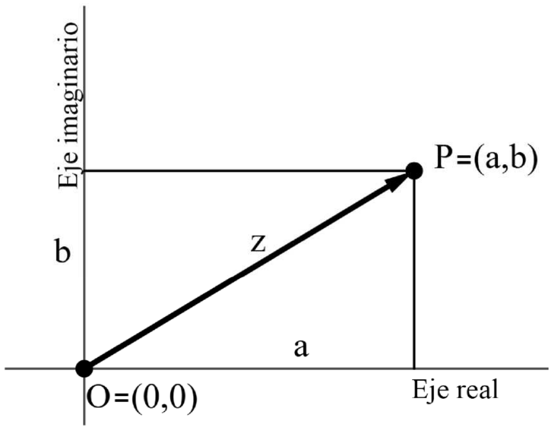
Tema 5: Números complejos.

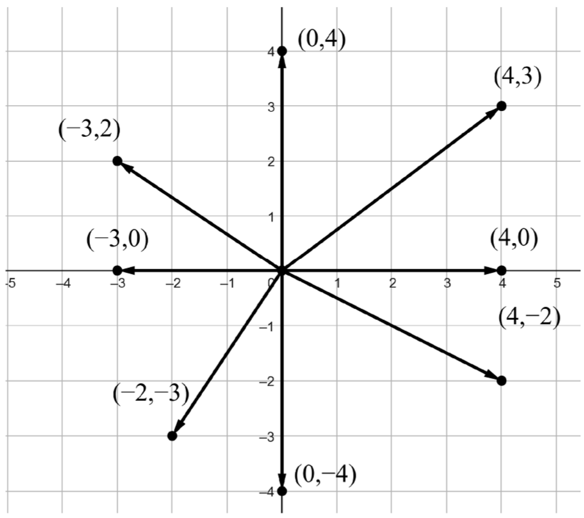
5.1 Introducción.

- Los números complejos aparecen al intentar resolver ecuaciones de segundo grado y tener que hallar la raíz cuadrada de un número negativo. Por ejemplo, la ecuación: $x^2+1=0$ no tiene ninguna solución real; pero, si se define: $i=\sqrt{-1}$, entonces la ecuación anterior tendría ahora por soluciones: $x=\pm\sqrt{-1}=\pm i$ dentro de los números complejos.

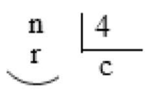
- Un nº complejo es una expresión de la forma: $a+bi$, siendo a y b números reales, e $i=\sqrt{-1}$ la unidad imaginaria. El número a se llama parte real y el número b, parte imaginaria. Claramente, el conjunto de números complejos $\mathbb{C}$ engloba al conjunto de números reales $\mathbb{R}$. Además, en este nuevo conjunto, cualquier ecuación de segundo grado tiene dos soluciones. Por ejemplo: $x^2-6x+34=0 \Rightarrow x=\dfrac{6\pm\sqrt{-100}}{2} \Rightarrow x=\dfrac{6\pm 10i}{2}=3\pm 5i$

- Un número complejo $z=a+bi$ se representa a partir del punto $P=(a,b)$ mediante el vector $\overrightarrow{OP}$, llamado afijo. El eje horizontal es el eje real y el eje vertical es el eje imaginario.
Cualquier número complejo puede expresarse en forma binómica $z=a+bi$ o bien en forma cartesiana $z=\overrightarrow{OP}=(a,b)$. Ejemplos:





- Las potencias de la unidad imaginaria se repiten de 4 en 4. Por tanto, para saber una determinada potencia, basta con dividir el exponente por 4 y considerar el resto obtenido.



$$i^n=i^{4c+r}=i^{4c}\cdot i^r=(i^4)^c\cdot i^r=1\cdot i^r=i^r$$

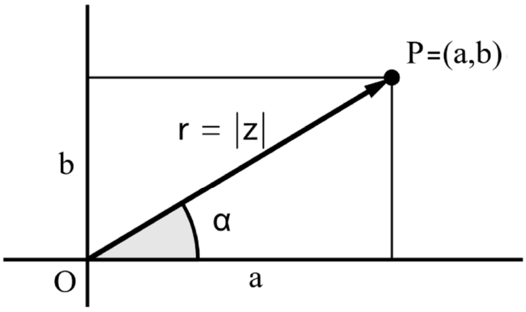
$i^0 = 1$	$i^4 = 1$	$i^8 = 1$	$i^{12} = 1$
$i^1 = i = \sqrt{-1}$	$i^5 = i = \sqrt{-1}$	$i^9 = i = \sqrt{-1}$	$i^{13} = i = \sqrt{-1}$
$i^2 = -1$	$i^6 = -1$	$i^{10} = -1$	$i^{14} = -1$
$i^3 = -i$	$i^7 = -i$	$i^{11} = -i$	$i^{15} = -i$

