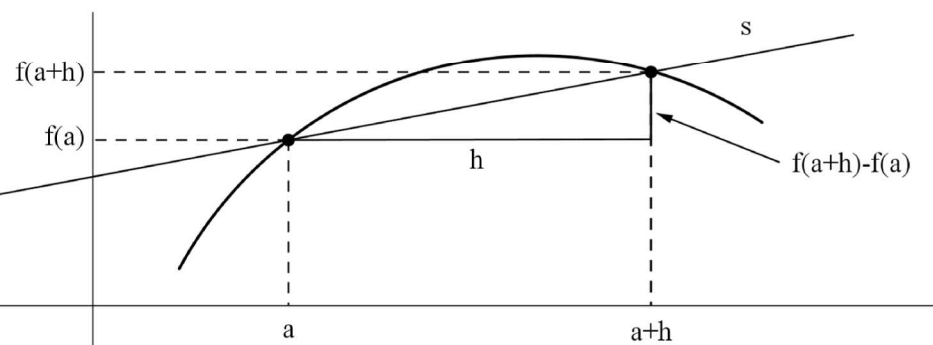


Tema 11: Derivadas.

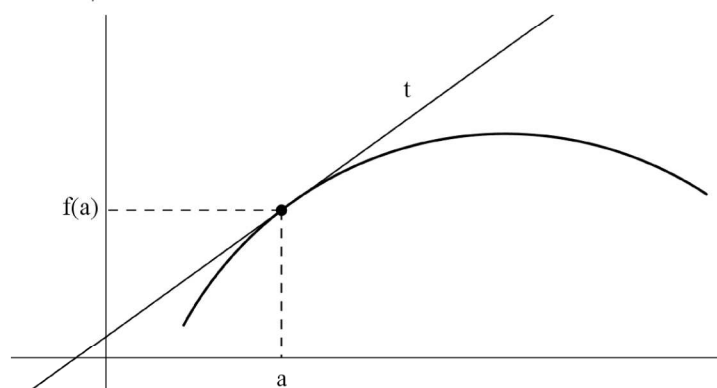
11.1 Concepto de derivada. Interpretación gráfica.

- Definición: la derivada de una función $f(x)$ en un número real 'a', es el

siguiente límite:
$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



Cada cociente que interviene en la definición indica la pendiente de la recta secante 's' que une los puntos del plano $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$, porque se divide el desplazamiento vertical $f(a+h) - f(a)$ entre el desplazamiento horizontal $a+h - a = h$.



Cuando h tiende a 0, ambos puntos tienden a ser el mismo y las sucesivas rectas secantes se convertirán en la recta 't' tangente a la gráfica en el punto.

Conclusión: la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la gráfica en dicho punto.

Ejemplo: consideremos la función $f(x) = x^2$, y el punto $a = 1$. Hallar la derivada en este punto, la ecuación de la recta tangente y representar gráficamente la parábola y la recta tangente.

La derivada de la función $f(x)$ en $a = 1$ es:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 + h = 2. \text{ Luego } \boxed{f'(1) = 2} \end{aligned}$$

La definición de derivada nos proporciona el valor de la pendiente de la recta tangente a la parábola (en este caso es 2). Es decir, la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2$ en el punto $a = 1$, o punto del plano $(1,1)$, es 2.

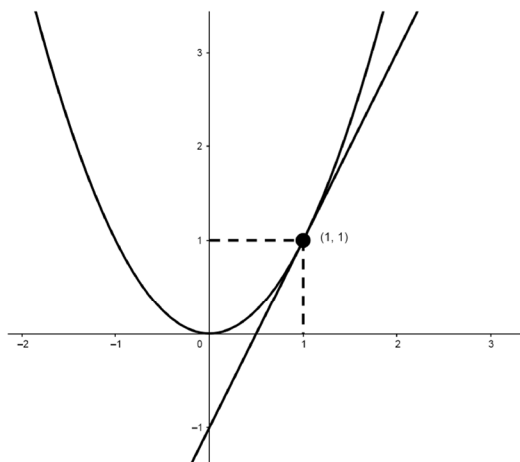
La ecuación de una recta en forma punto-pendiente es: $\boxed{y - y_0 = m \cdot (x - x_0)}$,

o bien, utilizando funciones: $\boxed{y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)}$, que en nuestro caso, se

$$\text{obtiene como recta tangente: } y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Rightarrow y - 1^2 = 2 \cdot (x - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 1 = 2x - 2 \Rightarrow \boxed{y = 2x - 1}.$$

