

Tema 4: Trigonometría.

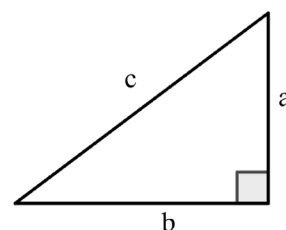
4.1 Teorema de Pitágoras y triángulos semejantes.

- La trigonometría es la rama de las matemáticas que estudia el triángulo y las propiedades y aplicaciones de las funciones trigonométricas. La trigonometría se apoya en dos pilares fundamentales:
 - **El teorema de Pitágoras.**
 - **La semejanza de triángulos.**

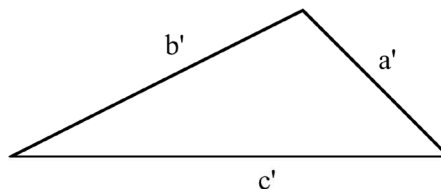
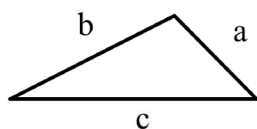
Tanto es así que, absolutamente todo, se podría hacer con estas dos herramientas; pero entonces, los cálculos serían mucho más laboriosos.

- El teorema de Pitágoras afirma que, en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$c^2 = a^2 + b^2$$



- Dos triángulos son semejantes si tienen la misma forma; es decir, si tienen los mismos ángulos. Si dos triángulos son semejantes, entonces sus lados son proporcionales.

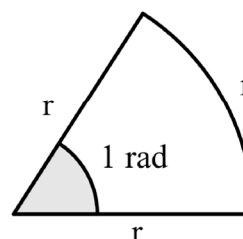


$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

4.2 Medida de ángulos. El radián.

- Los ángulos se miden normalmente en grados sexagesimales. Un ángulo completo (delimitado por la circunferencia) mide 360° . A su vez, un grado sexagesimal tiene $60'$ (minutos) y un minuto tiene $60''$ (segundos).
- Otra unidad para medir ángulos es el radián. El radián es un ángulo especial en el que el radio y el arco tienen la misma medida. ¿Cuánto mide en grados un radián?

$$\begin{aligned} 360^\circ &\longrightarrow 2\pi \text{ rad} \\ x^\circ &\longrightarrow 1 \text{ rad} \\ x &= \frac{360^\circ \cdot 1 \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}} = 57,29577951^\circ. \end{aligned}$$



- A partir de estas definiciones, es fácil comprobar las siguientes fórmulas:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}, \quad \cot g \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Además, podemos demostrar la fórmula fundamental de la trigonometría:

$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ que no es más que el teorema de Pitágoras escrito de otra

$$\text{forma: } \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1.$$

Análogamente, también se demuestran las siguientes fórmulas:

$$\sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \Rightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2} = \sec^2 \alpha.$$

$$\operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \cot g^2 \alpha \Rightarrow 1 + \cot g^2 \alpha = 1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2} = \operatorname{cosec}^2 \alpha.$$

Ejemplo: sabiendo que $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, hallar las restantes razones

trigonométricas. Por el teorema fundamental de la trigonometría,

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \sin^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5} \text{ y las restantes}$$

razones se calculan fácilmente: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3}$.

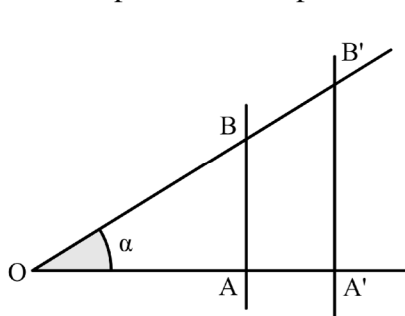
$$\sec \alpha = \frac{5}{3} \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{5}{4} \quad \cot g \alpha = \frac{3}{4}$$

- Observaciones importantes sobre las razones trigonométricas:

- Las razones trigonométricas principales son seno, coseno y tangente. Las demás son sus fracciones inversas.

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \quad \text{y} \quad \cot g \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

- Las razones trigonométricas dependen sólo del ángulo y son invariantes o independientes respecto del triángulo rectángulo inicial elegido.



Por una parte, $\sin \alpha = \frac{AB}{OB}$ y, por otra parte,

$$\sin \alpha = \frac{A'B'}{OB'}.$$

Pero ambos valores coinciden porque los triángulos son semejantes:

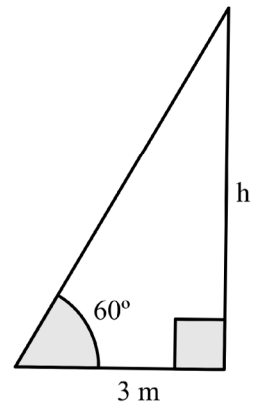
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OB} \Rightarrow \frac{A'B'}{OB'} = \frac{AB}{OB}.$$

- Tanto el seno como el coseno son números comprendidos entre 0 y 1, porque los catetos son siempre menores que la hipotenusa. Las otras razones sí pueden ser mayores que 1.
- Las razones trigonométricas son números sin unidades cuyos valores pueden calcularse en tablas o con la calculadora. Por tanto, pueden emplearse siempre como datos conocidos a la hora de resolver problemas.