5.2 Operaciones en forma binómica.

- Suma: $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$
  Ejemplo: $2+3i+(-4+i)=-2+4i$
- Resta: $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$
  Ejemplo: $2+3i-(-4+i)=6+2i$
- Producto: $(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$
  Ejemplo: $(2+3i)\cdot(-4+i)=-8+2i-12i+3i^2=-8-3+(2-12)i=-11-10i$
- Cociente: para dividir dos números complejos se multiplican numerador y denominador por el conjugado del denominador (el conjugado consiste en cambiar el signo intermedio, o sea, el conjugado de $a \pm bi$ es: $a \mp bi$).
  $$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$
  Ejemplo: $\frac{2+3i}{-4+i}$
  $$\frac{(2+3i)(-4-i)}{(-4+i)(-4-i)}=\frac{-8-2i-12i-3i^2}{(-4)^2-i^2}=\frac{-8+3+(-2-12)i}{16+1}=\frac{-5}{17}-\frac{14}{17}i$$
- Potencia:
  $$(a+bi)^2=a^2+2abi+(bi)^2=a^2+2abi+b^2i^2=(a^2-b^2)+2abi$$
  Ejemplo: $(1+3i)^2=1+6i+3i^2=1+6i-9=-8+6i$
- Raíz cuadrada:
  $$\sqrt{a+bi}=x+yi \Rightarrow a+bi=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=a \\ 2xy=b \end{cases}$$
  Y se resuelve el sistema.
  Ejemplo: $\sqrt{-5+12i}$
  $$\sqrt{-5+12i}=x+yi \Rightarrow -5+12i=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-5 \\ 2xy=12 \end{cases}$$
  $$y=\frac{6}{x} \Rightarrow x^2-\frac{36}{x^2}=-5 \Rightarrow x^4-36=-5x^2 \Rightarrow x^4+5x^2-36=0$$
  Hacemos ahora el cambio de variable: $z=x^2$, con lo que la ecuación pasa a ser de 2º grado: $z^2+5z-36=0$. Primero se obtiene z y después: $x=\pm\sqrt{z}$.
  $$z=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot(-36)}}{2\cdot1}=\frac{-5\pm\sqrt{25+144}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{169}}{2}=\frac{-5\pm13}{2}=\left\langle \begin{array}{l} z=4 \\ z=-9 \end{array}\right.$$
  $$\left\langle \begin{array}{ll} \text{Si } z=4 & x=\pm\sqrt{4}=\pm2 \\ \text{Si } z=-9 & x=\text{no existe. Es un nº real} \end{array}\right. \qquad \left\langle \begin{array}{ll} \text{Si } x=2 & y=3 \\ \text{Si } x=-2 & y=-3 \end{array}\right.$$
  Luego, las soluciones son: $2+3i$ y $-2-3i$.

5.3 Expresión polar de un número complejo.

- Un número complejo $z = a + bi$ queda perfectamente determinado si conocemos a y b, que son las coordenadas de su vector afijo. También quedaría determinado el número complejo si conocemos el módulo r de su vector afijo y el ángulo α que forma con el eje positivo de abscisas. Es decir:



$z = a + bi = r_\alpha$

Siendo r el **módulo** de z.

Y α el ángulo o **argumento** de z.

Paso de: binómica $\Rightarrow$ polar

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}} \\ \boxed{\alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}} \text{ deberá ser un ángulo del} \\ \text{cuadrante donde está el punto } P = (a, b). \end{array} \right.$$

Paso de: polar $\Rightarrow$ binómica

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sabemos que } z = r_\alpha \\ \boxed{a = r \cdot \cos\alpha} \;;\; \boxed{b = r \cdot \operatorname{sen}\alpha} \\ \text{Luego: } z = r \cdot \cos\alpha + r \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot i \end{array} \right.$$

Ejemplo: expresar en forma polar el número: $z = 3 + 4i$.

