

Tema 2: Sucesiones.

2.1 Concepto de sucesión. Término general.

- Una sucesión de números reales es una lista, o serie ordenada de números reales. Esto no significa que estén ordenados de menor a mayor o de mayor a menor, sino que aparecen siguiendo un orden, un primero, un segundo, etc. Ejemplos de sucesiones indicando sus primeros términos:
 - $a_n \equiv 1, 4, 9, 16, \dots$ $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 9, a_4 = 16$ etc.
 - $b_n \equiv 5, 3, 1, -1, \dots$ $b_1 = 5, b_2 = 3, b_3 = 1, b_4 = -1$ etc.
 - $c_n \equiv -2, 4, -8, 16, \dots$ $c_1 = -2, c_2 = 4, c_3 = -8, c_4 = 16$ etc.
- Además de indicar sus primeros términos, las sucesiones también se pueden expresar mediante el término general, que es la fórmula que relaciona cada término de la sucesión a_n con el lugar 'n' que ocupa en ella. En los ejemplos anteriores, los términos generales son:
 - $a_n \equiv n^2$.
 - $b_n \equiv -2n + 7$.
 - $c_n \equiv (-2)^n$.
 Si sustituimos 'n' por 1, 2, 3, 4, ... resultan los primeros términos del ejemplo anterior.
- Otra forma, menos habitual, de expresar una sucesión consiste en utilizar una relación de recurrencia que indica cómo obtener cada término a partir de los anteriores, ejemplo: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, siendo: $a_1 = 1$ y $a_2 = 1$. Así se obtiene la sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

2.2 Progresiones aritméticas.

- Las progresiones aritméticas son un caso particular de sucesiones en las que cada término se obtiene sumando al anterior un número fijo 'd', llamado diferencia.

$$a_1 = a_1, a_2 = a_1 + d, a_3 = a_1 + 2d, a_4 = a_1 + 3d, \dots \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$
 Es decir, todos los términos se expresan a partir del primero a_1 y de la diferencia 'd', sumando al primero $(n-1)$ -veces la diferencia.
 Ejemplo: hallar el término general de la sucesión: $a_n \equiv 1, 4, 7, 10, \dots$
 Claramente, el primer término es: $a_1 = 1$ y la diferencia es $d = 3$.
 $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 1 + (n-1) \cdot 3 = 1 + 3n - 3 = 3n - 2$ y, podemos comprobarlo, sustituyendo por 1, 2, 3, 4, ... : $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 7, a_4 = 10, \dots$
- En las progresiones aritméticas, la suma de los primeros términos puede calcularse mediante la fórmula: $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$. Ejemplo: hallar la suma

de los 20 primeros números pares. $a_n \equiv 2, 4, 6, 8, \dots$, el primer término es $a_1 = 2$, el número de términos es: $n = 20$ y, el término de lugar 20 (a_{20}) se obtiene a partir del término general de la siguiente forma:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 2 + (n-1) \cdot 2 = 2 + 2n - 2 = 2n$. Y sustituyendo por 20, tendremos: $a_{20} = 2 \cdot 20 = 40$. Finalmente, aplicamos la fórmula de la suma:

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(2 + 40) \cdot 20}{2} = \frac{840}{2} = 420.$$

2.3 Progresiones geométricas.

- Las progresiones aritméticas son un caso particular de sucesiones en las que cada término se obtiene multiplicando el término anterior por un número fijo 'r', llamado razón.

$$a_1 = a_1, a_2 = a_1 \cdot r, a_3 = a_1 \cdot r^2, a_4 = a_1 \cdot r^3, \dots \Rightarrow \boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}.$$

Es decir, todos los términos se expresan a partir del primero a_1 y de la razón 'r', multiplicando el primero por la razón $(n-1)$ veces.

Ejemplo: hallar el término general de la sucesión: $a_n \equiv 3, 6, 12, 24, \dots$

Claramente, el primer término es $a_1 = 3$ y la razón es $r = 2$.

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$ y, podemos comprobarlo, sustituyendo por 1, 2, 3, 4, ...
 $a_1 = 3, a_2 = 6, a_3 = 12, a_4 = 24, \dots$

- En las progresiones geométricas también puede calcularse la suma de los primeros términos mediante la fórmula: $\boxed{S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1 - r}}$. Ejemplo: hallar la

suma de las 10 primeras potencias de 2: $a_n \equiv 2, 4, 8, 16, \dots$

El primer término es $a_1 = 2$, la razón es $r = 2$ y el término de lugar 10, es $a_{10} = 1024$, que se obtiene del término general: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$, sustituyendo por 10: $a_{10} = 2^{10} = 1024$. Por tanto, aplicando la fórmula, la

suma será la siguiente: $S_{10} = \frac{a_1 - a_{10} \cdot r}{1 - r} = \frac{2 - 1024 \cdot 2}{1 - 2} = \frac{-2046}{-1} = 2046$.

Caundo la razón tiene valor absoluto menor que 1, es decir, $|r| < 1$, puede calcularse la suma de los infinitos términos de la progresión mediante la

siguiente fórmula: $\boxed{S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}}$.