Ejemplo: calcular la altura de una farola sabiendo que, desde un punto del suelo situado a 3 m de su base, el ángulo de visualización es de 60° . En primer lugar, respondemos a la pregunta: ¿cuál razón trigonométrica que relaciona los datos conocidos con la incógnita? Y, claro, la respuesta es la tangente. La altura de la farola puede calcularse porque la tangente de 60° es un valor conocido que podemos usar:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{3} \Rightarrow h = 3 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$$

$$h = 3 \cdot 1,73205 \Rightarrow h = 5,196152 \text{ m}$$



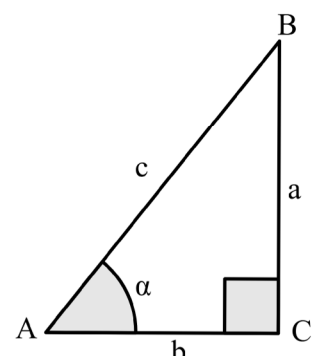
- Una vez conocida cualquier razón trigonométrica, se puede obtener el ángulo mediante las funciones trigonométricas inversas. Estas funciones inversas pueden obtenerse con la calculadora tecleando primero Shift y, después, la razón correspondiente: seno, coseno o tangente.
 - o El ángulo cuyo seno vale 'x' se expresa así: $\alpha = \operatorname{arcsen}(x)$ y sirve para obtener el ángulo cuando conocemos el seno.
Ejemplo: $\operatorname{sen} \alpha = 0,25 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arcsen}(0,25) = 14,477512^\circ = 14^\circ 28' 39,04''$.
 - o El ángulo cuyo coseno vale 'x' se expresa así: $\alpha = \operatorname{arccos}(x)$ y sirve para obtener el ángulo cuando conocemos el coseno.
Ejemplo: $\operatorname{cos} \alpha = 0,37 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arccos}(0,37) = 68,284382^\circ = 68^\circ 17' 03,78''$.
 - o El ángulo cuya tangente vale 'x' se expresa así: $\alpha = \operatorname{arctg}(x)$ y sirve para obtener el ángulo cuando conocemos la tangente.
Ejemplo: $\operatorname{tg} \alpha = 4,25 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}(4,25) = 76,75948^\circ = 76^\circ 45' 34,13''$.
- Hay varios ángulos, precisamente los más importantes, para los que no es necesario utilizar la calculadora, ya que sus razones pueden memorizarse utilizando la siguiente tabla (las raíces "superfluas" ayudan a recordar fácilmente el valor del número):

	0°	30°	45°	60°	90°
Seno	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
Coseno	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$

4.4 Resolución de triángulos rectángulos.

- Resolver un triángulo consiste en calcular sus lados, sus ángulos, su perímetro y su área. Para resolver un triángulo rectángulo utilizaremos las siguientes herramientas:
 - El teorema de Pitágoras (aunque no es imprescindible).
 - Razones trigonométricas seno, coseno y tangente, para hallar los lados.
 - Las funciones trigonométricas inversas, para obtener los ángulos.

Esta será la situación inicial, en la que cada lado se expresa utilizando la misma letra que su ángulo opuesto.

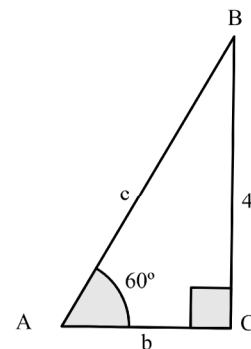


El ángulo C es recto y mide 90°, por lo que los ángulos A y B serán complementarios para que la suma total sea 180°.

Ejemplo: resolver el siguiente triángulo:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{4}{b} \Rightarrow b \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 4 \Rightarrow b = \frac{4}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{4}{1,732} = 2,3094 .$$

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{4}{c} \Rightarrow c \cdot \operatorname{sen} 60^\circ = 4 \Rightarrow c = \frac{4}{\operatorname{sen} 60^\circ} = \frac{4}{0,866} = 4,6188 .$$



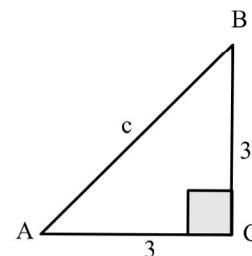
Claramente el ángulo B mide 30°. El perímetro es 10,9282 y el área será:

$$\text{área} = \frac{a \cdot b}{2} = 4,6188 .$$

Ejemplo: resolver el siguiente triángulo:

$$\operatorname{tg} A = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow A = \operatorname{arctg}(1) = 45^\circ \Rightarrow B = 45^\circ \text{ igualmente.}$$

