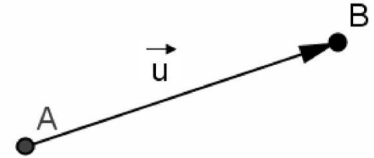


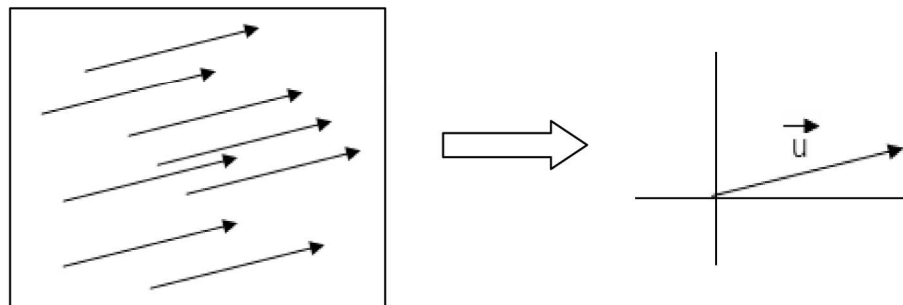
Tema 6: Vectores.

6.1 Definición. Coordenadas.

- Algunas magnitudes son escalares y quedan perfectamente determinadas mediante un número; por ejemplo, la longitud. Sin embargo, para determinar las magnitudes vectoriales, como la fuerza, se necesita además de un número, una dirección, un sentido y un punto de aplicación. Para expresar las magnitudes vectoriales se utiliza el vector, que es un segmento orientado en el que tenemos un origen y un extremo: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

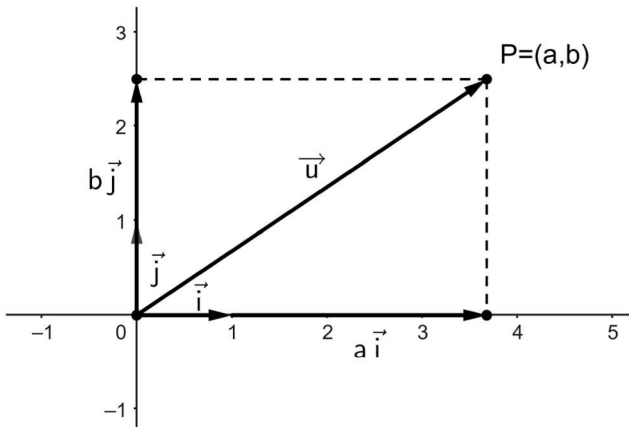


- En un vector se pueden distinguir los siguientes elementos:
 - **Modulo del vector:** es la longitud del segmento que lo representa gráficamente e indica la intensidad o el valor numérico de la magnitud. Para indicar el modulo de un vector, se escribe este entre dos barras verticales: $|\vec{u}| = |\overrightarrow{AB}|$.
 - **Dirección del vector:** coincide con la dirección de la recta que lo contiene. Por tanto, la dirección del vector \overrightarrow{AB} es la misma que la del vector \overrightarrow{BA} , ya que una recta tiene una sola dirección.
 - **Sentido del vector:** es la orientación que tiene el vector. Una recta tiene dos sentidos opuestos entre sí. El sentido del vector viene indicado por la punta de la flecha; así, el sentido del vector \overrightarrow{AB} es opuesto al sentido del vector \overrightarrow{BA} .
 - **Punto de aplicación del vector:** es el origen del vector.
- Dos vectores se dice que son equipolentes si tienen igual módulo, dirección y sentido. Sólo varía su punto de aplicación. Del conjunto de vectores equipolentes entre sí elegiremos un representante, que llamaremos vector libre y lo representaremos habitualmente en el origen de coordenadas.



