Tema 3: Álgebra: polinomios, ecuaciones, sist. e inecuaciones.

3.1 Expresiones algebraicas.

- Una expresión algebraica es aquella en la que se opera aritméticamente con números y letras o incógnitas que están representando números cualesquiera. Hay cuatro tipos de expresiones algebraicas:
  - Identidades, que son ciertas siempre, independientemente del valor de las letras o incógnitas. Ejemplos: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $a(b+c) = ab + ac$
  - Fórmulas, que son expresiones ciertas en un determinado contexto. Ejemplo: $\text{Área} = \frac{p \cdot a}{2}$, expresa el área de un polígono regular.
  - Polinomios. Ejemplo: $P(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 4$. Se estudiarán ahora.
  - Ecuaciones, que son expresiones ciertas sólo para algunos valores de la incógnita, que serán las soluciones. Ejemplo: $2x - 5 = x + 3$ (sol: x=8).

3.2 Polinomios.

- Un monomio es una expresión algebraica de la forma ax^n, siendo "a" un número real llamado coeficiente, "x" la incógnita y "n" un número natural que será el grado del monomio. Con los monomios se opera de forma natural teniendo en cuenta las propiedades de las potencias:
  - Sólo se pueden sumar o restar los monomios de igual grado (semejantes). En este caso, se saca factor común. Ejemplo: $2x^3 + 5x^3 = (2+5)x^3 = 7x^3$
  - Para multiplicar dos monomios se multiplican los coeficientes y se suman los exponentes. Ejmplo: $2x^3 \cdot 3x^4 = 2.3x^{3+4} = 6x^7$
  - Para dividir dos monomios se dividen los coeficientes y se restan los exponentes. Ejmplo: $\frac{5x^5}{3x^2} = \frac{5}{3}x^{5-2} = \frac{5}{3}x^3$
- Un polinomio es una expresión algebraica formada por una suma o resta de monomios, que normalmente se escriben ordenados por su grado de mayor a menor. Ejemplo: $P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ es un polinomio de grado 3.

  El valor numérico de un polinomio en un número se define como el valor que se obtiene al sustituir la incógnita x por dicho número. Por ejemplo el valor numérico del polinomio anterior en x=3 vale 2:

  $P(3) = 3^3 - 5 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 - 4 = 27 - 45 + 24 - 4 = 51 - 49 = 2$

  Cuando el valor numérico resulta 0, se dice que el número es una raíz o cero del polinomio. $P(1) = 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 - 4 = 1 - 5 + 8 - 4 = 9 - 9 = 0$. El 1 es raíz.

- Operaciones con polinomios:
  - Para sumar dos polinomios se colocan ordenados en columnas de igual grado y se suman los monomios semejantes de igual grado.

$$\begin{array}{rrrrrl} -5x^4 & +3x^3 & -2x^2 & +5x & -3 & + \\ -2x^4 & -5x^3 & -5x^2 & +2x & +4 & \\ \hline -7x^4 & -2x^3 & -7x^2 & +7x & +1 & \end{array}$$

- Para restar dos polinomios se colocan ordenados en columnas de igual grado, se cambia de signo el sustraendo y se realiza a continuación la suma en cada columna igual que antes.

$$\begin{array}{rrrrrl} -5x^4 & +3x^3 & -2x^2 & +5x & -3 & \\ -2x^4 & -5x^3 & -5x^2 & +2x & +4 & - \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrl} -5x^4 & +3x^3 & -2x^2 & +5x & -3 & \\ +2x^4 & +5x^3 & +5x^2 & -2x & -4 & + \\ \hline -3x^4 & +8x^3 & +3x^2 & +3x & -7 & \end{array}$$

- Para multiplicar dos polinomios se multiplica cada monomio del multiplicador por todos los monomios del multiplicando y, posteriormente, se colocan todos los resultados ordenados en columnas de igual grado y se realiza la suma en cada columna.

$$\begin{array}{rrrrr} & +3x^3 & -2x^2 & +5x & -3 \\ & \times & & +2x & +4 \\ \hline & +12x^3 & -8x^2 & +20x & -12 \\ 6x^4 & -4x^3 & +10x^2 & -6x & \\ \hline 6x^4 & +8x^3 & +2x^2 & +14x & -12 \end{array}$$

- Para dividir dos polinomios se divide el monomio de mayor grado del dividendo por el monomio de mayor grado del divisor. Después se multiplica el divisor por el resultado obtenido y se resta del dividendo; es decir, igual que se hace al dividir dos números, ya que los números son en realidad polinomios en base 10. Este proceso se repite hasta que el resto resultante tenga menor grado que el divisor.