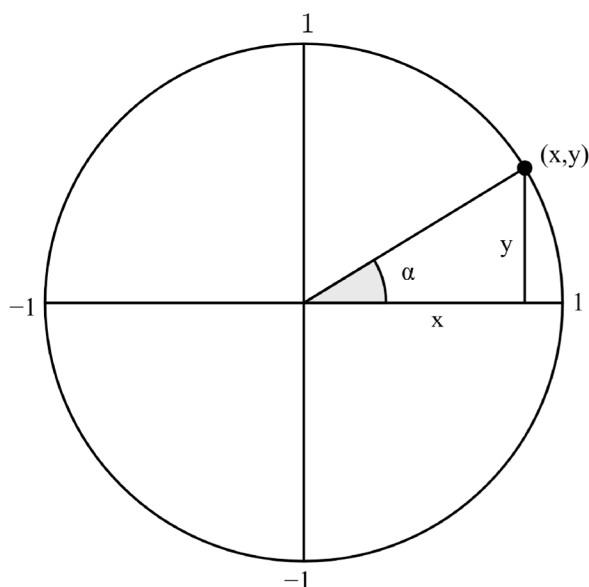
$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{3}{c} \Rightarrow c \cdot \operatorname{sen} 45^\circ = 3 \Rightarrow c = \frac{3}{\operatorname{sen} 45^\circ} = \frac{3}{0,7071} = 4,2426$$



El perímetro es 10,2426 y el área = $\frac{a \cdot b}{2} = \frac{9}{2} = 4,5$.

4.5 Ampliación de las razones para ángulos cualquiera. Signos.

- Consideremos la circunferencia de centro el origen $O = (0,0)$ y radio 1. Esta circunferencia se llama goniométrica. Como el radio de la circunferencia o hipotenusa del triángulo es 1, las razones trigonométricas coseno y seno son las coordenadas del punto (x,y) , respectivamente.



$$\boxed{\cos \alpha = x}$$

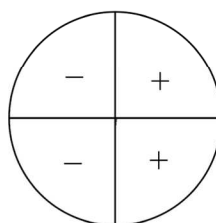
$$\boxed{\operatorname{sen} \alpha = y}$$

Es decir, el coseno es la 1ª coordenada del punto y el seno es la 2ª coordenada del punto.

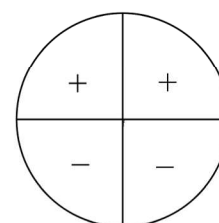
Hasta ahora, habíamos definido las razones trigonométricas sólo para ángulos agudos, Sin embargo, gracias a esta nueva interpretación, podemos definir el seno y el coseno para cualquier ángulo.

Además, se define: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$.

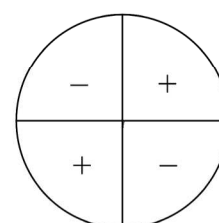
Teniendo en cuenta estas nuevas definiciones, los signos de las razones trigonométricas en cada cuadrante son los siguientes:



cos α



sen α



tg α

Ejemplo: sabiendo que $\operatorname{cosec} \alpha = 2$ y que $\alpha \in 2^\circ$ cuadrante, hallar las restantes razones trigonométricas. En primer lugar, es fácil calcular el seno:

$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2}$. Y ahora, por el teorema fundamental de la trigonometría,

$$\cos^2 \alpha + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{3}{4}}$$

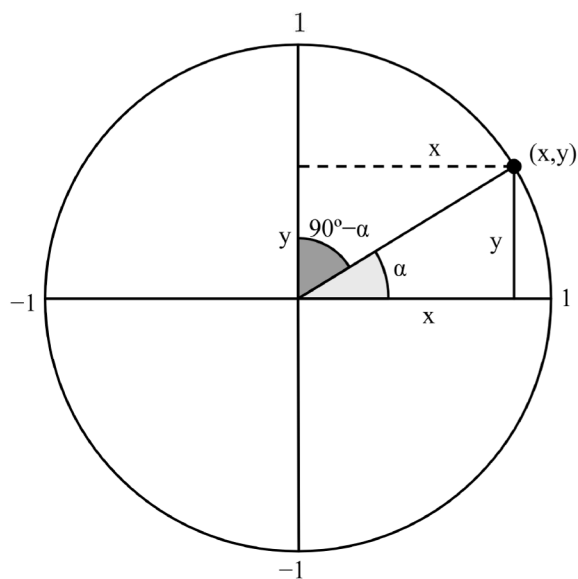
Como el ángulo α pertenece al 2° cuadrante, el coseno debe tener signo negativo,

luego: $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Las restantes razones es muy fácil calcularlas:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{sec} \alpha = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{y} \quad \operatorname{cotg} \alpha = -\sqrt{3}.$$

4.6 Relaciones entre las razones de ángulos de diferentes cuadrantes.

- Ángulos complementarios. Son aquellos que suman 90° .



Si uno de ellos es α , el otro será $90^\circ - \alpha$.
Sus razones son:

$$\begin{array}{ll} \cos \alpha = x & \operatorname{sen} \alpha = y \\ \cos(90^\circ - \alpha) = y & \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) = x \end{array}$$

El coseno de uno de ellos es el seno del otro y viceversa; es decir, tienen sus razones trigonométricas intercambiadas.

$$\boxed{\cos(90^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha}$$

- Ángulos suplementarios. Suman 180° .