- Dado un punto P, el vector \overrightarrow{OP} se denomina vector de posición de dicho punto. Si consideramos un vector libre situado en el origen de coordenadas,

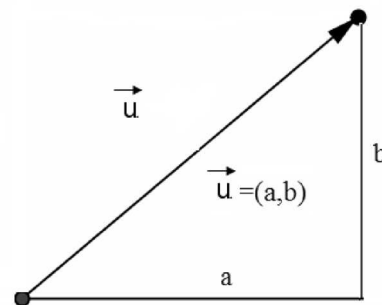
entonces las coordenadas del vector son las mismas que las de su punto extremo, del cual es su vector de posición:



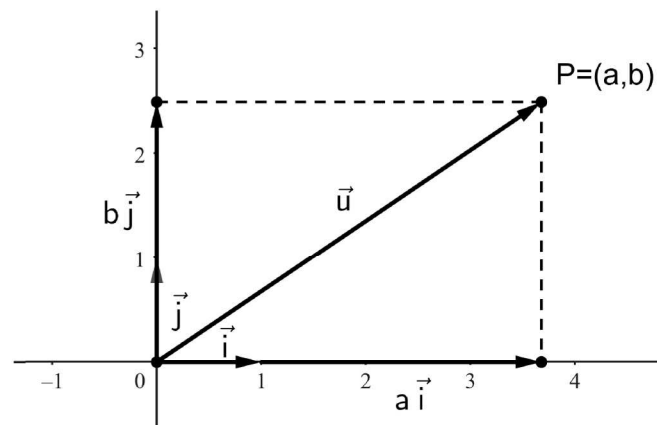
$$\text{Coord } \vec{u} = \text{Coord } \vec{OP} = \text{Coord } P = (a, b)$$

Es decir: $\vec{u} = (a, b)$

Si el vector no está situado en el origen, entonces las coordenadas se identifican con las componentes del vector, que son las medidas del desplazamiento horizontal y vertical que el vector determina:

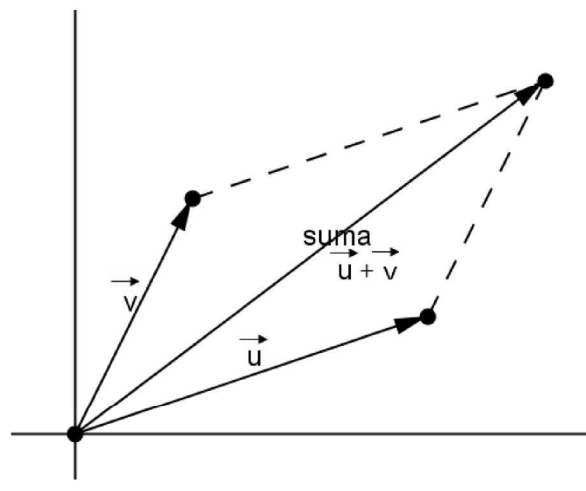


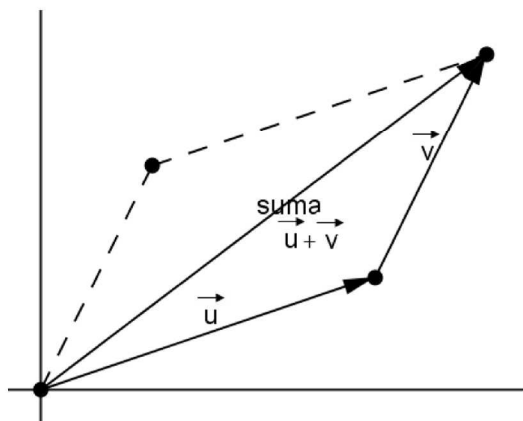
Para finalizar, también pueden interpretarse las coordenadas de un vector como los coeficientes que multiplican a los vectores unitarios: $\vec{i} = (1,0)$ y $\vec{j} = (0,1)$. Es decir, si $\vec{u} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} \Rightarrow \vec{u} = (a, b)$



6.2 Operaciones con vectores.

- Suma de vectores: dados dos vectores libres situados en el origen de coordenadas, su suma se obtiene gráficamente utilizando la denominada regla del paralelogramo, que consiste en trazar el paralelogramo que determinan los dos vectores y, la diagonal o resultante, será el vector suma.





También puede ser útil, en algunas ocasiones (especialmente cuando hay varios vectores), encadenar cada origen con el extremo anterior. En este caso, el vector suma es el que tiene el primer origen y el último extremo. En realidad, observando los dibujos, comprobamos que se obtiene el mismo resultado que mediante la regla del paralelogramo.