A continuación, en la gráfica podemos observar que todo concuerda: vemos que la recta es, en efecto, tangente en el punto $(1,1)$ y, además, tiene como pendiente el valor de la derivada que es 2.



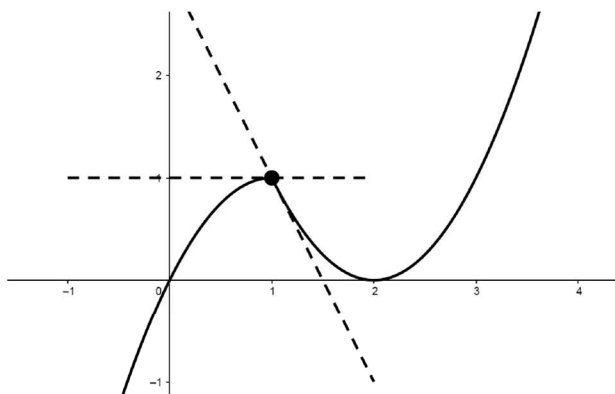
11.2 Derivadas laterales. Derivabilidad.

- Derivadas laterales: como la derivada es un límite, tiene sentido definir las derivadas laterales a partir de los límites laterales:
 - La derivada por la izquierda de una función $f(x)$ en un número real 'a' es el siguiente límite: $f'(a)^- = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
 - Análogamente, la derivada por la derecha de una función $f(x)$ en un número real 'a' es el siguiente límite: $f'(a)^+ = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
- Una función será derivable en un punto si tiene derivada en dicho punto. Para que esto ocurra es necesario que existan las derivadas laterales y que ambos valores coincidan. En la práctica, que una función sea derivable significa que su gráfica no presenta cambios bruscos ni puntos angulosos.

Por ejemplo: $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ presenta en $a = 1$ un punto anguloso,

y las derivadas laterales no coinciden: $f'(1)^- = 0$ pero $f'(1)^+ = -2$.

Por tanto, la función no es derivable en $a = 1$.



- Derivabilidad y continuidad. Si una función es derivable en un punto, entonces también es continua en dicho punto. Al revés no, por ejemplo la función anterior es continua en el 1, pero no es derivable en dicho punto.

11.3 Función derivada.

- A partir de la definición de derivada de una función en un punto (que es un número) puede definirse una nueva función, que llamaremos función derivada, que consiste en asignar a cada número el valor de la derivada de la función en ese número.

$$\boxed{f'} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow \boxed{f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Con esta nueva función conseguimos calcular la derivada en todos los puntos a la vez. Ejemplo: si tuviésemos que hallar la derivada de la función $f(x) = x^2$ en varios puntos $f'(1), f'(2), f'(3), f'(-1), f'(-2), f'(-3)$. Podríamos calcular seis límites distintos, pero sería un procedimiento largo. Es más sencillo hallar primero la función derivada y luego sustituir por cada uno de los seis números:

La función derivada de la función $f(x)$ es:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = 2x. \text{ Luego } \boxed{f'(x) = 2x}.$$

Ahora será: $f'(1) = 2, f'(2) = 4, f'(3) = 6, f'(-1) = -2, f'(-2) = -4, f'(-3) = -6$.