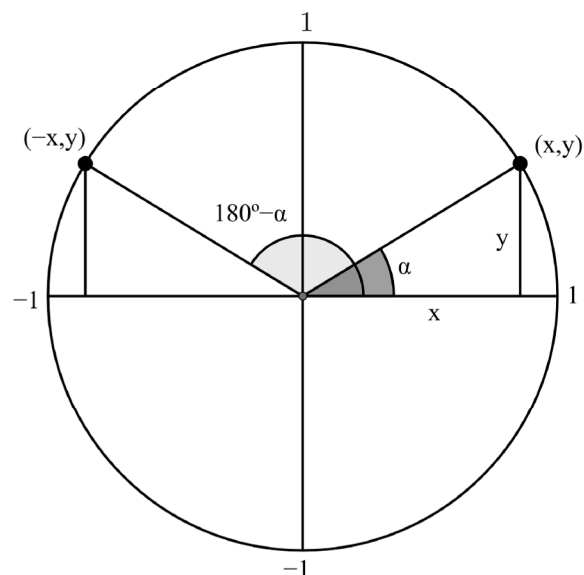
Si un ángulo es α , el otro será $180^\circ - \alpha$. Sus razones son:

$$\begin{array}{ll} \cos \alpha = x & \operatorname{sen} \alpha = y \\ \cos(180^\circ - \alpha) = -x & \operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = y \end{array}$$

Es decir, igual seno y cosenos opuestos.

$$\boxed{\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha}$$



- Ángulos que se diferencian en 180° .
Si un ángulo es α , el otro será $180^\circ + \alpha$. Sus razones son:

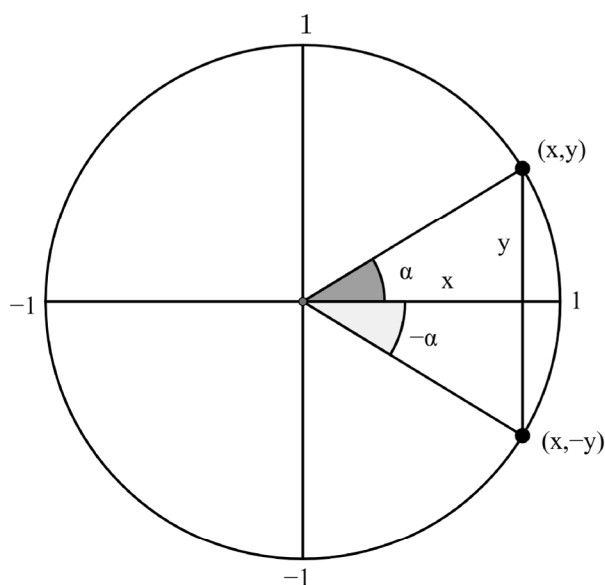
$$\begin{aligned} \cos \alpha &= x & \text{sen } \alpha &= y \\ \cos(180^\circ + \alpha) &= -x & \text{sen}(180^\circ + \alpha) &= -y \end{aligned}$$

Es decir, senos y cosenos opuestos.

$$\boxed{\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha}$$

$$\boxed{\text{sen}(180^\circ + \alpha) = -\text{sen } \alpha}$$

- Ángulos opuestos.



Si un ángulo es α , el otro será $-\alpha$ ($-\alpha = 360^\circ - \alpha$). Sus razones son:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= x & \text{sen } \alpha &= y \\ \cos(-\alpha) &= x & \text{sen}(-\alpha) &= -y \end{aligned}$$

Es decir, igual coseno y senos opuestos.

$$\boxed{\cos(-\alpha) = \cos \alpha}$$

$$\boxed{\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen } \alpha}$$

- En definitiva, observamos que existen dos rectas simétricas respecto al origen de coordenadas, que determinan cuatro ángulos que tienen las mismas razones trigonométricas, salvo el signo:

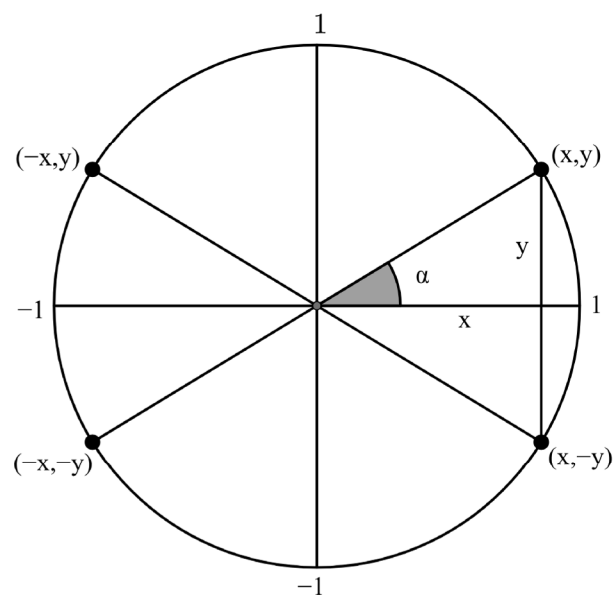
$$\begin{aligned} \cos \alpha &= x & \text{sen } \alpha &= y \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= -x & \text{sen}(180^\circ - \alpha) &= y \\ \cos(180^\circ + \alpha) &= -x & \text{sen}(180^\circ + \alpha) &= -y \\ \cos(-\alpha) &= x & \text{sen}(-\alpha) &= -y \end{aligned}$$

Ejemplo: obtener sin calculadora las siguientes razones trigonométricas:

$$\cos 225^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{sen } 150^\circ = \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 300^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