$$\begin{array}{rrrrr|rrrr} 6x^4 & & -2x^2 & +5x & & x & -1 & & \\ \cline{6-9} -6x^4 & +6x^3 & & & & 6x^3 & +6x^2 & +4x & +9 \\ \cline{1-2} & +6x^3 & -2x^2 & +5x & & & & & \\ & -6x^3 & +6x^2 & & & & & & \\ \cline{2-4} & & +4x^2 & +5x & & & & & \\ & & -4x^2 & +4x & & & & & \\ \cline{3-4} & & & +9x & & & & & \\ & & & +9x & +9 & & & & \\ \cline{4-5} & & & & +9 & & & & \end{array}$$

3.3 Regla de Ruffini y teorema del resto.

- La regla de Ruffini es un método abreviado para dividir polinomios, en el caso particular en que el divisor es de la forma $x \pm a$. Así, se puede realizar la división anterior de manera más rápida prescindiendo de la variable x. Para ello colocamos los coeficientes del dividendo en diferentes columnas y el número "a" a la izquierda, que se cambia el signo para que en lugar de multiplicar y restar, sólo sea necesario multiplicar y sumar. Después se realizan operaciones de multiplicar y sumar.

$$\begin{array}{c|ccccc} & +6 & 0 & -2 & +5 & 0 \\ 1 & & +6 & +6 & +4 & +9 \\ \hline & +6 & +6 & +4 & +9 & \boxed{+9} \end{array}$$

Se ha obtenido el mismo cociente: $6x^3 + 6x^2 + 4x + 9$ y el mismo resto: 9

- El teorema del resto nos da una relación entre el valor numérico y el resto de la división por Ruffini:
  El valor numérico de un polinomio P(x) en un número real a, coincide con el resto obtenido al dividir el polinomio P(x) por $x - a$. Siguiendo el mismo ejemplo de antes, el valor numérico del polinomio $P(x) = 6x^4 - 2x^2 + 5x$ en $a = 1$ es $P(1) = 6{\cdot}1^4 - 2{\cdot}1^2 + 5{\cdot}1 = 6 - 2 + 5 = 9$, que coincide con el resto al dividir P(x) por $x - 1$(por Ruffini, claro).
  En particular, un número será raíz cuando el valor numérico sea 0, o lo que es lo mismo, cuando el resto al aplicar Ruffini con ese número sea 0.

3.4 Raíces y descomposición en factores.

- La búsqueda de las raíces de un polinomio no es un proceso automático por el que siempre se consiga obtener todas las raíces; muy al contrario, es un proceso en el que influye el azar y limitado sólo a las raíces enteras. No obstante, hay algunas indicaciones que debemos tener en cuenta y que nos pueden ayudar a encontrar las raíces:
  - El número máximo de raíces coincide con el grado del polinomio. Ejemplo: el polinomio $P(x) = x^2 - 5x + 6$ tiene sólo dos raíces 2 y 3.
  - Las posibles raíces enteras de un polinomio son divisores del término independiente. Ejemplo: en el polinomio $P(x) = x^2 - 5x + 6$ las candidatas a ser raíces enteras son $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ y ± 6.

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -5 & +6 \\ 2 & & +2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & 1 & -5 & +6 \\ 3 & & +3 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

  - Una vez que se encuentra una raíz, se puede continuar la búsqueda con el cociente resultante, en lugar de volver al polinomio inicial. Ejemplo: en el polinomio anterior $P(x) = x^2 - 5x + 6$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -5 & +6 \\ 2 & & +2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0} \\ 3 & & +3 & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

  - Si el polinomio no tiene término independiente, entonces una raíz primera será siempre x=0, y el resto de raíces se buscarán sobre el polinomio que resulta de sacar factor común x. Ejemplo: $P(x) = 2x^3 + 2x^2 - 4x$ tiene como raíz x=0 y podemos continuar con $x(2x^2 + 2x - 4)$

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & 2 & +2 & -4 \\
1 & & +2 & +4 \\
\hline
 & 2 & +4 & \boxed{0} \\
-2 & & -4 & \\
\hline
 & 2 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

Las raíces son: 0, 1 y -2.

- Una vez que el polinomio inicial o alguno de los cocientes es de 2º grado, podemos continuar la búsqueda de raíces resolviendo la ecuación de 2º grado. Este método es más seguro porque localiza todas la raíces, sean o no enteras. En el ejemplo anterior las raíces 1 y -2 podrían obtenerse resolviendo la ecuación $2x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2} \Rightarrow$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{4} = \frac{-2 \pm 6}{4} = \left\langle \begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array} \right.$$

- La descomposición en factores de un polinomio P(x) cuyo primer coeficiente es A y cuyas raíces son $x_1, x_2, x_3, \ldots$ es $\boxed{P(x) = A \cdot (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots}$
  Ejemplos: los polinomios del apartado anterior, cuyas raíces ahora se conocen, tienen las siguientes descomposiciones factoriales:
  $P(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$
  $P(x) = 2x^3 + 2x^2 - 4x = 2x(x-1)(x+2)$. Podemos comprobar multiplicando.