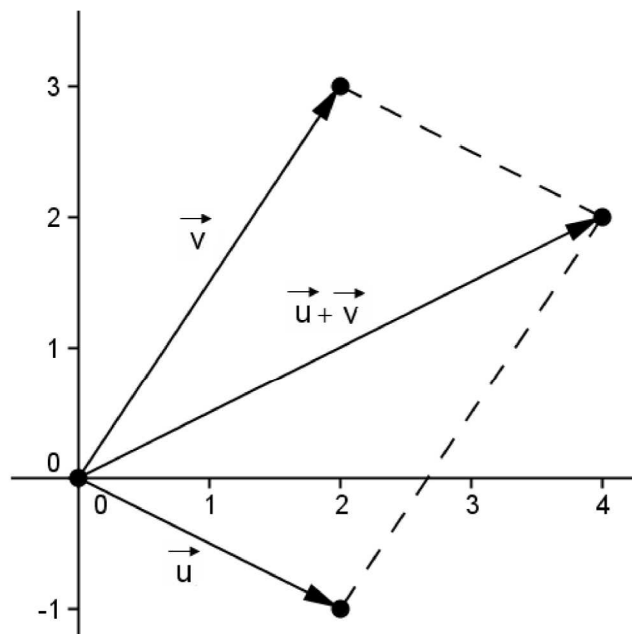
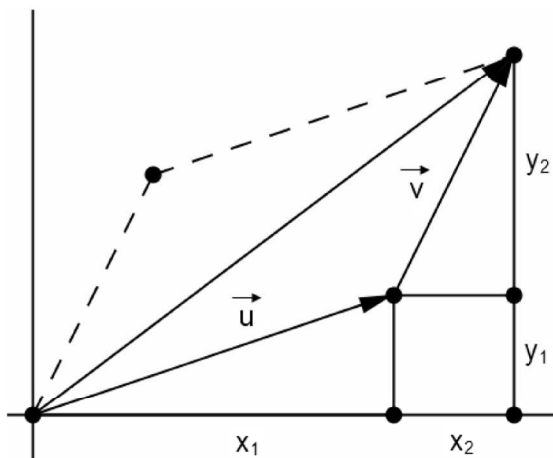
Para sumar dos vectores cuando se conocen sus coordenadas, $\vec{u} = (x_1, y_1)$ y $\vec{v} = (x_2, y_2)$, se suman las primeras coordenadas y también las segundas coordenadas:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Esto es fácil de entender sobre el gráfico, porque vemos que se suman los desplazamientos horizontales y los desplazamientos verticales.

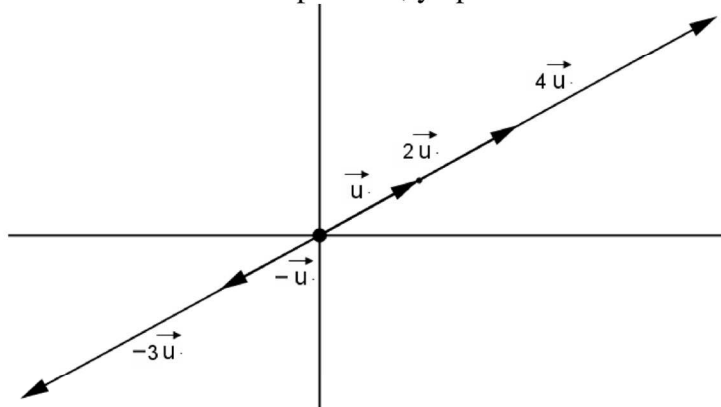
Ejemplo: hallar, tanto en coordenadas como gráficamente, la suma de los vectores $\vec{u} = (2, -1)$ y $\vec{v} = (2, 3)$

En coordenadas: $\vec{u} + \vec{v} = (2 + 2, -1 + 3) = (4, 2)$. Y gráficamente:



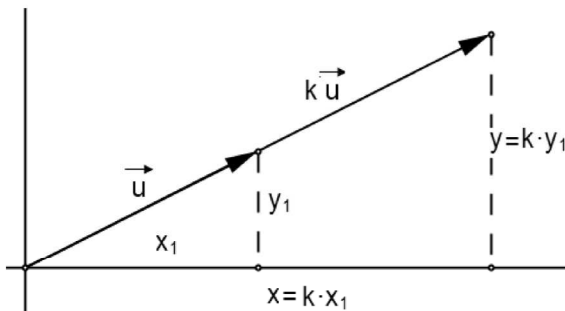
- Multiplicación de un vector por un número: al multiplicar un vector por un número, se obtiene otro vector cuyo módulo es el módulo del vector inicial multiplicado por el valor absoluto del número. La dirección es la misma que

la del vector inicial. Además, su sentido será el mismo que el del vector inicial si el número es positivo, y opuesto si el número es negativo.



Para multiplicar un vector $\vec{u} = (x_1, y_1)$ (en coordenadas), por un número, se multiplican ambas coordenadas por el número: $\boxed{k \cdot \vec{u} = (k \cdot x_1, k \cdot y_1)}$.

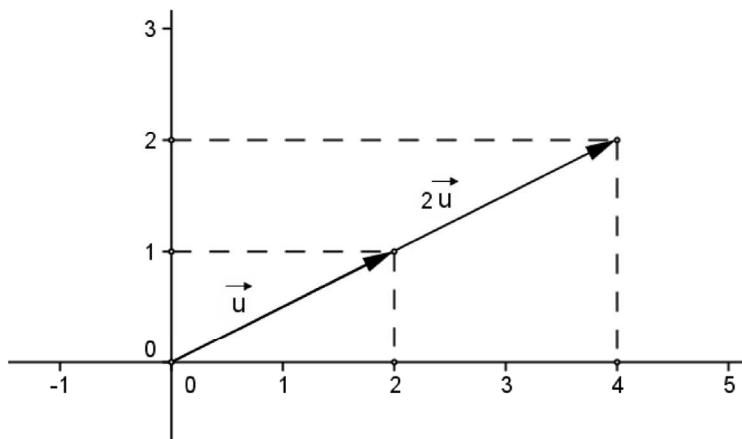
Esto es así, porque al considerar las coordenadas, tendremos dos triángulos rectángulos semejantes y, por tanto, los lados serán proporcionales. Si suponemos, por ejemplo, que k es positivo, entonces k será precisamente la constante de proporcionalidad entre los dos triángulos. Y si k es negativo, la constante de proporcionalidad será $|k|$, el valor absoluto de k .



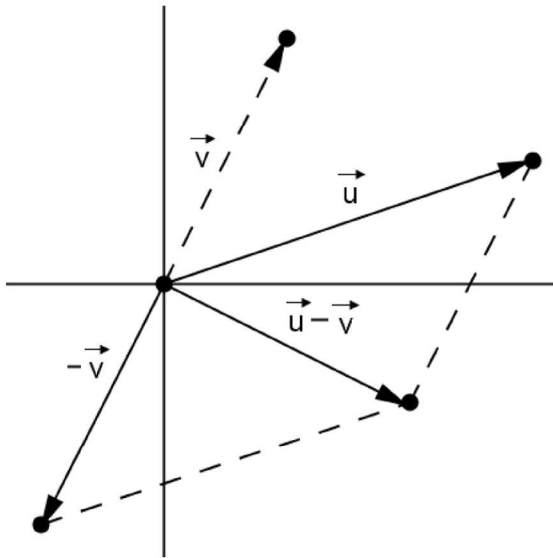
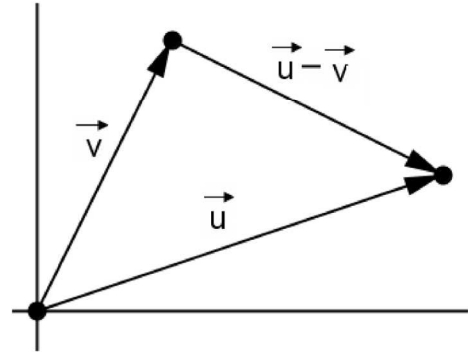
$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{k \cdot |\vec{u}|}{|\vec{u}|} = k \Rightarrow \begin{cases} x = k \cdot x_1 \\ y = k \cdot y_1 \end{cases}$$

Ejemplo: Dado el vector $\vec{u} = (2,1)$, hallar $2 \cdot \vec{u}$.