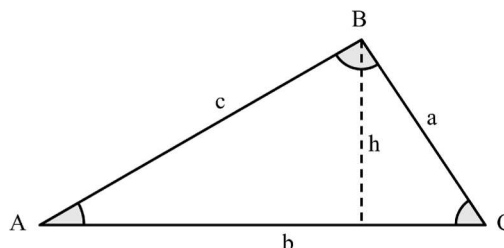


4.7 Triángulos cualesquiera. Teoremas del seno y del coseno.

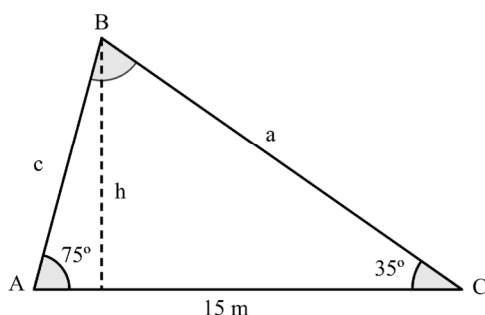
- El teorema del seno afirma que las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen } A = \frac{h}{c} \\ \text{sen } C = \frac{h}{a} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} h = c \cdot \text{sen } A \\ h = a \cdot \text{sen } C \end{array} \right\}$$

$$c \cdot \text{sen } A = a \cdot \text{sen } C \Rightarrow \frac{c}{\text{sen } C} = \frac{a}{\text{sen } A}$$



El mismo razonamiento puede hacerse trazando otra altura. Así obtenemos la expresión general del teorema del seno:



$$\boxed{\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}}$$

Ejemplo: resolver este triángulo de la izquierda:

Claramente, el ángulo B será de 70° para que la suma de los tres ángulos sea 180° .

Aplicaremos el teorema del seno:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \quad (\text{utilizando la letra b que}$$

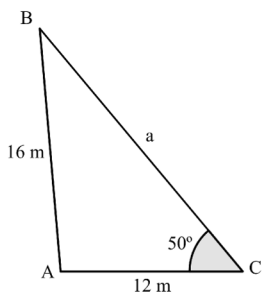
tiene más datos conocidos). $\frac{a}{\text{sen } 75^\circ} = \frac{15}{\text{sen } 70^\circ} \Rightarrow a = \frac{15 \cdot \text{sen } 75^\circ}{\text{sen } 70^\circ} = 15,41875 \text{ m}$

$$\text{Ahora el lado c: } \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow \frac{15}{\text{sen } 70^\circ} = \frac{c}{\text{sen } 35^\circ} \Rightarrow \frac{15 \cdot \text{sen } 35^\circ}{\text{sen } 70^\circ} = c$$

De donde: $c = 9,1558 \text{ m}$. Para calcular el área se necesita el valor de la altura,

que se obtiene con el seno: $\text{sen } 35^\circ = \frac{h}{a} \Rightarrow h = 15,41875 \cdot \text{sen } 35^\circ = 8,8438 \text{ m}$.

El área es: $S = \frac{15 \cdot 8,8438}{2} = 66,3287 \text{ m}^2$ y el perímetro: $P = 39,5745 \text{ m}$.



Ejemplo: resolver este triángulo:

Aplicaremos el teorema del seno: $\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$

$$\frac{12}{\text{sen } B} = \frac{16}{\text{sen } 50^\circ} \Rightarrow \frac{12 \cdot \text{sen } 50^\circ}{16} = \text{sen } B$$

Luego, $\text{sen } B = 0,574533 \Rightarrow B = \arcsen 0,574533 \Rightarrow B = 35,066957^\circ$

Expresado en grados, minutos y segundos: $B = 35^\circ 04' 01,05''$.

$$A = 180^\circ - (B + C) = 94,933042^\circ = 94^\circ 55' 58,95''.$$

$$\text{Ahora, el lado } a: \frac{a}{\sin 94,9330^\circ} = \frac{16}{\sin 50^\circ} \Rightarrow a = \frac{16 \cdot \sin 94,9330^\circ}{\sin 50^\circ}$$

De donde, $a = 20,809150 \text{ m}$. Para calcular el área, se necesita el valor de la altura (no importa que sea exterior al triángulo):

$$\sin 50^\circ = \frac{h}{a} \Rightarrow h = 20,809150 \cdot \sin 50^\circ = 15,940734 \text{ m}. \text{ El área será entonces:}$$

$$S = \frac{12 \cdot 15,940734}{2} = 95,644404 \text{ m}^2 \text{ y el perímetro: } P = 48,80915 \text{ m}.$$

- El teorema del coseno es una generalización del teorema de Pitágoras.

Se demuestra trazando la altura y aplicando el teorema de Pitágoras a los dos triángulos rectángulos.