11.4 Reglas de derivación y tabla de derivadas.

- A partir de la definición de función derivada, y aplicando las propiedades de los límites, se demuestran las siguientes reglas de derivación:

$$\boxed{\begin{aligned} (f \pm g)' &= f' \pm g' \\ (f \cdot g)' &= f' \cdot g + f \cdot g' \\ (k \cdot f)' &= k \cdot f' \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \\ \text{REGLA DE LA CADENA} \\ [g(f(x))]' &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \\ (f^{-1})' &= \frac{1}{f'} \end{aligned}}$$

- A partir de la definición de función derivada se demuestran las fórmulas de las derivadas elementales y de ellas se deducen las derivadas de las funciones compuestas, aplicando la regla de la cadena (por eso aparece siempre f').

DERIVADAS ELEMENTALES DERIVADAS COMPUESTAS

$f(x)$	$f'(x)$	y	y'
k	0		
x	1		
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	f^n	$n \cdot f^{n-1} \cdot f'$
a^x	$a^x \cdot \ln a$	a^f	$a^f \cdot \ln a \cdot f'$
e^x	e^x	e^f	$e^f \cdot f'$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	\sqrt{f}	$\frac{1}{2\sqrt{f}} \cdot f'$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\sqrt[n]{f}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{f^{n-1}}} \cdot f'$
$\log_a x$	$\frac{1}{x} \log_a e$	$\log_a f$	$\frac{1}{f} \log_a e \cdot f'$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\ln f$	$\frac{1}{f} \cdot f'$
$\text{sen } x$	$\text{cos } x$	$\text{sen } f$	$\text{cos } f \cdot f'$
$\text{cos } x$	$-\text{sen } x$	$\text{cos } f$	$-\text{sen } f \cdot f'$
$\text{tg } x$	$\frac{1}{\text{cos}^2 x}$	$\text{tg } f$	$\frac{1}{\text{cos}^2 f} \cdot f'$
$\text{cotg } x$	$\frac{-1}{\text{sen}^2 x}$	$\text{cotg } f$	$\frac{-1}{\text{sen}^2 f} \cdot f'$
$\text{sec } x$	$\frac{\text{sen } x}{\text{cos}^2 x}$	$\text{sec } f$	$\frac{\text{sen } f}{\text{cos}^2 f} \cdot f'$
$\text{cosec } x$	$\frac{-\text{cos } x}{\text{sen}^2 x}$	$\text{cosec } f$	$\frac{-\text{cos } f}{\text{sen}^2 f} \cdot f'$
$\text{arc sen } x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{arc sen } f$	$\frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
$\text{arc cos } x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{arc cos } f$	$\frac{-1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
$\text{arc tg } x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{arc tg } f$	$\frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
$\text{arc sec } x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\text{arc sec } f$	$\frac{1}{f\sqrt{f^2-1}} \cdot f'$
$\text{arc cosec } x$	$\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\text{arc cosec } f$	$\frac{-1}{f\sqrt{f^2-1}} \cdot f'$
$\text{arc cotg } x$	$\frac{-1}{1+x^2}$	$\text{arc cotg } f$	$\frac{-1}{1+f^2} \cdot f'$

- En la práctica, para calcular la derivada de una función compuesta podemos utilizar dos métodos, utilizar la fórmula o aplicar la regla de la cadena.

Ejemplo: $y = (2x - 3)^5$.

- Mediante la fórmula: Hay que aplicar la fórmula de la derivada de una función potencial. Si $y = f^n \Rightarrow y' = nf^{n-1} \cdot f'$. En nuestro caso, la función es $f(x) = 2x - 3$. Como $y = (2x - 3)^5 \Rightarrow y' = 5(2x - 3)^4 \cdot 2$

- Aplicando la regla de la cadena:

Tenemos dos funciones: $\begin{cases} g(x) = x^5 \\ f(x) = 2x - 3 \end{cases}$ y sus derivadas son: $\begin{cases} g'(x) = 5x^4 \\ f'(x) = 2 \end{cases}$

Claramente $y = (g \circ f)(x)$ y su derivada, por la regla de la cadena, será:

$$y' = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = 5(f(x))^4 \cdot 2 = 5(2x - 3)^4 \cdot 2$$