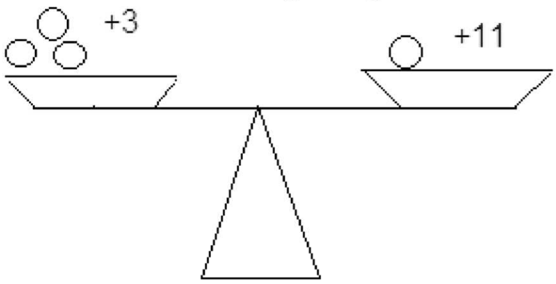
3.5 Fracciones polinómicas.

- Una fracción polinómica es una expresión de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, es decir, un cociente de polinomios. En algunas ocasiones, si los polinomios tienen alguna raíz común, la fracción puede simplificarse. Ejemplo:
  $$\frac{x^2 - 5x + 6}{2x - 4} = \frac{(x-2)(x-3)}{2(x-2)} = \frac{x-3}{2}$$
  Para operar con fracciones polinómicas se siguen los mismos procedimientos que con las fracciones ordinarias.
  $$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{bd} \quad ; \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad ; \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$
  Hay que tener en cuenta que para sumar o restar varias fracciones polinómicas es conveniente utilizar el método del mínimo común múltiplo de los denominadores, que ahora será un polinomio. Ejemplo:

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 1} - \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)(x+1)} =$$
$$= \frac{x+1}{(x-1)^2(x+1)} + \frac{2(x-1)(x+1)}{(x-1)^2(x+1)} + \frac{x-1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{x+1+2x^2-2+x-1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{2x^2+2x-2}{(x-1)^2(x+1)}$$

3.6 Concepto de ecuación y solución.

- Una ecuación es una igualdad algebraica en la que aparecen incógnitas cuyo valor se desconoce inicialmente. La igualdad sólo será cierta para algunos valores de la incógnita, que serán las soluciones de la ecuación. Se puede imaginar una ecuación como una balanza en equilibrio, en la que se desconoce el valor de uno de los elementos. Por ejemplo, en la siguiente situación: $3x + 3 = x + 11$



  La solución de la ecuación es $x = 4$, porque es el único valor que hace que la igualdad y al sustituir resulta $15 = 15$.
  También puede plantearse como una pregunta: ¿Cuánto tiene que valer x para que se cumpla la igualdad: $3x + 3 = x + 11$?
  La respuesta a la pregunta es la solución: x debe valer 4.
  Para resolver una ecuación se realizan transformaciones elementales: sumando, restando, multiplicando o dividiendo en ambos miembros.
  $$3x + 3 = x + 11 \Rightarrow 3x + 3 - x = x + 11 - x \Rightarrow 2x + 3 = 11$$
  $$2x + 3 - 3 = 11 - 3 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{8}{2} \Rightarrow x = 4$$
  Al aplicar estas transformaciones elementales, que mantienen el equilibrio, observamos que nos conducen a las típicas reglas aprendidas: “lo que está sumando pasa restando, lo que está multiplicando pasa dividiendo etc”.
- Este mismo proceso es el que se utiliza para resolver cualquier ecuación de grado 1. Y si aparecen denominadores se eliminan utilizando la técnica del m.c.m. Se eliminan porque se multiplica en ambos miembros. Ejemplo:
  $$\frac{3x}{2} - \frac{x-1}{3} = \frac{x}{6} \Rightarrow \frac{9x}{6} - \frac{2(x-1)}{6} = \frac{x}{6} \Rightarrow 9x - 2(x-1) = x \Rightarrow$$
  $$\Rightarrow 9x - 2x + 2 = x \Rightarrow 9x - 2x - x = -2 \Rightarrow 6x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

3.7 Ecuaciones polinómicas de segundo grado.

- La ecuación de segundo grado, ya simplificada, es: $ax^2 + bx + c = 0$ y se resuelve mediante la fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$. Por tanto, pueden aparecer 0, 1 o 2 soluciones dependiendo de si el signo del radicando es negativo, cero o positivo. Ejemplo:

  $$2x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2} \Rightarrow$$
  $$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{4} = \frac{-2 \pm 6}{4} = \left\langle \begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array} \right.$$