En el triángulo de la izquierda:

$$c^2 = (b - x)^2 + h^2$$

En el triángulo de la derecha:

$$a^2 = x^2 + h^2$$

Restando ambas expresiones:

$$c^2 - a^2 = (b - x)^2 - x^2$$

$$\text{Operando tenemos: } c^2 - a^2 = b^2 - 2 \cdot b \cdot x + x^2 - x^2 \Rightarrow c^2 - a^2 = b^2 - 2 \cdot b \cdot x.$$

Ahora bien, 'x' puede expresarse a partir del coseno del ángulo C así:

$$\cos C = \frac{x}{a} \Rightarrow a \cdot \cos C = x. \text{ Al sustituir en la expresión anterior tenemos una}$$

$$\text{nueva fórmula: } c^2 - a^2 = b^2 - 2 \cdot b \cdot a \cdot \cos C \Rightarrow \boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C}$$

Trazando las otras alturas se obtienen las otras expresiones de este teorema:

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B} \text{ y } \boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A}.$$

El teorema del coseno es imprescindible en dos situaciones o casos, en los que el teorema del seno no es válido como herramienta inicial:

- **Cuando se conocen los tres lados.**
- **Cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.**

Ejemplo: resolver este triángulo:

El teorema del seno no sirve inicialmente, ya que siempre tendríamos una ecuación con dos incógnitas.

Aplicamos la primera expresión del teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$$

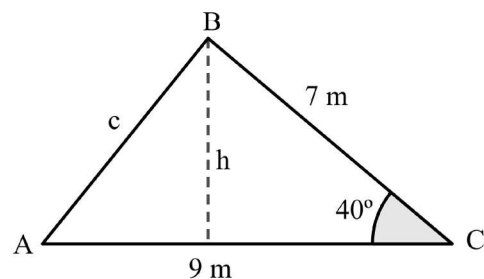
$$c^2 = 7^2 + 9^2 - 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \cos 40^\circ$$

$$c^2 = 49 + 81 - 126 \cdot 0,766044$$

$$c^2 = 33,4784 \Rightarrow c = 5,786052 \text{ cm}$$

Los ángulos pueden calcularse por el teorema del seno que se aplica más fácil:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{7}{\sin A} = \frac{5,786052}{\sin 40^\circ} \Rightarrow \frac{7 \cdot \sin 40^\circ}{5,786052} = \sin A$$



Luego: $\text{sen } A = 0,777648 \Rightarrow A = \arcsen 0,777648 \Rightarrow A = 51,045751^\circ$

Que escrito en grados minutos y segundos es $A = 51^\circ 02' 44,70''$

$B = 180^\circ - (A + C) = 88,954248^\circ = 88^\circ 57' 15,30''$. Para calcular el área obtenemos previamente el valor de la altura.

$$\text{sen } 40^\circ = \frac{h}{a} \Rightarrow h = 7 \cdot \text{sen } 40^\circ = 4,499513 \text{ cm}.$$

El área será entonces $S = \frac{9 \cdot 4,499513}{2} = 20,247809 \text{ cm}^2$ y el perímetro

$$P = 21,786052 \text{ m}.$$

Ejemplo: resolver este triángulo: (tampoco ahora sirve el teorema del seno).

Aplicamos la primera expresión del teorema del coseno (valdría cualquiera):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$$

$$5^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos C$$

$$25 = 36 + 64 - 96 \cdot \cos C$$

$$96 \cdot \cos C = 36 + 64 - 25$$

$$96 \cdot \cos C = 75$$

$$\cos C = \frac{75}{96} = 0,78125$$

Luego,

$$\cos C = 0,78125 \Rightarrow C = \arccos 0,78125 \Rightarrow C = 38,624833^\circ$$

Que, escrito en grados minutos y segundos, es $C = 38^\circ 37' 29,4''$

Aplicamos ahora el teorema del seno para hallar otro ángulo:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow \frac{6}{\text{sen } A} = \frac{5}{\text{sen } 38,624833^\circ} \Rightarrow \frac{6 \cdot \text{sen } 38,624833^\circ}{5} = \text{sen } A$$

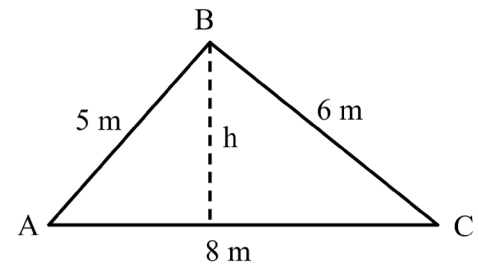
Luego, $\text{sen } A = 0,749062 \Rightarrow A = \arcsen 0,749062 \Rightarrow A = 48,509183^\circ$

Que, escrito en grados minutos y segundos, es: $A = 48^\circ 30' 33,06''$

$B = 180^\circ - (A + C) = 92,865984^\circ = 92^\circ 51' 57,54''$. Para calcular el área obtenemos previamente el valor de la altura.

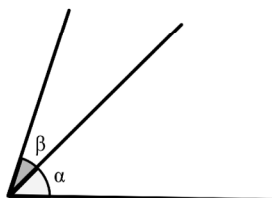
$$\text{sen } C = \frac{h}{a} \Rightarrow h = 6 \cdot \text{sen } 38,624833^\circ = 3,74531 \text{ m}.$$

El área será entonces: $S = \frac{8 \cdot 3,74531}{2} = 14,981238 \text{ m}^2$ y el perímetro $P = 19 \text{ m}$.

