la gráfica que se cortan en $(-1,2)$ y en $(3,6)$. Comprobémoslo:

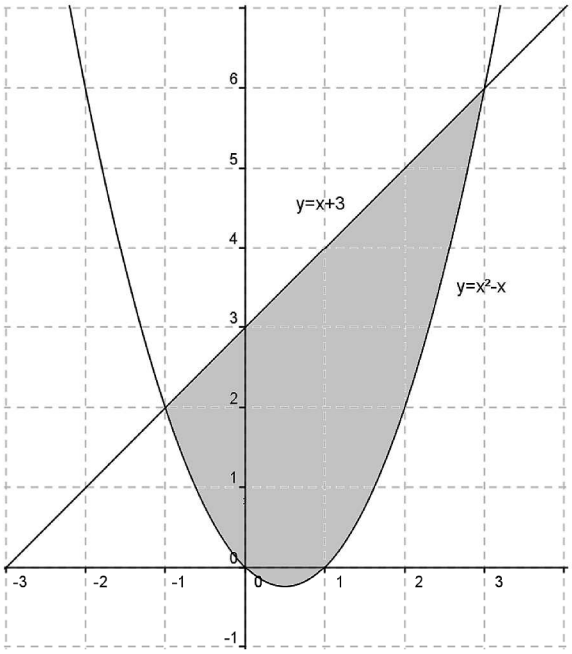
$$x^2 - x = x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Sólo hay un recinto: $[-1,3]$

$$G(x) = \int (x^2 - 2x - 3) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$$

$$G(-1) = \frac{5}{3} \quad ; \quad G(3) = -9$$

$$\text{Área} = |G(3) - G(-1)| = \frac{32}{3} u^2$$



También puede hacerse así:

$$\text{Área} = \int_{-1}^{3} [(x+3) - (x^2 - x)] dx =$$

$$= \int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3) dx = = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-1}^{3} =$$

$$\left(-\frac{27}{3} + 9 + 9 \right) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3 \right) = 9 + \frac{5}{3} = \frac{32}{3} u^2$$

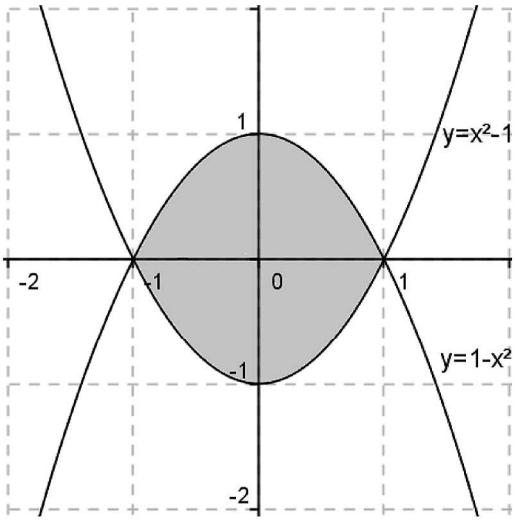
Ejemplo: Halla el área del recinto limitado por las funciones:
$y = x^2 - 1$ e $y = 1 - x^2$.

$$x^2 - 1 = 1 - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

$$G(x)=\int\left(2x^2-2\right)dx=\frac{2x^3}{3}-2x$$

$$G(-1)=\frac{4}{3}\ ;\quad G(1)=\frac{-4}{3}$$

$$\text{Área}=\left|G(1)-G(-1)\right|=\frac{8}{3}u^2$$



Otra forma:

$$\text{Área}=\int_{-1}^{1}\left[\left(1-x^2\right)-\left(x^2-1\right)\right]dx=$$

$$\int_{-1}^{1}\left(-2x^2+2\right)dx=$$

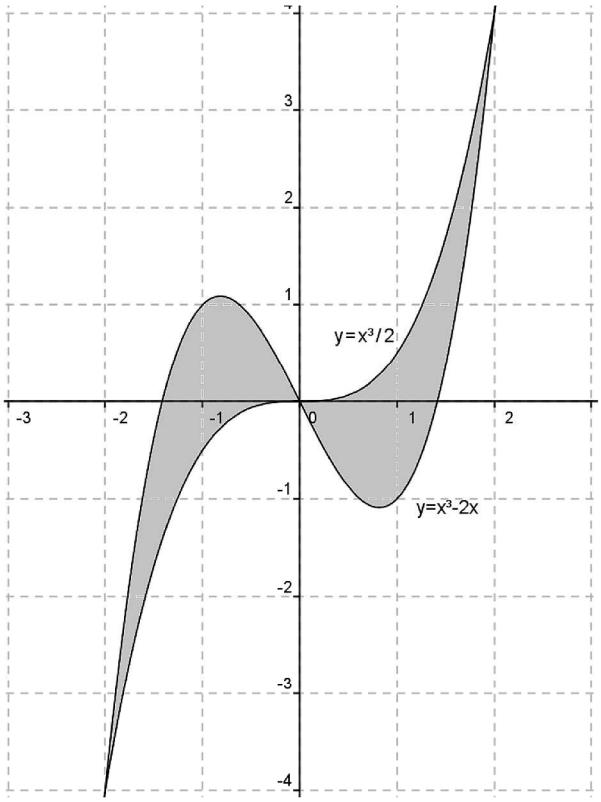
$$=\left[-\frac{2x^3}{3}+2x\right]_{-1}^{1}=\left(-\frac{2}{3}+2\right)-\left(\frac{2}{3}-2\right)=$$

$$-\frac{2}{3}+2-\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}u^2$$

Ejemplo: Halla el área del recinto limitado por las funciones:

$$y=x^3-2x\quad\text{e}\quad y=\frac{x^3}{2}$$

$$x^3-2x=\frac{x^3}{2}\Rightarrow\frac{x^3}{2}-2x=0\Rightarrow x^3-4x=0\Rightarrow x\left(x^2-4\right)=0\left[\begin{array}{l}x_1=0\\x_2=-2\\x_3=2\end{array}\right.$$



Hay dos recintos: 1º$[-2,0]$; 2º$[0,2]$

$$G(x)=\int\left(\frac{x^3}{2}-2x\right)dx=\frac{x^4}{8}-x^2$$

$$G(-2)=-2\ ;\quad G(0)=0\ ;\quad G(2)=-2$$

$$\text{Área recinto 1º}=\left|G(0)-G(-2)\right|=2$$

$$\text{Área recinto 2º}=\left|G(2)-G(0)\right|=2$$

Área total = 2 + 2 = 4 u^2.

Otra forma:

$$\int_{-2}^{0}\left[\left(x^3-2x\right)-\left(\frac{x^3}{2}\right)\right]dx+\int_{0}^{2}\left[\left(\frac{x^3}{2}\right)-\left(x^3-2x\right)\right]dx=$$

$$\int_{-2}^{0}\left(\frac{x^3}{2}-2x\right)dx+\int_{0}^{2}\left(-\frac{x^3}{2}+2x\right)dx=\left[\frac{x^4}{8}-x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{x^4}{8}+x^2\right]_{0}^{2}=$$

$$=\left[\left(\frac{0}{8}-0\right)-\left(\frac{16}{8}-4\right)\right]+\left[\left(-\frac{16}{8}+4\right)-\left(-\frac{0}{8}+0\right)\right]=0+2+2-0=4u^2$$