3.8 Ecuaciones polinómicas de tercer grado.

- La ecuación de tercer grado ya simplificada será $ax^3+bx^2+cx+d=0$. En general no se puede resolver, a excepción de dos casos particulares:
  - Cuando no hay término independiente. En este caso podremos sacar factor común y una solución será x=0. Las otras soluciones se obtienen resolviendo la ecuación de segundo grado resultante. Ejemplo:

    $x^3-5x^2+6x=0$

    $$x\left(x^2-5x+6\right)=0\left\langle\begin{array}{c}x=0\\ x^2-5x+6=0\end{array}\right.$$

    $$x^2-5x+6=0\Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1}\Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm1}{2}=\left\langle\begin{array}{l}x=3\\ x=2\end{array}\right.$$

    luego las soluciones son 0, 2 y 3.
  - Cuando podemos encontrar una raíz entera (solución) del polinomio por el método de Ruffini. En este caso las otras soluciones podrán obtenerse resolviendo la ecuación de 2º grado resultante. Ejemplo: $x^3-7x+6=0$

	1	0	-7	$+6$
1		$+1$	$+1$	-6
	$+1$	$+1$	-6	0

$$x^2+x-6=0\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-6)}}{2\cdot1}\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm5}{2}=\left\langle\begin{array}{l}x=2\\ x=-3\end{array}\right.$$

luego las soluciones son 1, 2 y -3.

3.9 Ecuaciones polinómicas de cuarto grado.

- La ecuación de cuarto grado ya simplificada es $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$. En general no se puede resolver, a excepción de tres casos particulares siguientes:
  - Cuando no hay ni término independiente, ni término en x. En este caso podremos sacar factor común x^2 y una solución será x=0. Las otras soluciones se obtienen resolviendo la ecuación de segundo grado resultante. Ejemplo: $x^4-5x^3+6x^2=0$

    $$x^2\left(x^2-5x+6\right)=0\left\langle\begin{array}{c}x=0\\ x^2-5x+6=0\end{array}\right.$$

    $$x^2-5x+6=0\Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1}\Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm1}{2}=\left\langle\begin{array}{l}x=3\\ x=2\end{array}\right.$$

    luego las soluciones son 0, 2 y 3.
  - Cuando podemos encontrar dos raíces enteras (soluciones) del polinomio por el método de Ruffini. En este caso las otras soluciones podrán obtenerse resolviendo la ecuación de 2º grado resultante. Ejemplo:

    $3x^4-8x^3+x^2+8x-4=0$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 3 & -8 & +1 & +8 & -4 \\
1 & & +3 & -5 & -4 & +4 \\
\hline
 & 3 & -5 & -4 & +4 & \boxed{0} \\
-1 & & -3 & +8 & -4 & \\
\hline
 & 3 & -8 & +4 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$$3x^2-8x+4=0 \Rightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 3\cdot 4}}{2\cdot 3} \Rightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{64-46}}{6}=\frac{8\pm 4}{6}=\left\langle \begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Luego las soluciones son $1, -1, 2$ y $\frac{2}{3}$.

- Cuando la ecuación es bicuadrada, es decir, cuando no hay exponentes impares, ni término en x^3 ni término en x. Ejemplo: $x^4-5x^2+4=0$. En este caso se resuelve haciendo el cambio de variable $z=x^2$, con lo que la ecuación pasa a ser de 2º grado. Después se calcula z, y podremos hallar $x=\pm\sqrt{z}$.
  $x^4-5x^2+4=0$, si $z=x^2$, tendremos: $z^2-5z+4=0$

  $$z=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}=\left\langle \begin{array}{l} z=4 \\ z=1 \end{array}\right.$$

  $$\left\langle \begin{array}{lll} \text{Si} & z=4 & x=\pm\sqrt{4}=\pm 2 \\ \text{Si} & z=1 & x=\pm\sqrt{1}=\pm 1 \end{array}\right.$$ luego las soluciones son $1, -1, 2$ y -2.

3.10 Ecuaciones racionales.

- Una ecuación racional es aquella en la que la variable x se encuentra en el denominador de alguna fracción. Para resolverlas hay que hallar el m.c.m. de los denominadores, eliminar después todos los denominadores multiplicando por dicho m.c.m. y resolver la ecuación polinómica resultante.
  Ejemplo:

  $$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}=\frac{3}{10} \Rightarrow \frac{10(x+3)}{10x(x+3)}+\frac{10x}{10x(x+3)}=\frac{3x(x+3)}{10x(x+3)} \Rightarrow 10x+30+10x=3x^2+9x \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow -3x^2+11x+30=0 \Rightarrow x=\frac{-11\pm\sqrt{11^2-4\cdot(-3)\cdot 30}}{2\cdot(-3)} \Rightarrow x=\frac{-11\pm\sqrt{121+360}}{-6} \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow x=\frac{-11\pm 21{,}931}{-6}=\left\langle \begin{array}{l} -1{,}82 \\ 5{,}49 \end{array}\right.$$

