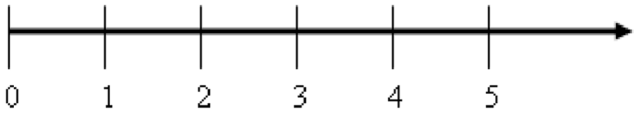
Tema 1: Números naturales.

1.1 Números naturales: $\mathbb{N}$.

- Desde siempre a lo largo de la historia de la humanidad, el ser humano ha necesitado contar el tiempo, animales, árboles, comida o cualquier otra cosa. Para responder a esta necesidad de contar unidades completas se utilizan los números naturales. Se llaman números naturales para indicar que son números sencillos y pegados a la realidad, que están en la naturaleza, o dicho de otra forma, existen de forma natural. El conjunto de los números naturales es pues $\mathbb{N}$= {1, 2, 3, 4, 5, 6, ·····}. Claramente es un conjunto infinito y podemos representarlo gráficamente como un conjunto de puntos o divisiones de una semirrecta en la que se ha elegido el origen de referencia donde se sitúa el número 0 y la medida unidad para irnos desplazando hacia la derecha.

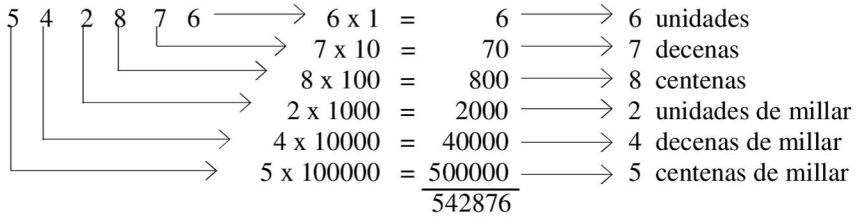


En este conjunto es posible contar, sumar y multiplicar. Sin embargo, la resta no siempre es posible realizarla ($3-6=?$ no sería un número natural), ni tampoco se puede dividir si la división no es exacta (5:2=? no sabemos).
Una vez que tenemos los números naturales representados en la recta, podemos definir el orden de forma muy sencilla: un número natural es mayor que otro si está situado a su derecha, 2<5 porque el 5 está a la derecha.

1.2 El Sistema de numeración decimal.

- Es la forma que utilizamos para expresar los números naturales. Las cantidades se representan utilizando como base el número diez (tenemos diez dedos), o sea que se utilizan diez símbolos o dígitos diferentes: cero, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho y nueve (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9). Y combinando estos dígitos y colocándolos adecuadamente, podemos representar con ellos cualquier número natural.
Es un sistema de numeración posicional porque cada cifra vale según el lugar que ocupa y cada número es en realidad una suma de potencias de 10.

Veámoslo, ejemplo: 542876.



542876 = 500000 + 40000 + 2000 + 800 + 70 + 6.
542876 = 5 x 100000 + 4 x 10000 + 2 x 1000 + 8 x 100 + 7 x 10 + 6 x 1.
542876= $5\cdot10^5 + 4\cdot10^4 + 2\cdot10^3 + 8\cdot10^2 + 7\cdot10^1 + 6\cdot10^0$.

1.3 Números grandes. Redondeo.

- Para escribir y manejar números muy grandes, se estructuran sus cifras en grupos de tres mediante un punto, y además, cada grupo de 6 cifras lleva aparejado un subíndice 1, 2, 3,…, que indica millones, billones, trillones, etc. Ejemplos:
  $7_1$458.876 . Siete millones etc.
  $3_2$698.834$_1$321.205. Tres billones, etc.
- Al trabajar con números muy grandes, se suelen utilizar aproximaciones, que pueden ser de tres tipos:
  Aproximación por defecto. Son números menores que el número de partida, de forma que las últimas cifras se han eliminado y se han convertido en ceros. En los números anteriores, por ejemplo serían aproximaciones por defecto: $7_1$458.000 aproximando a los miles y $3_2$698.834$_1$000.000 que sería una aproximación a los millones.
- Aproximación por exceso. Son números mayores que el número que se aproxima. Una determinada cifra se aumenta una unidad y las cifras restantes de la derecha se convierten en ceros. En los números anteriores, serían aproximaciones por exceso: $7_1$459.000 aproximando a los miles y $3_2$698.835$_1$000.000 que sería una aproximación a los millones.
- Redondeo. Es la mejor de las opciones de aproximación. Consiste en tomar algunas cifras y mantener igual la cifra a considerar si la cifra siguiente es menor que 5 y por el contrario sumar 1 si la cifra siguiente es igual o mayor que 5. En $7_1$458.876, por ejemplo $7_1$000.000 sería un redondeo a los millones, $7_1$500.000 sería un redondeo a las centenas de millar y $7_1$459.000 sería un redondeo a los miles. Análogamente en $3_2$698.834$_1$321.205, un redondeo a las centenas de billón sería $3_2$700.000$_1$000.000 y un redondeo a los millones sería $3_2$698.834$_1$000.000.