$r = |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$, $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{4}{3} = 53^\circ 07' 48{,}37'' \Rightarrow z = 5_{53^\circ 07' 48{,}37''}$.

Ejemplo: expresar en forma binómica el número: $z = 2_{30^\circ}$.

$a = 2 \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, $b = 2 \cdot \operatorname{sen} 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow z = \sqrt{3} + i$.

5.4 Operaciones en forma polar. Potencias y raíces.

- Producto en forma polar:

$$r_\alpha \cdot r'_\beta = r(\cos\alpha + i \cdot \operatorname{sen}\alpha) \cdot r'(\cos\beta + i \cdot \operatorname{sen}\beta) =$$
$$= r \cdot r'[(\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta) + i(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha)] =$$
$$= r \cdot r'[\cos(\alpha+\beta) + i \cdot \operatorname{sen}(\alpha+\beta)] = (r \cdot r')_{\alpha+\beta}$$

Es decir, para multiplicar dos números complejos: se multiplican los módulos y se suman los argumentos: $\boxed{r_\alpha \cdot r'_\beta = (r \cdot r')_{\alpha+\beta}}$

- Cociente en forma polar:

$$\frac{r_\alpha}{r'_\beta} = \frac{r(\cos\alpha + i\cdot \text{sen}\alpha)}{r'(\cos\beta + i\cdot \text{sen}\beta)} = \frac{r(\cos\alpha + i\cdot \text{sen}\alpha)\cdot(\cos\beta - i\cdot \text{sen}\beta)}{r'(\cos\beta + i\cdot \text{sen}\beta)\cdot(\cos\beta - i\cdot \text{sen}\beta)} =$$

$$= \frac{r\left(\cos\alpha\cos\beta - i\cdot\cos\alpha\cdot \text{sen}\beta + i\cdot \text{sen}\alpha\cos\beta - i^2\cdot \text{sen}\alpha \text{sen}\beta\right)}{r'\left(\cos^2\beta - i^2\cdot \text{sen}^2\beta\right)} =$$

$$= \frac{r[(\cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\alpha \text{sen}\beta) + i\cdot(\text{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\cdot \text{sen}\beta)]}{r'\cdot 1} =$$

$$= \frac{r}{r'}[(\cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\alpha \text{sen}\beta) + i(\text{sen}\alpha\cos\beta - \text{sen}\beta\cos\alpha)] =$$

$$= \frac{r}{r'}[\cos(\alpha-\beta) + i\cdot \text{sen}(\alpha-\beta)] = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha-\beta}$$

Es decir, para dividir dos números complejos: se dividen los módulos y se restan los argumentos: $\boxed{\frac{r_\alpha}{r'_\beta} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha-\beta}}$

- Potencia en forma polar:

Por la fórmula del producto, tenemos: $(r_\alpha)^n = r_\alpha \cdot r_\alpha \cdots r_\alpha = r^n{}_{n\alpha}$

Es decir, para elevar un número complejo a una potencia: se eleva el módulo y se multiplica el argumento por el exponente: $\boxed{(r_\alpha)^n = r^n{}_{n\alpha}}$.

Utilizando la fórmula anterior para un número complejo de módulo 1, se demuestra una igualdad trigonométrica conocida como fórmula de Moivre:

$(1_\alpha)^n = 1^n{}_{n\alpha} \Rightarrow (\cos\alpha + i\cdot \text{sen}\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\cdot \text{sen}(n\alpha)$

- Raíces en forma polar:

Supongamos que queremos calcular la raíz n-ésima de un número complejo $\sqrt[n]{R_\beta}$, y supongamos que una de las soluciones es r_α. Como $\sqrt[n]{R_\beta} = r_\alpha$, por definición de raíz n-ésima, deberá verificarse:

$$(r_\alpha)^n = R_\beta \Rightarrow r^n{}_{n\alpha} = R_\beta \Rightarrow \begin{cases} r^n = R \\ n\alpha = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{R} \\ \alpha = \dfrac{\beta}{n} \end{cases} \qquad \boxed{\sqrt[n]{R_\beta} = \sqrt[n]{R}_{\frac{\beta}{n}}}.$$

La anterior es la primera de las n raíces que se obtienen. Las siguientes raíces se obtienen sumando múltiplos de 360º al ángulo β antes de dividir entre n.

Es decir, siempre hay n ángulos que se calculan así: $\boxed{\alpha = \frac{\beta + k\cdot 360^\circ}{n}}$.