- En algunas ocasiones puede ocurrir que la solución final no sea válida, porque se anula algún denominador. Ejemplo: $\frac{2}{2-x}-\frac{1}{x-3}=\frac{2}{x^2-5x+6}$

  $$\left.\begin{array}{r} 2-x=-(x-2) \\ x-3=x-3 \\ x^2-5x+6=(x-2)(x-3) \end{array}\right\} \text{m.c.m.}=(x-2)(x-3)$$

$$\frac{-2}{x-2}-\frac{1}{x-3}=\frac{2}{(x-2)(x-3)}\Rightarrow\frac{-2(x-3)}{(x-2)(x-3)}-\frac{1(x-2)}{(x-2)(x-3)}=\frac{2}{(x-2)(x-3)}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2(x-3)-(x-2)=2\Rightarrow -2x+6-x+2=2\Rightarrow -3x=-6\Rightarrow x=2 \text{ NO VÁLIDA}$$

3.11 Ecuaciones irracionales.

- Una ecuación irracional es aquella en la que la variable x se encuentra en el radicando de alguna raíz. Para resolverla hay que aislar la raíz, elevar al cuadrado ambos miembros y resolver la ecuación polinómica resultante.
  Ejemplo: $2-\sqrt{x-2}=x$
  $$2-\sqrt{x-2}=x\Rightarrow 2-x=\sqrt{x-2}\Rightarrow(2-x)^2=\left(\sqrt{x-2}\right)^2\Rightarrow 4-4x+x^2=x-2\Rightarrow$$
  $$\Rightarrow x^2-5x+6=0\Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1}\Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}\Rightarrow x=\frac{5\pm1}{2}=\left\langle\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right.$$
  En algunas ocasiones, puede que sea necesario repetir el proceso de asilar y elevar al cuadrado dos veces, hasta conseguir eliminar todas las raíces.
  Ejemplo:
  $$\sqrt{x-1}-\sqrt{x+4}=1\Rightarrow\sqrt{x-1}+1=\sqrt{x+4}\Rightarrow\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2=\left(\sqrt{x+4}\right)^2\Rightarrow$$
  $$x-1+2\sqrt{x-1}+1=x+4\Rightarrow 2\sqrt{x-1}=4\Rightarrow\left(2\sqrt{x-1}\right)^2=4^2\Rightarrow$$
  $$\Rightarrow 4(x-1)=16\Rightarrow 4x-4=16\Rightarrow 4x=20\Rightarrow x=5$$
  Nota: la solución es cierta con signo antecedente en ambas raíces negativo.

3.12 Ecuaciones exponenciales.

- Una ecuación exponencial es aquella en la que la variable x se encuentra en el exponente de alguna potencia. Para resolver estas ecuaciones hay que aplicar las propiedades de las potencias y luego realizar el cambio de variable $z=a^x$.
  Ejemplo: $2^x+2^{2x}=72$
  $$2^x+2^{2x}=72\Rightarrow 2^x+\left(2^x\right)^2=72\Rightarrow \text{Si}\quad z=2^x\quad z+z^2=72\Rightarrow$$
  $$\Rightarrow z^2+z-72=0\Rightarrow z=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-72)}}{2\cdot1}\Rightarrow z=\frac{-1\pm\sqrt{1+288}}{2}\Rightarrow z=\frac{-1\pm17}{2}=\left\langle\begin{matrix}8\\-9\end{matrix}\right.$$
  $$\left\langle\begin{matrix}\text{Si}\quad z=8\quad 2^x=8\quad\left(2^x=2^3\right)\quad x=\log_2 8=3\\ \text{Si}\quad z=-9\quad 2^x=-9\quad x=\log_2(-9)\text{ no existe}\end{matrix}\right.$$

3.13 Ecuaciones logarítmicas.

- Una ecuación logarítmica es aquella en la que la variable x se encuentra en el argumento de algún logaritmo. Para resolver estas ecuaciones hay que aplicar las propiedades de los logaritmos, hasta conseguir tener en ambos miembros un único logaritmo, es decir, $\log(\text{expresión}1)=\log(\text{expresión}2)$. A continuación se eliminan los logaritmos y se resuelve la ecuación resultante.
  Ejemplo: $2\log(2x+2)-\log(x+6)=1$

$$2\log(2x+2)-\log(x+6)=1 \Rightarrow \log(2x+2)^2-\log(x+6)=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log\frac{(2x+2)^2}{x+6}=\log 10 \Rightarrow \frac{4x^2+8x+4}{x+6}=10 \Rightarrow 4x^2+8x+4=10x+60 \Rightarrow$$

$$4x^2-2x-56=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 4\cdot(-56)}}{2\cdot 4} \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+896}}{8} \Rightarrow x=\frac{2\pm 30}{8}=\left\langle \begin{array}{l} 4 \\ -3{,}5 \end{array}\right.$$

La segunda solución no es válida porque al sustituir tendríamos logaritmo de un número negativo, que no existe. La única solución es $x=4$, y la comprobación sería esta: $2\log 10-\log 10=1 \Rightarrow 2-1=1$.