En coordenadas: $2 \cdot \vec{u} = 2 \cdot (2,1) = (4,2)$. Y gráficamente:

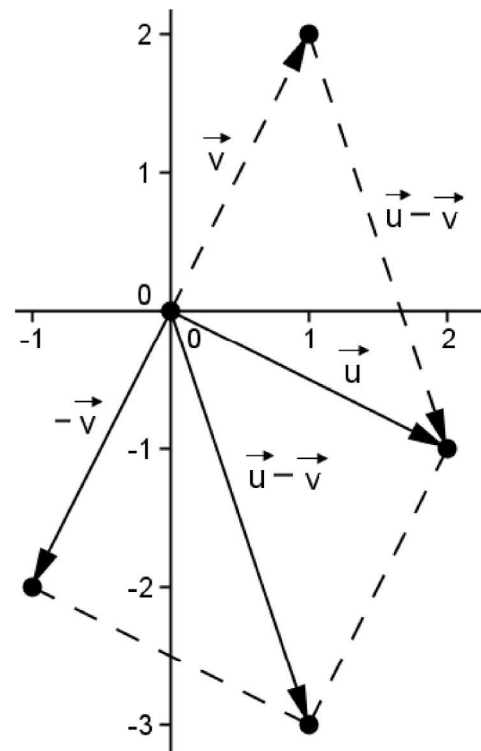


- Diferencia de vectores: dados dos vectores \vec{u} y \vec{v} , el vector $\vec{u} - \vec{v}$ es el que va desde el extremo de \vec{v} al extremo de \vec{u} . Es decir, es el vector que, sumado a \vec{v} , nos resulta \vec{u} , porque: $\vec{v} + (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}$.



Lo más práctico, si los vectores están situados en el origen de coordenadas, es sumar el opuesto: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

Para restar dos vectores cuando se conocen sus coordenadas: $\vec{u} = (x_1, y_1)$ y $\vec{v} = (x_2, y_2)$, se restan las primeras coordenadas y también las segundas coordenadas: $\vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$.



Esta fórmula resulta de aplicar las propiedades para la suma y para la multiplicación por un número:

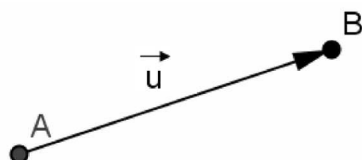
$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = (x_1, y_1) + (-x_2, -y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

Ejemplo: dados $\vec{u} = (2, -1)$ y $\vec{v} = (1, 2)$, hallar $\vec{u} - \vec{v}$.

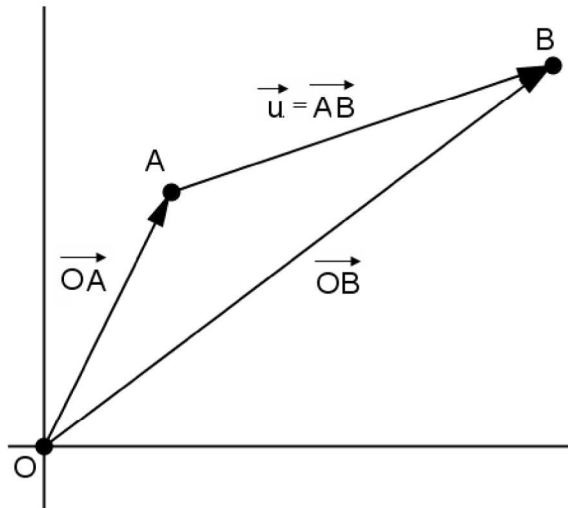
En coordenadas:

$$\vec{u} - \vec{v} = (2 - 1, -1 - 2) = (1, -3)$$

A partir de la diferencia de vectores obtenemos una fórmula para hallar las coordenadas de un vector que no está situado en el origen de coordenadas:



$$\text{Coord } \vec{u} = \text{Coord B} - \text{Coord A}$$



Sean $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ los puntos origen y extremo del vector. Hay entonces tres vectores relacionados:

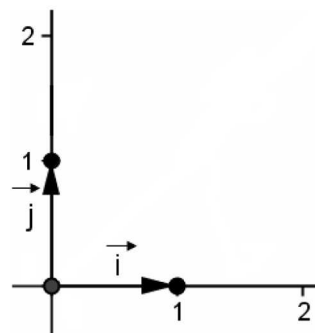
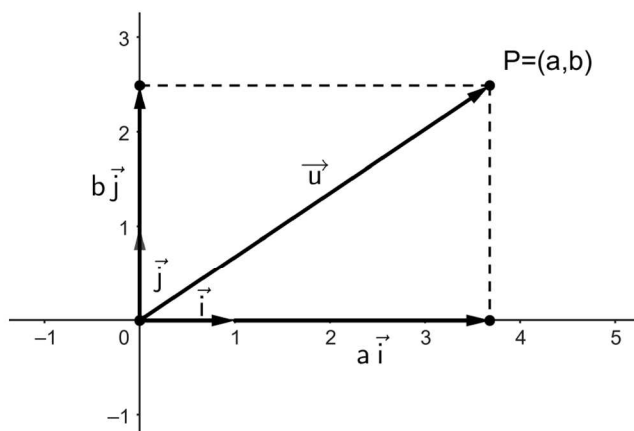
$$\begin{aligned} \vec{OA} + \vec{AB} &= \vec{OB} \Rightarrow \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{u} &= \vec{AB} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{u} &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \end{aligned}$$

- Las operaciones con vectores tienen las siguientes propiedades:
 - Conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
 - Asociativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
 - Elemento neutro: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.
 - Elemento opuesto: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.
 - Doble distributividad: $k \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = k \cdot \vec{u} + k \cdot \vec{v}$; $(k + n) \cdot \vec{u} = k \cdot \vec{u} + n \cdot \vec{u}$.
 - Elemento unidad: $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

6.3 Base de un espacio vectorial.

- La definición más general de base, se basa en los siguientes conceptos:
 - Si $\vec{w} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$, se dice entonces que el vector \vec{w} está expresado como combinación lineal de los vectores \vec{u} y \vec{v} .
 - Un conjunto de vectores son linealmente independientes si ninguno de ellos puede expresarse como combinación lineal de los otros. En el plano, que dos vectores sean independientes significa que no son proporcionales.
 - Un conjunto de vectores se dice que son generadores si cualquier vector puede expresarse como combinación lineal de ellos. En el plano, dos vectores no proporcionales \vec{u} y \vec{v} generan con sus combinaciones lineales todo el plano y cualquier vector \vec{w} podrá expresarse como combinación lineal de ellos $\vec{w} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$.
 - Un conjunto de vectores constituyen una base si son a la vez: linealmente independientes y generadores. En este caso, cualquier otro vector podrá expresarse como combinación lineal de ellos de forma única. Los coeficientes de dicha combinación lineal reciben el nombre de coordenadas del vector en esa base. En el plano, dos vectores no proporcionales son automáticamente una base. $\vec{w} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$ quiere decir que las coordenadas de \vec{w} en la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ son: $\vec{w} = (a, b)$.

En el plano, la base más habitual es la base canónica, que está formada por los vectores unitarios: $\vec{i} = (1,0)$ y $\vec{j} = (0,1)$. Cualquier vector puede expresarse a partir de ellos como una combinación lineal:



$$\vec{u} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} \Rightarrow \vec{u} = (a,b)$$

Siempre que no se indique lo contrario, se supondrá que se está utilizando esta base canónica.

Ejemplo: dados los vectores $\vec{u} = (3,1)$ y $\vec{v} = (1,2)$, hallar las coordenadas del vector $\vec{w} = (7,4)$ en la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ y comprobar el resultado gráficamente.