1.4 Operaciones: suma, resta y multiplicación.

- Para sumar dos o más números naturales, se colocan manteniendo las columnas de igual orden, unidades, decenas, centenas, etc., y se suman en cada columna todos los dígitos. Como sabemos, hay que tener en cuenta que por cada vez que se supere la decena hay que pasar una unidad al orden superior de la izquierda:

$$\begin{array}{r} 3\,1\,4\,2\,0 \\ +\ 5\,6\,8\,0\,0 \\ 1\,2\,5\,0\,5\,5 \\ \hline 2\,1\,3\,2\,7\,5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\,9\,0\,4\,3 \\ +\ 3\,7\,2\,6\,0 \\ 1\,5\,6\,0\,0 \\ \hline 9\,1\,9\,0\,3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8\,0\,6\,4\,0\,0 \\ +\ 7\,4\,2\,5\,0 \\ 6\,6\,0\,1\,5 \\ \hline 9\,4\,6\,6\,6\,5 \end{array}$$

- Para restar dos números naturales, situamos el mayor de ellos arriba y mantenemos las columnas de igual orden, unidades, decenas, centenas, etc., y se resta columna a columna desde la derecha hacia la izquierda. Hay que tener en cuenta que cada vez que la cifra superior sea menor que la cifra inferior, se le suma 10 a la cifra superior antes de restar, y después de restar hay que pasar una unidad al sustraendo de la izquierda de orden superior. Ejemplos:

$$\begin{array}{r} 70340 \\ -\ 9645 \\ \hline 60695 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10000043 \\ -\ 746500 \\ \hline 2535443 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 86402 \\ -\ 77930 \\ \hline 8472 \end{array}$$

- Para multiplicar dos números naturales, se multiplica cada cifra del multiplicador por cada una de las cifras del multiplicando, anotándose los resultados en columnas de igual orden (unidades, decenas, centenas, etc., es por este motivo que al empezar otra cifra nos situamos un lugar más a la izquierda) y cada vez que se supere la cantidad 10, 20, 30, etc., hay que pasar 1, 2, 3,…, unidades respectivamente, al orden superior de la izquierda. Para finalizar se realiza la suma de los dígitos en cada una de las columnas de resultados. Ejemplos:

$$\begin{array}{r} 3827 \\ \times\ 431 \\ \hline 3827 \\ 11481 \\ 15308 \\ \hline 1649437 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 43943 \\ \times\ 485 \\ \hline 219715 \\ 35154 \\ 175772 \\ \hline 21312355 \end{array}$$

1.5 <u>División de números naturales.</u>

- La división entre dos números naturales no siempre es un número natural: 6:3=2 sin problemas, y sin embargo no podemos hacer 6:5=?
  Lo que sí es siempre posible es la división entera (sin decimales).
  Supongamos que dividimos dos números naturales D por d y resulta un cociente c y un resto r:

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & c \end{array} \qquad \text{Ejemplo:} \qquad \begin{array}{l|l} 17 & 5 \\ \hline 2 & 3 \end{array}$$

  Esta división entera cumple el teorema de la división, que dice que el dividendo es igual al divisor por el cociente más el resto. Es decir:
  $\boxed{D = d \bullet c + r}$. ¿Por qué?
  Porque la división consiste en contar las veces que un número está contenido en otro, o sea, restamos sucesivamente el divisor (tantas veces como indica el cociente) hasta que no se pueda seguir restando y quede un resto. En el ejemplo anterior sería: $17 - 5 - 5 - 5 = 2 \Rightarrow 17 - 3 \bullet 5 = 2 \Rightarrow 17 = 3 \bullet 5 + 2$.

  Si el resto es 0, decimos que la división es exacta:

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline 0 & c \end{array} \qquad \text{Ejemplo:} \qquad \begin{array}{l|l} 15 & 5 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$$

- Para realizar el algoritmo de la división debemos tener en cuenta la idea del apartado anterior, es decir, hay que restar al dividendo el mayor múltiplo del divisor que más se acerque, sin pasarse, al dividendo. Para ello vamos realizando el proceso en fases, manteniendo el orden de las columnas en el dividendo y considerando la cifra o grupo de cifras a la izquierda del dividendo que pueden englobar al divisor. Entonces se divide sólo esa cifra o grupo de cifras, se multiplica el resultado obtenido por el divisor y se resta al dividendo. Continuamos añadiendo o "bajando" una nueva cifra y repitiendo el proceso de multiplicar por el divisor para restárselo al dividendo hasta que no quede ninguna cifra en el dividendo, y el resto sea menor que el divisor.