3.14 Sistemas de ecuaciones. Método de Gauss.

- Un sistema lineal de 2 ecuaciones con 2 incógnitas es una expresión de la forma: $\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{array}\right\}$. O sea, se multiplican las incógnitas por números o coeficientes, y se suman o restan.

Ejemplo: $\left.\begin{array}{r} 2x-3y=1 \\ x+2y=4 \end{array}\right\}$. La solución del sistema es una pareja de valores -uno para cada incógnita- que cumplen las dos ecuaciones. Se puede resolver el sistema por cualquiera de los tres métodos siguientes:

- Igualación: se despeja la misma incógnita y se igualan las expresiones.

  $$\left.\begin{array}{r} 2x-3y=1 \\ x+2y=4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{3y+1}{2} \\ x=-2y+4 \end{array}\right\} \frac{3y+1}{2}=\frac{2(-2y+4)}{2} \Rightarrow 3y+1=-4y+8 \Rightarrow$$

  $\Rightarrow 3y+4y=-1+8 \Rightarrow 7y=7 \Rightarrow y=1$. Como $y=1$, por ejemplo, en la 1ª ecuación tendremos: $2x-3=1 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$.

- Sustitución: se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y se sustituye su expresión en la otra ecuación.

  $$\left.\begin{array}{r} 2x-3y=1 \\ x+2y=4 \end{array}\right\} \underline{x=-2y+4} \Rightarrow 2(-2y+4)-3y=1 \Rightarrow -4y+8-3y=1 \Rightarrow$$

  $\Rightarrow -4y-3y=1-8 \Rightarrow -7y=-7 \Rightarrow y=1$. Como $y=1$, por ejemplo, en la 1ª ecuación tendremos: $2x-3=1 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$.

- Reducción: se buscan coeficientes opuestos para una incógnita, para a continuación sumar las dos ecuaciones. $\left.\begin{array}{r} 2x-3y=1 \\ x+2y=4 \end{array}\right\}$ 2ª por $-2 \Rightarrow$

  $$\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 2x-3y=1 \\ -2x-4y=-8 \end{array}\right\}+ \\ \hline -7y=-7 \end{array} \Rightarrow -7y=-7 \Rightarrow y=1$$

  Como $y=1$, por ejemplo, en la 1ª ecuación tendremos: $2x-3=1 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$.

- Los sistemas lineales de 3 ecuaciones con 3 incógnitas se resuelven por el método de Gauss, que consiste en realizar transformaciones elementales hasta conseguir que sea triangular superior, es decir, hasta que en la segunda ecuación no haya incógnita x, y en la 3ª ecuación no haya ni incógnita x ni incógnita y. Una vez que el sistema sea triangular superior se resuelve de forma natural, razonando desde abajo hacia arriba. Las transformaciones elementales que se pueden realizar son las siguientes:

- Intercambiar de lugar las ecuaciones. Es conveniente que el primer coeficiente de x en la 1ª ecuación sea 1.
- Multiplicar una ecuación por un número.
- Sumarle a una ecuación otra cualquiera del sistema multiplicada por un número. Esta es la transformación más habitual.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x-y+z=2\\ 2x-3y+z=-1\\ x+2y-z=2\end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l}\mathbf{2^a}=2^a-2\cdot 1^a\\ \mathbf{3^a}=3^a-1^a\end{array}} \left.\begin{array}{r}x-y+z=2\\ -y-z=-5\\ 3y-2z=0\end{array}\right\} \boxed{\mathbf{3^a}=3^a+3\cdot 2^a} \left.\begin{array}{r}x-y+z=2\\ -y-z=-5\\ -5z=-15\end{array}\right\} \boxed{\left.\begin{array}{l}x=1\\ y=2\\ z=3\end{array}\right\}}$$

Operaciones: $$\left(\begin{array}{r}-2x+2y-2z=-4\\ 2x-3y+z=-1\\ \hline -y-z=\ -5\end{array}+ \quad \begin{array}{r}-x+y-z=-2\\ x+2y-z=2\\ \hline 3y-2z=0\end{array}+\right)\left(\begin{array}{r}-3y-3z=-15\\ 3y-2z\quad=0\\ \hline -5z\ =-15\end{array}+\right)$$

