Tema 7: Álgebra.

7.1 Concepto de expresión algebraica.

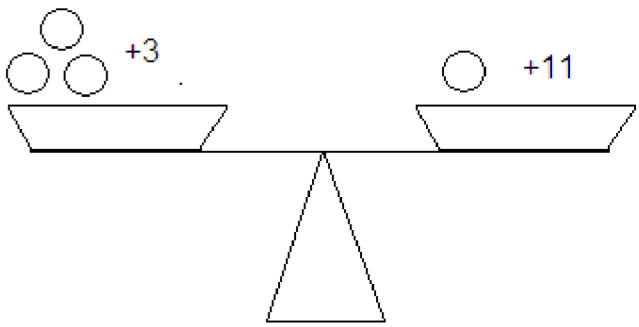
- Una expresión algebraica es aquella en la que se opera aritméticamente con números y letras o incógnitas que están representado números cualesquiera. Ejemplos: $a^2 + b^2$, $x^2 + 3x$, $2x - 1 = 3$, $L = 2\pi r$, etc.
  Hay cuatro tipos de expresiones algebraicas:
  - Identidades, que son ciertas siempre independientemente del valor de las letras o incógnitas. Ejemplos: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $a(b+c) = ab + ac$
  - Fórmulas, que dan una expresión cierta en un determinado contexto. Ejemplo: $\text{Área} = \frac{b \bullet a}{2}$ expresa el área de un triángulo.
  - Monomios. Ejemplo: $-5x^2$. Polinomios: Ejemplo: $2x^3 - 3x^2 + 2x - 5$.
  - Ecuaciones, que son expresiones ciertas sólo para algunos valores de la incógnita, que serán las soluciones. Ejemplo: $2x - 5 = x + 3$ (sol: x=8).

7.2 Monomios.

- Un monomio es una expresión algebraica de la forma ax^n. Siendo a un número entero (o fracción) llamado coeficiente, x la incógnita y n un número natural que será el grado del monomio. Con los monomios se opera de forma natural teniendo en cuenta las propiedades de las potencias:
  - Sólo se pueden sumar o restar los monomios de igual grado sacando factor común. Ejemplo: $2x^3 + 5x^3 = (2+5)x^3 = 7x^3$.
  - Para multiplicar dos monomios, se multiplican los coeficientes y se suman los exponentes. Ejmplo: $2x^3 \cdot 3x^4 = 2.3x^{3+4} = 6x^7$.
  - Para dividir dos monomios, se dividen los coeficientes y se restan los exponentes. Ejmplo: $\frac{5x^5}{3x^2} = \frac{5}{3}x^{5-2} = \frac{5}{3}x^3$.

7.3 Concepto de ecuación y solución.

- Una ecuación es una igualdad algebraica en la que aparecen incógnitas cuyo valor se desconoce inicialmente. La igualdad sólo será cierta para algunos valores concretos de la incógnita que serán las soluciones de la ecuación.
  Una ecuación debe entenderse siempre como una balanza en equilibrio en la que se desconoce el valor de un elemento, por ejemplo en esta situación podemos plantear la ecuación: $3x + 3 = x + 11$.



- La solución de la ecuación es x=4 porque es el único valor que cumple la igualdad, al sustituir: 12+3=4+11, o sea 15=15.
  También puede entenderse una ecuación

como una pregunta ¿Cuál tiene que ser el valor de x para que se cumpla la igualdad: $3x+3=x+11$?
La respuesta a la pregunta es la solución: x debe valer 4, para que al sustituir tengamos 12+3=4+11, o sea 15=15.

7.4 Resolución de una ecuación.

- Para resolver una ecuación se realizan transformaciones elementales sumando, restando, multiplicando o dividiendo en ambos miembros.
  $3x+3=x+11 \Rightarrow 3x+3-x=x+11-x \Rightarrow 2x+3=11$
  $\Rightarrow 2x+3-3=11-3 \Rightarrow 2x=8 \Rightarrow \frac{2x}{2}=\frac{8}{2} \Rightarrow x=4$
  Si reflexionamos sobre qué tranformaciones elementales utilizamos y por qué, tenemos para este ejemplo las siguientes explicaciones:
  - Primero restamos x en ambos miembros para así tener todas las incógnitas x en el miembro de la izquierda.
  - Luego restamos 3 en ambos miembros para tener todos los términos independientes en el miembro de la derecha.
  - Finalmente dividimos ambos miembros por 2 para despejar x.