Ejemplo: hallar la suma de todos los términos de la progresión geométrica

siguiente: $a_n \equiv 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

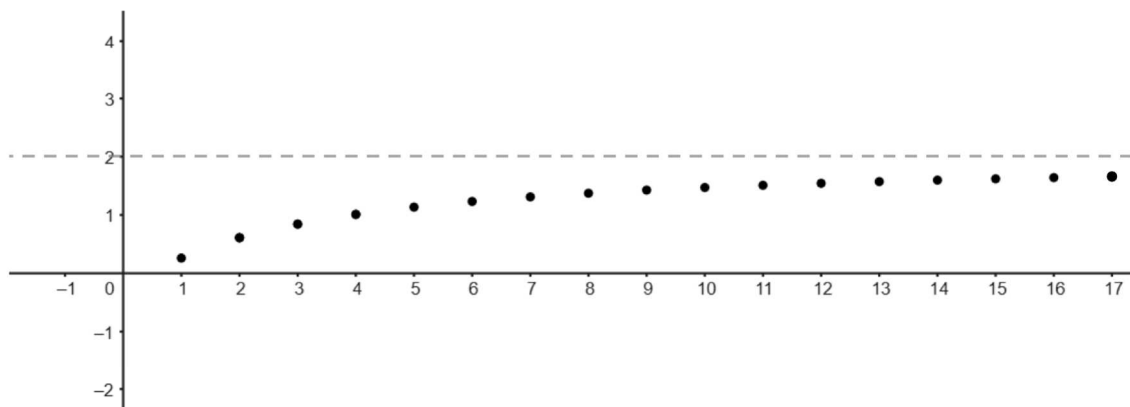
El primer término es $a_1 = 1$ y la razón es $r = \frac{1}{2}$. Luego, aplicando la fórmula,

la suma es: $S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

2.4 Límite de una sucesión.

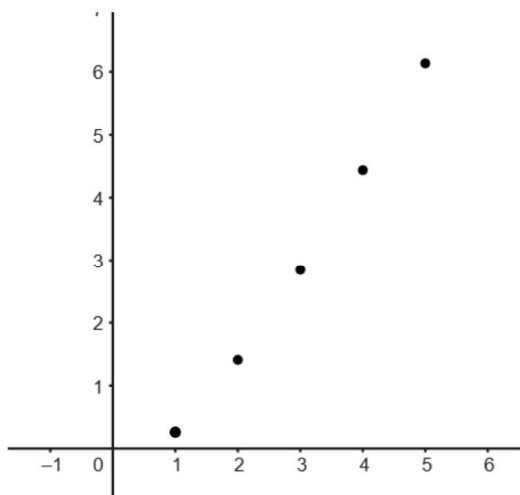
- El límite en el infinito de una sucesión vale L : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ si, para valores de n cada vez mayores (10, 100, 1000, etc.), los términos de la sucesión se aproximan cada vez más al número L , tanto como queramos. Ejemplo:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n-1}{n+3} = 2^-$ porque $a_{10} = \frac{19}{13}$, $a_{100} = \frac{199}{103}$, $a_{1000} = \frac{1999}{1003}$, tienden a 2 (y el superíndice indica que se aproximan por abajo, con valores menores que 2).



- El límite en el infinito de una sucesión vale $+\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ si, para valores de n cada vez mayores (10, 100, 1000, etc.), los términos de la sucesión aumentan de forma indefinida. Ejemplo: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2-1}{n+3} = +\infty$ porque

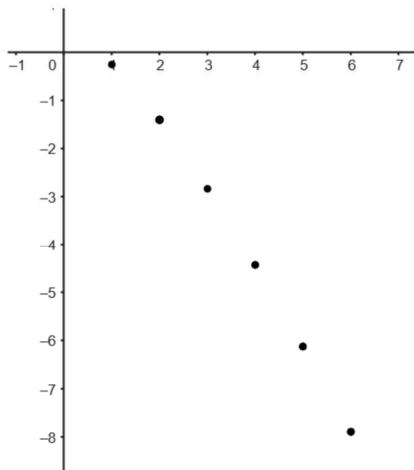
$a_{10} = \frac{199}{13}$, $a_{100} = \frac{19999}{103}$, $a_{1000} = \frac{1999999}{1003}$, tienden a $+\infty$.



- El límite en el infinito de una sucesión vale $-\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ si, para valores de n cada vez mayores (10, 100, 1000, etc.), los términos de la sucesión son cada vez más negativos de forma indefinida.

Ejemplo: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-2n^2}{n+3} = -\infty$ porque los términos siguientes:

$$a_{10} = \frac{-199}{13}, a_{100} = \frac{-19999}{103}, a_{1000} = \frac{-1999999}{1003}, \text{ tienden hacia } -\infty.$$



- También puede suceder que la sucesión no tenga límite. Ejemplo:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2)^n = ?$ El límite no existe, porque $a_n \equiv -2, 4, -8, 16, -32, \dots$ no se acerca a “nada”, unas veces son términos negativos y otras positivos.

- Una sucesión muy importante es $a_n \equiv \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$:

$$a_1 = \left(\frac{2}{1}\right)^1 = 2, a_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2,25, a_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = 2,37, a_4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 = 2,441 \text{ etc.}$$

Y para valores grandes de n:

$$a_{10} = \left(\frac{11}{10}\right)^{10} = 2,5, a_{100} = \left(\frac{101}{100}\right)^{100} = 2,7, a_{1000} = \left(\frac{1001}{1000}\right)^{1000} = 2,71 \text{ etc.}$$

El límite de esta sucesión es el número de Euler: $e = 2,71828\dots$ Es decir:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,71828\dots$$