Veamos otro ejemplo: $y = L(x^2 - 2x)$

- Por la fórmula: Hay que aplicar la fórmula de la derivada de la función logarítmica. Si $y = Lf \Rightarrow y' = \frac{f'}{f}$. En nuestro caso, la función es

$$f(x) = x^2 - 2x. \text{ Como } y = L(x^2 - 2x) \Rightarrow y' = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x}$$

- Aplicando la regla de la cadena:

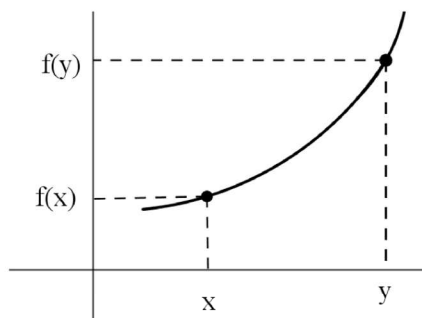
Tenemos dos funciones: $\begin{cases} g(x) = Lx \\ f(x) = x^2 - 2x \end{cases}$ y sus derivadas: $\begin{cases} g'(x) = \frac{1}{x} \\ f'(x) = 2x - 2 \end{cases}$

Claramente, $y = (g \circ f)(x)$ y su derivada, por la regla de la cadena, será:

$$y' = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot (2x - 2) = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x}$$

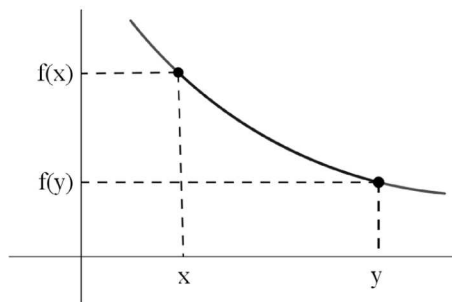
11.5 Crecimiento de una función.

- Una función es creciente en un punto 'a', si existe un entorno $(a - r, a + r)$ de forma que, para cualquier pareja de números x, y (siendo $x < y$), las imágenes son $f(x) < f(y)$. Es decir, los puntos situados más a la derecha tienen imágenes mayores.

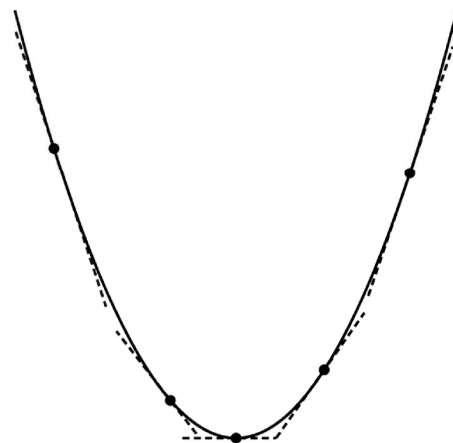


- Análogamente, una función es decreciente en un punto 'a', si existe un entorno $(a - r, a + r)$ de forma que, para cualquier pareja de números de ese

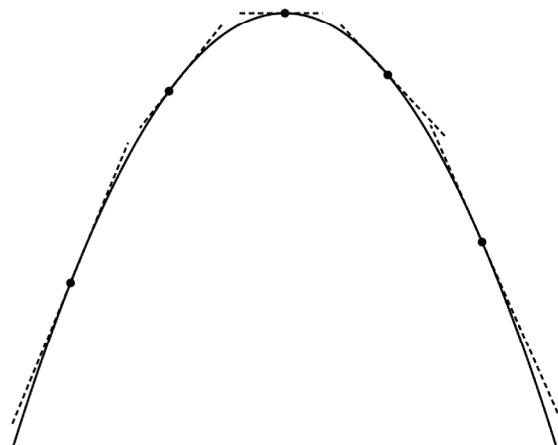
entorno x , y (siendo $x < y$), las imágenes son $f(x) > f(y)$. Es decir, los puntos situados más a la derecha tienen imágenes menores:



- Veamos a continuación ¿qué relación hay entre el crecimiento y la derivada?
Si observamos esta gráfica, veremos que a la izquierda, donde la función es decreciente, las rectas tangentes tienen pendiente negativa. Y a la derecha, donde la función es creciente, las rectas tangentes tienen pendiente positiva.