- Al aplicar estas transformaciones elementales, que claramente mantienen el equilibrio, aparecen de forma natural las típicas reglas: lo que está sumando pasa restando, lo que está multiplicando pasa dividiendo etc. Estas reglas que todos conocemos sirven para reducir bastante el número de pasos:
  $3x+3=x+11$.
  - Primero pasamos las incógnitas a la izquierda y los términos independientes a la derecha. $3x+3=x+11 \Rightarrow 3x-x=11-3$
  - Luego operamos en ambos miembros de la ecuación.
    $3x-x=11-3 \Rightarrow 2x=8$

  Finalmente pasamos dividiendo el coeficiente de x a la derecha.
  $2x=8 \Rightarrow x=\frac{8}{2} \Rightarrow x=4$
  En este ejemplo no es necesario comprobar porque ya sabemos que la solución correcta es 4 del apartado anterior. Pero en general es conveniente sustituir la solución en la ecuación inicial y ver que todo concuerda.

- Otro ejemplo: resolver la ecuación: $6(7x-1)+3x=4x+76$
  - Primero operamos los paréntesis.
    $6(7x-1)+3x=4x+76 \Rightarrow 42x-6+3x=4x+76$
  - Ahora pasamos las incógnitas a la izquierda y los términos independientes a la derecha. $42x-6+3x=4x+76 \Rightarrow 42x+3x-4x=76+6$
  - Luego operamos en ambos miembros de la ecuación.
    $42x+3x-4x=76+6 \Rightarrow 41x=82$
  - Finalmente pasamos dividiendo el coeficiente de x a la derecha.
    $41x=82 \Rightarrow x=\frac{82}{41} \Rightarrow x=2$.

  Si comprobamos sobre el enunciado inicial:
  $6(14-1)+6=8+76 \Rightarrow 84-6+6=84 \Rightarrow 84=84$. Que es cierto.

7.5 Problemas de planteamiento.

- Las ecuaciones pueden aplicarse a la resolución de problemas reales que podemos encontrar en nuestra vida cotidiana. Ejemplo: Juan tiene 20€ más que Pedro, y entre ambos tienen 80€. ¿Cúanto dinero tiene cada uno?
  El proceso para resolver este tipo de problemas es el siguiente:
  - Lectura atenta y comprensiva del problema. Es conveniente realizar un gráfico, un dibujo, un esquema etc., que resuman la información.
    Un resumen sería: Juan + Pedro = 80 y Juan= Pedro + 20.
  - Identificar la incógnita y designarla mediante la letra x.
    Dinero de Pedro: x
    Dinero de Juan: x+20.
  - Traducir el enunciado al lenguaje algebraico planteando una ecuación.
    $(x+20)+x=80$.
  - Resolver la ecuación.
    $x+20+x=80 \Rightarrow x+x=80-20 \Rightarrow 2x=60 \Rightarrow x=\frac{60}{2}=30€$.
  - Comprobar e interpretar el resultado sobre el enunciado inicial.
    Juan tiene 50€ y Pedro 30€, con lo que todo concuerda.

- Otro ejemplo: un hotel tiene habitaciones dobles y sencillas. Dispone en total de 50 habitaciones y 87 camas. ¿Cuántas habitaciones tiene de cada tipo? El proceso para resolver este tipo de problemas es el siguiente:
  - Lectura atenta y comprensiva del problema. Es conveniente realizar un gráfico, un dibujo, un esquema etc., que resuman la información.
    Un resumen sería: sencillas + dobles = 50 , sencillas x1 + dobles x2=84.
  - Identificar la incógnita y designarla mediante la letra x.
    Número de habitaciones sencillas: x
    Número de habitaciones dobles: $50-x$
  - Traducir el enunciado al lenguaje algebraico planteando una ecuación.
    $x \cdot 1+(50-x) \cdot 2=84$.
  - Resolver la ecuación.
    $x+100-2x=84 \Rightarrow -x=84-100 \Rightarrow -x=-16 \Rightarrow x=16$.
  - Comprobar e interpretar el resultado sobre el enunciado inicial.
    Sencillas 16 y dobles 34, suman 50 y hay 16+68=84 camas en total.