En primer lugar, observamos que efectivamente: $\vec{u} = (3,1)$ y $\vec{v} = (1,2)$ son una

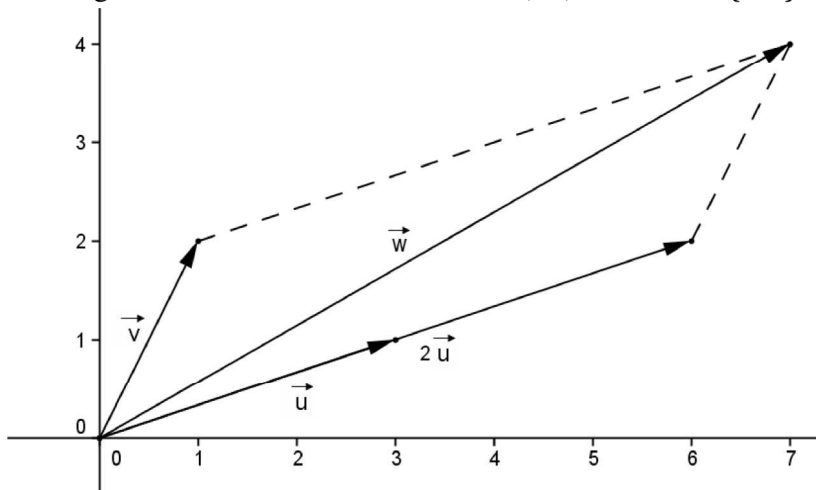
base, porque no son proporcionales: $(3,1) = k(1,2) \Rightarrow \begin{cases} 3 = k \\ 1 = 2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = k \\ \frac{1}{2} = k \end{cases}$

Buscamos ahora coeficientes x e y de forma que $\vec{w} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v}$, es decir:

$$(7,4) = x \cdot (3,1) + y \cdot (1,2) \Rightarrow \begin{cases} 7 = 3x + y \\ 4 = x + 2y \end{cases} \left. \begin{array}{l} (2^{\text{a}} \text{ por } -3) \\ \hline \end{array} \right\} \begin{array}{l} 7 = 3x + y \\ -12 = -3x - 6y \\ \hline -5 = -5y \end{array}$$

$\Rightarrow y = 1$. Como $y = 1$, por ejemplo sustituyendo en la 1ª ecuación, tendremos $7 = 3x + 1 \Rightarrow 6 = 3x \Rightarrow x = 2$

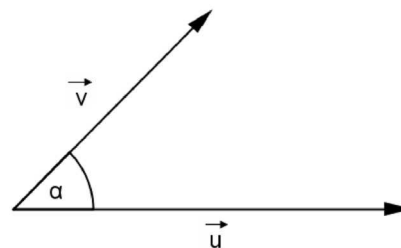
Luego: $\vec{w} = 2 \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{v}$, es decir: $\vec{w} = (2,1)$ en la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.



6.4 Producto escalar.

- Definición e interpretación geométrica: dados dos vectores: \vec{u} y \vec{v} , se define el producto escalar de ellos como el siguiente número:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$. Es decir, módulo del primero, por módulo del segundo, por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.



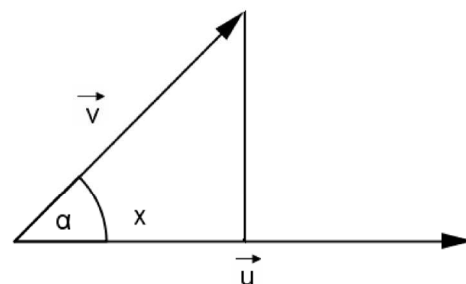
Una de las aplicaciones más importantes del producto escalar consiste en determinar si dos vectores son perpendiculares: En este caso, el ángulo será de 90° y el producto escalar resultará cero. Es decir: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Por otra parte, al trazar una recta perpendicular a \vec{u} trazada desde el extremo de \vec{v} , tendremos un segmento contenido en \vec{u} , que se llama: proyección de \vec{v} sobre \vec{u} : $x = \text{Proy}_{\vec{u}}(\vec{v})$.

Esta proyección está relacionada con el producto escalar de la siguiente forma:

$$\text{Como } \cos \alpha = \frac{x}{|\vec{v}|} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \frac{x}{|\vec{v}|} = |\vec{u}| \cdot x$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot \text{Proy}_{\vec{u}}(\vec{v})$$



Es decir, el producto escalar de dos vectores es igual al módulo del primero por la proyección del segundo sobre el primero.