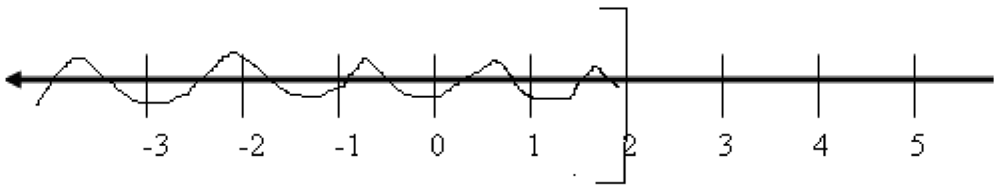
Ejemplo: $$\left.\begin{array}{r}x+y+z=2\\ x-y+z=6\\ x-y-z=0\end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{l}\mathbf{2^a}=2^a-1^a\\ \mathbf{3^a}=3^a-1^a\end{array}} \left.\begin{array}{r}x+y+z=2\\ -2y=4\\ -2y-2z=-2\end{array}\right\} \boxed{\left.\begin{array}{l}x=1\\ y=-2\\ z=3\end{array}\right\}}$$ Y ya está.

Operaciones: $$\left(\begin{array}{r}-x-y-z=-2\\ x-y+z=6\\ \hline -2y\quad=\ 4\end{array}+ \quad \begin{array}{r}-x-y-z=-2\\ x-y-z=0\\ \hline -2y-2z=-2\end{array}+\right)$$

3.15 Inecuaciones con una incógnita.

Una inecuación es una desigualdad algebraica en la que aparecen números e incógnitas. Para resolver una inecuación de primer grado se sigue el mismo proceso que en las ecuaciones, pero teniendo en cuenta que, si se multiplica o se divide por un número negativo, el signo de la desigualdad cambia de sentido: $2<5$ pero $-2>-5$. Para evitar tener que cambiar de signo es conveniente colocar siempre la variable x en el miembro en que su coeficiente sea positivo. Ejemplo: $2x+1\geq -1+3x \Rightarrow 1+1\geq 3x-2x \Rightarrow 2\geq x$.

La solución ahora ya no es un número, sino un intervalo de infinitos números. Solución=$(-\infty,2]$. Es decir, los números menores o iguales que 2.



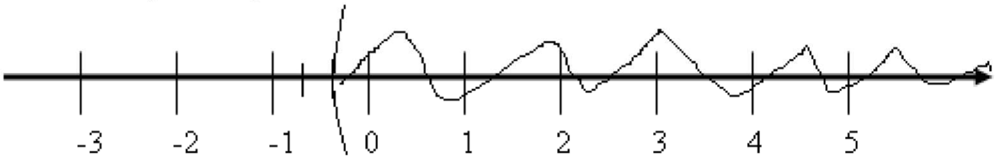
Cualquier número del intervalo $(-\infty,2]$ cumple la inecuación Por ejemplo, si x=1, se obtiene $3\geq 2$, que es cierto. Sin embargo, si el número no pertenece al intervalo, por ejemplo $x=3$, la inecuación quedaría $7\geq 8$, que es falso.

- Si la inecuación es de primer grado con denominadores, entonces se resuelve igual que las ecuaciones de primer grado, hallando el m.c.m. y eliminando los denominadores. Ejemplo:

$$\frac{3x}{2}-\frac{x-1}{3}>\frac{x}{6}\Rightarrow\frac{9x}{6}-\frac{2(x-1)}{6}>\frac{x}{6}\Rightarrow 9x-2(x-1)>x\Rightarrow$$

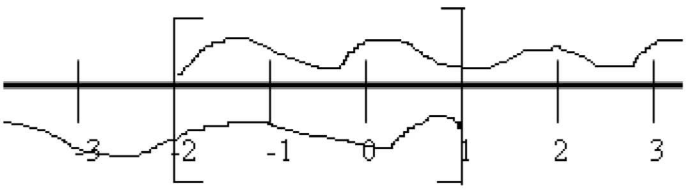
$$\Rightarrow 9x-2x+2>x\Rightarrow 9x-2x-x>-2\Rightarrow 6x>-2\Rightarrow x>\frac{-2}{6}\Rightarrow x>-\frac{1}{3}$$

Solución=$\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$. Es decir, los números mayores que $-\frac{1}{3}$.