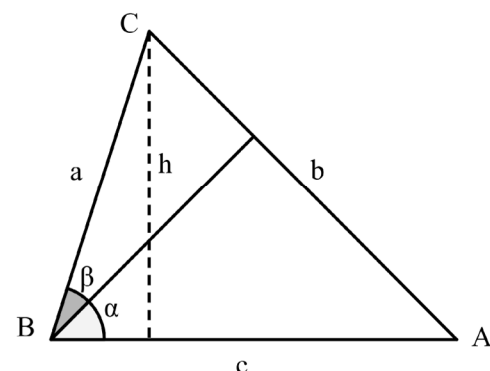


4.8 Razones trigonométricas de los ángulos suma y diferencia, ángulo doble, ángulo mitad y transformaciones de sumas en productos.

- Consideremos dos ángulos adyacentes con el objetivo de hallar las razones trigonométricas del ángulo suma. Para ello, trazamos una recta perpendicular a la recta que sirve de separación entre los dos ángulos.

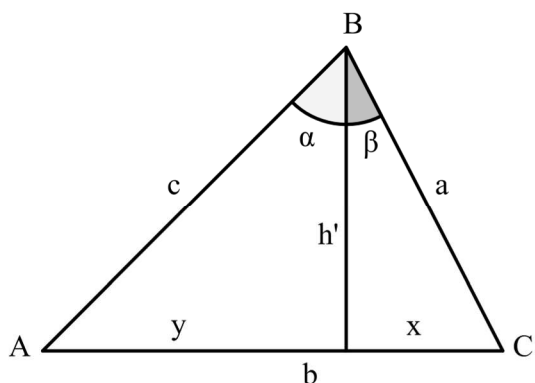


Una vez trazada la recta anterior, tenemos un triángulo cuyo área puede obtenerse a partir del seno del ángulo suma:



$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \beta). \text{ El área será entonces } \frac{c \cdot a \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{2}$$

Al girar el triángulo hasta que la separación de los ángulos se convierta en altura, el área total puede entonces calcularse como la suma de las áreas de los dos triángulos rectángulos.



El triángulo de la izquierda tiene por área:

$$\frac{y \cdot h'}{2} = \frac{c \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot a \cdot \cos \beta}{2}$$

De la misma forma, el área del triángulo de la derecha es:

$$\frac{x \cdot h'}{2} = \frac{a \cdot \operatorname{sen} \beta \cdot c \cdot \cos \alpha}{2}$$

Igualando el área total a la suma de las áreas de los dos triángulos, tenemos:

$$\frac{c \cdot a \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{2} = \frac{c \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot a \cdot \cos \beta}{2} + \frac{a \cdot \operatorname{sen} \beta \cdot c \cdot \cos \alpha}{2}$$

Finalmente, eliminando denominadores y

simplificando a y c, obtenemos: $\boxed{\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \alpha}$.

- Aplicando la fórmula anterior a los ángulos α y $-\beta$, se obtiene el seno de la diferencia: $\operatorname{sen}(\alpha + (-\beta)) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos(-\beta) + \operatorname{sen}(-\beta) \cdot \cos \alpha$.
 $\operatorname{sen}(\alpha + (-\beta)) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + (-\operatorname{sen} \beta) \cdot \cos \alpha$ (por las relaciones entre ángulos opuestos). Luego, finalmente: $\boxed{\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \alpha}$.
- Para hallar la fórmula del coseno de la suma, utilizaremos las relaciones entre ángulos complementarios:
 $\cos(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(90^\circ - (\alpha + \beta)) = \operatorname{sen}((90^\circ - \alpha) - \beta) = \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cdot \cos(90^\circ - \alpha)$
 por las relaciones entre ángulos complementarios, tendremos:
 $\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta}$
- Por último, aplicando la fórmula anterior a los ángulos α y $-\beta$,
 $\cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cdot \cos(-\beta) - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen}(-\beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$
 Luego: $\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta}$
- $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta}$, dividiendo por $\cos \alpha \cdot \cos \beta$:
 $\boxed{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}}$
- $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta}$, dividiendo por $\cos \alpha \cdot \cos \beta$:
 $\boxed{\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}}$
- El seno del ángulo doble se obtiene de la siguiente forma:
 $\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen}(\alpha + \alpha) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha}$
- Análogamente el coseno del ángulo doble:
 $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha \Rightarrow \boxed{\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}$

- $\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$
- Las razones del ángulo mitad se obtienen a partir de la semejanza entre la fórmula fundamental y la fórmula del coseno del ángulo doble:

$$1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \quad \text{o bien:} \quad 1 = \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad \text{o bien:} \quad \cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Sumando estas expresiones:} \quad 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Despejando:} \quad \boxed{\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}}$$

- Si, en lugar de sumar, restamos: $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \boxed{\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}}$

- Dividiendo seno entre coseno: $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$

- Utilizando las fórmulas de las razones de los ángulos suma y diferencia, podemos encontrar fórmulas de transformación de sumas en productos:

$$1) \quad \boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha}$$

$$2) \quad \boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha}$$

$$3) \quad \boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

$$4) \quad \boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

- $1 + 2 \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta$, y haciendo el cambio de variable $\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = A \\ \alpha - \beta = B \end{array} \right\}$. Sumando: $2\alpha = A + B \Rightarrow \alpha = \frac{A + B}{2}$ y restando

$$2\beta = A - B \Rightarrow \beta = \frac{A - B}{2}. \text{ Con lo que la suma } 1) + 2) \text{ quedaría de la}$$

$$\text{forma:} \quad \boxed{\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A + B}{2} \cdot \cos \frac{A - B}{2}}$$