En resumen, para obtener la raíz n-ésima de un número complejo: se hace la raíz del módulo y el argumento se suma con múltiplos de 360º y se divide por el índice:

- En una raíz cuadrada hay dos soluciones que se diferencian en 180º.
- En una raíz cúbica hay tres soluciones que se diferencian en 120º.
- En una raíz cuarta hay cuatro soluciones que se diferencian en 90º.
- En una raíz quinta hay cinco soluciones que se diferencian en 72º.

- Las operaciones en forma polar son especialmente útiles para hallar potencias y raíces que resultarían mucho más difíciles de obtener en forma binómica. Ejemplo: ya vimos al operar en forma binómica este cuadrado: $(1+3i)^2 = 1+6i+3i^2 = 1+6i-9 = -8+6i$.

  Veámoslo ahora en forma polar:

  Si $z = a+bi \Rightarrow r = |z| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$ y $\alpha = \text{arctg}3 = 71°33'54{,}18''$.

  Es decir, el número en forma polar es: $z = \sqrt{10}_{71°33'54{,}18''}$. Su cuadrado es:

  $$z^2 = \left(\sqrt{10}_{71°33'54{,}18''}\right)^2 = 10_{143°07'48{,}37''} = 10(\cos 143°07'48{,}37'' + i\cdot \text{sen}143°07'48{,}37'') =$$
  $$= 10(-0{,}8 + i\cdot 0{,}6) = -8+6i.$$

  Para otras potencias es recomendable utilizar la forma polar. Por ejemplo, veamos otra potencia del mismo número: $(1+3i)^6$

  $$z^6 = \left(\sqrt{10}_{71°33'54{,}18''}\right)^6 = 1000_{69°23'25{,}11''} = 1000(\cos 69°23'25{,}11'' + i\cdot \text{sen}69°23'25{,}11'') =$$
  $$= 1000(0{,}352 + i\cdot 0{,}936) = 352+936\ i.$$

  En cuanto a las raíces, vimos al operar en forma binómica que la raíz cuadrada del número: $z = -5+12i$, resultaba: $\sqrt{-5+12i} = \pm(2+3i)$.

  Veámoslo ahora en forma polar:

  Si $z = -5+12i \Rightarrow r = |z| = \sqrt{(-5)^2+12^2} = 13$ y $\text{arctg}\left(-\frac{12}{5}\right) = 112°37'11{,}51''$.

  Es decir, z en forma polar es: $z = 13_{112°37'11{,}51''}$. Su raíz es la siguiente:

  $$\sqrt{z} = \sqrt{13_{112°37'11{,}51''}} = \begin{cases} \sqrt{13}_{\frac{112°37'11{,}51''}{2}} \\ \sqrt{13}_{\frac{112°37'11{,}51''+360°}{2}} \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{13}_{56°18'35{,}76''} \\ \sqrt{13}_{236°18'35{,}76''} \end{cases} =$$
  $$= \begin{cases} \sqrt{13}(\cos 56°18'35{,}76'' + i\cdot \text{sen}56°18'35{,}76'') \\ \sqrt{13}(\cos 236°18'35{,}76'' + i\cdot \text{sen}236°18'35{,}76'') \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{13}(0{,}5547 + 0{,}832\cdot i) \\ \sqrt{13}(-0{,}5547 - 0{,}832\cdot i) \end{cases} =$$
  $$= \begin{cases} 2+3i \\ -2-3i \end{cases}$$. Que es el mismo resultado obtenido en forma binómica.

  En otras raíces, que no sean cuadradas, es necesario utilizar la forma polar.

  Por ejemplo: calcular $\sqrt[4]{-5+12i}$

  $$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{13_{112°37'11{,}51''}} = \begin{cases} \sqrt[4]{13}_{\frac{112°37'11{,}51''}{4}} \\ \sqrt[4]{13}_{\frac{112°37'11{,}51''+360°}{4}} \\ \sqrt[4]{13}_{\frac{112°37'11{,}51''+720°}{4}} \\ \sqrt[4]{13}_{\frac{112°37'11{,}51''+1080°}{4}} \end{cases} = \begin{cases} \sqrt[4]{13}_{28°09'17{,}88''} \\ \sqrt[4]{13}_{118°09'17{,}88''} \\ \sqrt[4]{13}_{208°09'17{,}88''} \\ \sqrt[4]{13}_{298°09'17{,}88''} \end{cases}$$