- Los sistemas de dos inecuaciones de primer grado se resuelven hallando la solución de cada inecuación por separado, para después hacer la intersección de dichas soluciones. Ejemplo: $\left.\begin{matrix}2x-1\le 3x+1\\ 2x+2\le 4\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}-1-1\le 3x-2x\\ 2x\le 4-2\end{matrix}\right\}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}-2\le x\\ 2x\le 2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}-2\le x\\ x\le 1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{matrix}Sol_1=[-2,+\infty)\\ Sol_2=(-\infty,1]\end{matrix}\Rightarrow \text{Solución}=[-2,1]$$

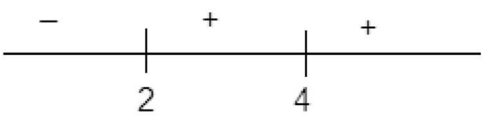


- Las inecuaciones de 2º grado se resuelven de forma diferente. El proceso se basa en estudiar el signo del polinomio y tenemos dos posibilidades o métodos, el analítico y el gráfico. Ejemplo: $-x^2+6x-8\ge 0$.
  - Analíticamente: descomponemos en factores el polinomio y estudiamos el signo de cada factor, para finalmente responder a la pregunta ¿cuándo el polinomio es positivo o cero?

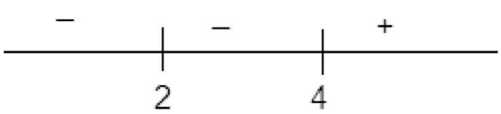
$$-x^2+6x-8=0\Rightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot(-1)\cdot(-8)}}{2\cdot(-1)}\Rightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{36-32}}{-2}\Rightarrow x=\frac{-6\pm 2}{-2}=\left\langle\begin{matrix}2\\4\end{matrix}\right.$$

La descomposición en factores es: $-x^2+6x-8=-(x-2)(x-4)$.

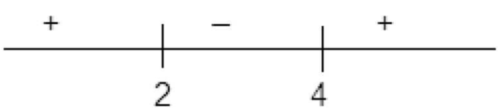
Signo de $x-2$:



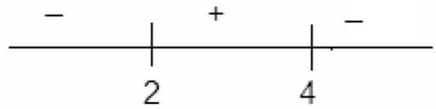
Signo de $x-4$:



Signo de $(x-2)(x-4)$:

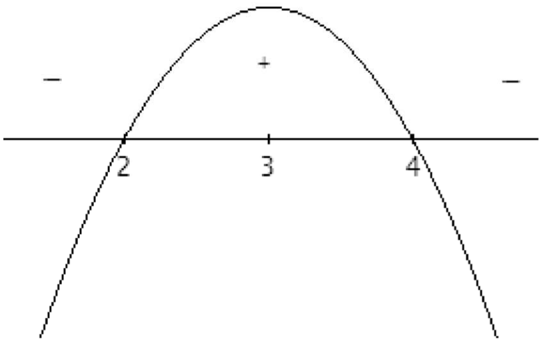


Signo de $-(x-2)(x-4)$:



Por tanto, la solución de la inecuación $-x^2+6x-8\geq 0$ es el intervalo donde el polinomio es positivo o cero, es decir: Sol=$[2,4]$.

- Gráficamente: realizamos una representación esquemática de la parábola $f(x)=-x^2+6x-8$ que alcanzará un máximo y cortará al eje de abscisas en 2 y 4, y después respondemos a la pregunta ¿Cuándo la parábola es positiva o cero (está por encima o justo sobre del eje OX)?.

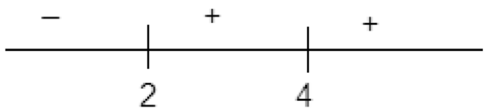


Observando la gráfica se ve que la parábola está por encima del eje de abscisas entre el 2 y el 4. Por tanto, la solución de la inecuación es: Sol=$[2,4]$.

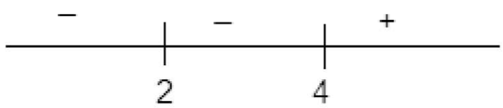
- Las inecuaciones racionales se resuelven igual que las inecuaciones de 2º grado, estudiando el signo del numerador y el singno del denominador.

Ejemplo: $\dfrac{x-2}{x-4}>0$

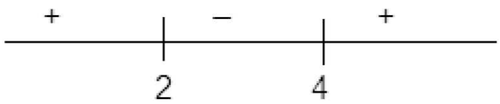
Signo de $x-2$:



Signo de $x-4$:



Signo de $\dfrac{x-2}{x-4}$:



La solución de la inecuación $\dfrac{x-2}{x-4}>0$ es el intervalo donde la fracción es positiva, es decir Sol=$(-\infty,2)\cup(4,+\infty)$.

Nota: El número 4 está excluido porque anula el denominador. En algún caso, en el que la desigualdad no estuviese expresada respecto a 0, debemos operar hasta plantear dicha desigualdad de la fracción respecto a 0, para así poder aplicar el proceso anterior de estudio de los signos.