- $1 - 2 \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \beta \cdot \cos \alpha$ y con el mismo cambio,

$$\text{quedará:} \quad \boxed{\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A + B}{2} \cdot \sin \frac{A - B}{2}}$$

- $3 + 4 \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta$

$$\text{Es decir:} \quad \boxed{\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A + B}{2} \cdot \cos \frac{A - B}{2}}$$

- $3 - 4 \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \cdot \sin \beta$

$$\text{Es decir:} \quad \boxed{\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A + B}{2} \cdot \sin \frac{A - B}{2}}$$

- Ejemplos: obtener sin calculadora:

$$- \cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 0,965925.$$

$$- \text{También: } \cos 15^\circ = \cos \frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}}$$

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = 0,965925.$$

$$- \sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 0,965925. \text{ Como } \cos 15^\circ, \text{ por ser complementarios.}$$

$$- \text{También: } \sin 75^\circ = \sin \frac{150^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 150^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}}.$$

$$\sin 75^\circ = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = 0,965925.$$

$$- \sin 75^\circ - \sin 15^\circ = 2 \cdot \cos \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cdot \sin \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = 2 \cdot \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ.$$

$$\sin 75^\circ - \sin 15^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707106.$$

4.9 Identidades y ecuaciones trigonométricas.

- Una identidad (o fórmula trigonométrica) es una expresión que es verdadera siempre, independientemente del ángulo, como por ejemplo todas las anteriores. Para demostrar una fórmula es conveniente desarrollar y aplicar las fórmulas conocidas en ambos miembros, hasta comprobar que coinciden.

Ejemplo, demostrar que: $2 \operatorname{tg} x \left(\frac{1 + \cos x}{2} \right) = \sin x + \operatorname{tg} x$

$$2 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \left(\frac{1 + \cos x}{2} \right) = \sin x + \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$2 \cdot \sin x (1 + \cos x) = 2 \cdot \cos x \left(\sin x + \frac{\sin x}{\cos x} \right)$$

$$2 \cdot \sin x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \cos x \cdot \sin x + 2 \cdot \sin x, \text{ que efectivamente es cierto.}$$

Ejemplo, demostrar que: $\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} - \frac{1}{\cos 2x} = -\operatorname{tg} 2x$

$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} - \frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = -\frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$

$$\frac{(\cos x - \operatorname{sen} x)^2}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = -\frac{2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}$$

$$\frac{\cos^2 x - 2 \cdot \cos x \cdot \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = -\frac{2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}$$

$$\cos^2 x - 2 \cdot \cos x \cdot \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x - 1 = -2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x$$

$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$, que es cierto, puesto que es la fórmula fundamental.

- Una ecuación trigonométrica es una igualdad que sólo es cierta para algunos valores del ángulo o de la variable, que serán las soluciones. Para resolver una ecuación de este tipo, simplificaremos al máximo la expresión, buscando que haya un único ángulo y , después, una única razón. Finalmente, si es necesario, realizaremos un cambio de variable: $y = \cos x$ o $y = \operatorname{sen} x$.

Ejemplo, resolver la ecuación: $\cos 2x = 3 \operatorname{sen} x - 1$.

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 3 \operatorname{sen} x - 1 \Rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 3 \operatorname{sen} x - 1 \Rightarrow -2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 2 = 0$$

Haciendo el cambio de variable $y = \operatorname{sen} x$, tenemos una ecuación de 2º grado:

$$-2y^2 - 3y + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 2}}{2 \cdot (-2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{-4} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{-4} = \frac{3 \pm 5}{-4} = \begin{cases} y = -2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Si } y = -2 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -2 & \text{no tiene solución.} \\ \text{Si } y = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} & \begin{cases} x = 30^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x = 150^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \end{cases}$$

Ejemplo, resolver la ecuación: $2 - 4 \cos^2 x = 2 \operatorname{sen} x$.

$$\text{Dividimos por 2: } 1 - 2 \cos^2 x = \operatorname{sen} x \Rightarrow 1 - 2(1 - \operatorname{sen}^2 x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 2 + 2 \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x \Rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0.$$

Haciendo el cambio de variable $y = \operatorname{sen} x$ la ecuación es:

$$2y^2 - y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} y = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Si } y = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow x = 90^\circ + k \cdot 360^\circ. \\ \text{Si } y = -\frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 210^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x = 330^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases} \end{cases}$$

Las soluciones se expresan añadiendo múltiplos de 360° ya que las razones trigonométricas se repiten periódicamente tras una vuelta completa.

- En el primer ejemplo tenemos como soluciones 30° y 210° para $k = 0$, y 390° y 510° para $k = 1$, etc., que son los mismo ángulos.
- En el segundo ejemplo tenemos como soluciones 210° y 330° para $k = 0$, y 570° y 690° para $k = 1$, etc., que también son los mismos ángulos.