- Análogamente a la gráfica anterior, pero con forma contraria, observamos que a la izquierda, donde la función es creciente, las rectas tangentes tienen pendiente positiva. Y a la derecha, donde la función es decreciente, las rectas tangentes tienen pendiente negativa.



Conclusión:

Si $f'(a) > 0 \Rightarrow f$ es creciente (estrictamente) en a

Si $f'(a) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente (estrictamente) en a

Observación: los recíprocos no son ciertos. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente en $x = 0$, pero ahí la derivada no es positiva, sino nula: $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$.

- Para estudiar de forma práctica el crecimiento de una función: Hacemos la derivada y hallamos las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$, para a continuación, estudiar el signo de la derivada que nos informará sobre el crecimiento de la función inicial. Hay que observar, que entre cada dos raíces o soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$, habrá un único signo, con lo que es suficiente un valor en cada intervalo para evaluar el signo.
Ejemplo: estudiar el crecimiento de la función $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

La derivada es $f'(x) = 3x^2 - 3$. La ecuación $f'(x) = 0$ tiene dos soluciones:

$$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}. \text{ Dando valores a la izquierda, en medio, y a la}$$

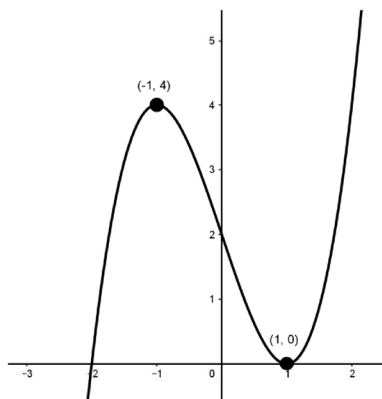
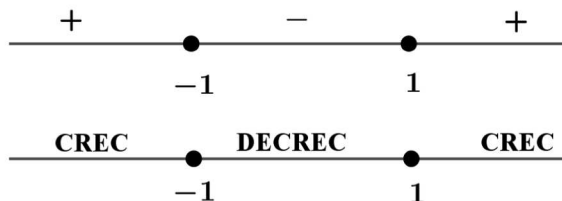
derecha de las soluciones, obtenemos el signo de la derivada. Por ejemplo:

$$f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 3 = 12 - 3 = 9 (+)$$

$$f'(0) = 3 \cdot (0)^2 - 3 = 0 - 3 = -3 (-)$$

$$f'(3) = 3 \cdot (3)^2 - 3 = 27 - 3 = 24 (+)$$

El crecimiento de $f(x)$ será pues:



En $(-1, f(-1)) = (-1, 4)$ la función tiene un Máximo relativo. Y en $(1, f(1)) = (1, 0)$ tiene un mínimo relativo.

11.6 Representación de funciones polinómicas.

- Todas las funciones polinómicas tienen por dominio $D = \mathbb{R}$, son siempre continuas, es fácil ver si son simétricas observando la paridad de los exponente, no son funciones periódicas y, lo más importante, no tienen asíntotas de ningún tipo. Por lo tanto, para representar estas funciones se estudian preferentemente: puntos de corte, crecimiento (y extremos).

Ejemplo: $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 1$.