  Ejemplos:

```
   5  0  1  5  6        | 2  1
 - 4  2                 |------
   0  8  1              | 2  3  8  8
   -  6  3
      1  8  5
   -  1  6  8
      0  1  7  6
      -  1  6  8
         0  0  8
```

```
   1  7  6  8  5        | 4  2
 - 1  6  8              |------
   0  0  8  8           | 4  2  1
      -  8  4
         0  4  5
         -  4  2
            0  3
```

1.6 Operaciones combinadas. Jerarquía de las operaciones.

- En las operaciones combinadas con números naturales hay que respetar la jerarquía de las operaciones siguiendo este orden: paréntesis interiores, paréntesis exteriores, potencias o raíces, productos y cocientes y por último sumas y restas. ¿Pero, por qué razón hay que utilizar este orden jerárquico? Lo pedemos ver en el siguiente ejemplo:

  $2 \cdot 4 + 3 = 8 + 3 = 11$ CORRECTO.

  $2 \cdot 4 + 3 = 2 \cdot 7 = 14$ MAL.

  El motivo de que la primera forma esté bien y la segunda esté mal es un matiz muy sutil: si queremos hacerlo conforme a la segunda forma de abajo podemos utilizar paréntesis $2 \cdot (4+3) = 2 \cdot 7 = 14$. Así que si no utilizamos los paréntesis (a pesar de que podemos hacerlo) es porque se <u>sobreentiende por defecto</u> que no se pretende inicialmente sumar sino multiplicar.

- Además de la jerarquía de las operaciones, en las operaciones combinadas es frecuente también la utilización de la propiedad distributiva:
  $\boxed{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$
  ¿Por qué es así esta propiedad? En realidad puede explicarse a partir de la propiedad conmutativa de la suma:
  $2 \cdot (4+3) = (4+3) + (4+3) = 4+4+3+3 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3$.
- Cualquier operación combinada puede realizarse de dos formas, utilizando la propiedad distributiva o sin ella:
  - Con propiedad distributiva:

  $$5 - [7 - (2+3)] = 5 - (7 - 2 - 3) = 5 - 7 + 2 + 3 = 3$$

  - Sin propiedad distributiva:

  $$5 - [7 - (2+3)] = 5 - [7 - 5] = 5 - 2 = 3$$

  Es aconsejable para evitar errores, la utilización de la segunda forma, es decir, operar siempre el interior del paréntesis y no utilizar la propiedad distributiva.

- El procedimiento sería entonces el siguiente:

  - Operar los paréntesis interiores, realizando ahí las multiplicaciones y divisiones antes que las sumas y restas. Ejemplo:
    $12 - [17 - 5 \cdot (18 - 3 \cdot 4 - 3)] + 4 - 3 \cdot (5-2) =$
    $= 12 - [17 - 5 \cdot (18 - 12 - 3)] + 4 - 3 \cdot (5-2) =$
    $= 12 - [17 - 5 \cdot 3] + 4 - 3 \cdot (5-2)$
  - Operar los paréntesis exteriores (primero las multiplicaciones y divisiones).
    $= 12 - [17 - 15] + 4 - 3 \cdot (5-2)$
    $= 12 - 2 + 4 - 3 \cdot 3$
  - Operar potencias y raíces si las hubiera. En nuestro ejemplo no hay.
  - Realizar multiplicaciones y divisiones:
    $= 12 - 2 + 4 - 9$
  - Sumar y restar:
    $= 16 - 11 = 5$

  La otra forma, utilizando la propiedad distributiva no es aconsejable porque es más fácil equivocarse. En todo caso el proceso sería así:
  $12 - [17 - 5 \cdot (18 - 3 \cdot 4 - 3)] + 4 - 3 \cdot (5-2) =$
  $= 12 - [17 - 5 \cdot 18 + 5 \cdot 3 \cdot 4 + 5 \cdot 3] + 4 - 3 \cdot (5-2) =$
  $= 12 - 17 + 5 \cdot 18 - 5 \cdot 3 \cdot 4 - 5 \cdot 3 + 4 - 3 \cdot 5 + 3 \cdot 2 =$
  $= 12 - 17 + 90 - 60 - 15 + 4 - 15 + 6 =$
  $= 112 - 107 = 5$