- Puntos de corte con los ejes: para obtener los cortes con el eje OX resolvemos la ecuación $-x^4 + 2x^2 - 1 = 0$. Como es bicuadrada, se resuelve haciendo el cambio de variable $z = x^2$, con lo que la ecuación pasa a ser de 2º grado, se resuelve z y luego se halla $x = \pm\sqrt{z}$.

$$-x^4 + 2x^2 - 1 = 0, \text{ si } z = x^2, \text{ tendremos: } -z^2 + 2z - 1 = 0$$

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-1)(-1)}}{2(-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{-2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

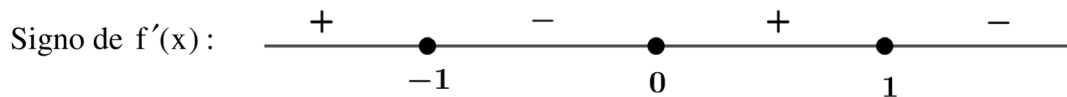
$$\text{Si } z = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}.$$

Por tanto, hay dos puntos de corte con OX: $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

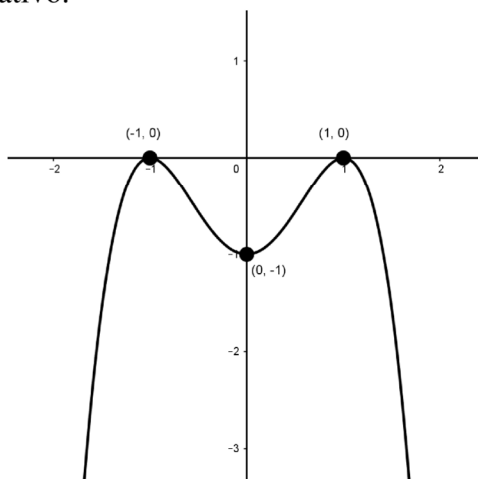
Ahora calculamos $f(0) = -0^4 + 2 \cdot 0^2 - 1 = -1$. El punto de corte es $(0, -1)$.

- Crecimiento y extremos: resolvemos la ecuación: $f'(x) = 0$, que tiene tres

$$\text{soluciones: } -4x^3 + 4x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$



En $(-1, f(-1)) = (-1, 0)$ la función tiene un Máximo relativo, en $(0, f(0)) = (0, -1)$ un mínimo relativo y en $(1, f(1)) = (1, 0)$ tiene otro Máximo relativo.



11.7 Representación de funciones racionales.

- En estas funciones estudiaremos principalmente: dominio, cortes con los ejes, crecimiento (y extremos) y asíntotas.

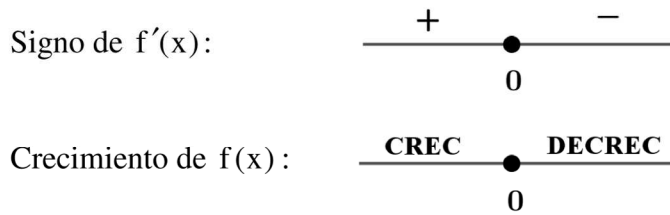
Ejemplo: $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

- $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, porque ambos valores anulan el denominador.
- Puntos de corte con los ejes: la ecuación $\frac{1}{x^2 - 1} = 0$, no tiene solución, por lo que la función no tendrá cortes con el eje OX. Ahora calculamos

$$f(0) = \frac{1}{0^2 - 1} = -1. \text{ Luego el punto de corte con OY es } (0, -1).$$

- Crecimiento y extremos:

$$f'(x) = \frac{0(x^2 - 1) - 1 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}; \quad \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0.$$



Luego en $(0, f(0)) = (0, -1)$, la función tiene un Máximo relativo.

- Asíntotas verticales: tenemos dos asíntotas verticales en los puntos que no están en el dominio: $x = -1$ y $x = 1$. En estos puntos, los límites laterales son los siguientes:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty, \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty.$$

- Para la asíntota horizontal, tenemos que hallar los límites en el infinito:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0^+ \text{ y } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0^+, \text{ luego tenemos como asíntota}$$

horizontal $y = 0$ en ambos lados.

En cuanto a las asíntotas oblicuas, no es necesario iniciar ningún cálculo, porque al tener asíntotas horizontales en ambos lados, no podrá haber asíntotas oblicuas.