- El producto escalar de vectores tiene las siguientes propiedades:
 - Positiva: $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$
 - Homogénea: $(k \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = k \cdot (\vec{v} \cdot \vec{u})$
 - Conmutativa: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
 - Distributiva: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- Aplicando las propiedades anteriores, se obtiene una expresión muy útil del producto escalar en coordenadas:

$$\begin{aligned} \text{Dados: } \vec{u} &= (x_1, y_1) \text{ y } \vec{v} = (x_2, y_2), \vec{u} \cdot \vec{v} = (x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j}) \cdot (x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j}) \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= (x_1 \cdot x_2) \cdot (\vec{i} \cdot \vec{i}) + (x_1 \cdot y_2) \cdot (\vec{i} \cdot \vec{j}) + (y_1 \cdot x_2) \cdot (\vec{j} \cdot \vec{i}) + (y_1 \cdot y_2) \cdot (\vec{j} \cdot \vec{j}) = \\ &= x_1 \cdot x_2 \cdot |\vec{i}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos 0^\circ + x_1 \cdot y_2 \cdot |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos 90^\circ + y_1 \cdot x_2 \cdot |\vec{j}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos 90^\circ + y_1 \cdot y_2 \cdot |\vec{j}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos 0^\circ = \\ &= x_1 \cdot x_2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + x_1 \cdot y_2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 + y_1 \cdot x_2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 + y_1 \cdot y_2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2. \end{aligned}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

Es decir, se multiplican las primeras coordenadas entre sí y las segundas coordenadas entre sí, y posteriormente se suman los resultados.

- Módulos y ángulos. Esta es la principal utilidad del producto escalar. Las fórmulas se obtienen igualando sus expresiones geométrica y analítica, y despejando posteriormente, para obtener así la fórmula en coordenadas.

$$\text{Sea } \vec{u} = (x_1, y_1), \quad \vec{u} \cdot \vec{u} = \begin{cases} |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{u}|^2 \\ x_1 \cdot x_1 + y_1 \cdot y_1 = x_1^2 + y_1^2 \end{cases}$$

$$\text{Igualando ambas expresiones } |\vec{u}|^2 = x_1^2 + y_1^2 \Rightarrow \boxed{|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

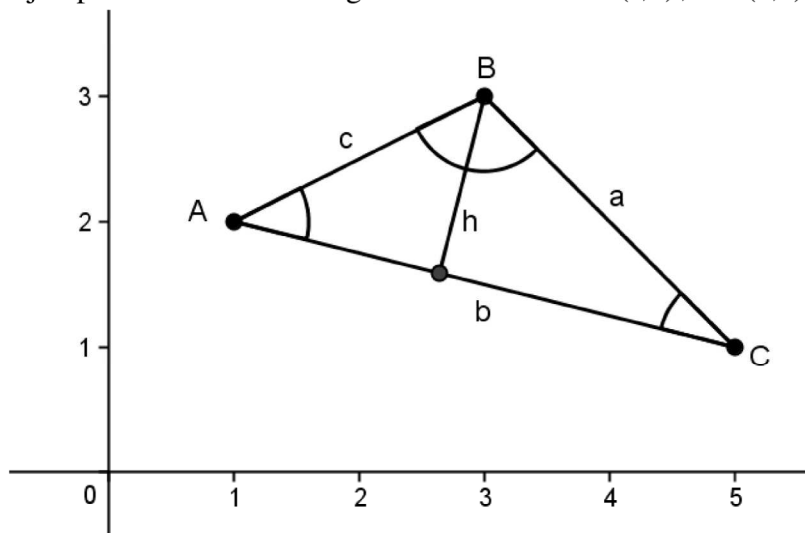
$$\text{Dados } \vec{u} = (x_1, y_1) \text{ y } \vec{v} = (x_2, y_2) \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha \\ x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \end{cases}$$

Igualando ambas expresiones:

$$|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

$$\text{Luego: } \cos \alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \Rightarrow \boxed{\alpha = \arccos \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}}$$

Ejemplo: Resolver el triángulo de vértices $A = (1,2)$, $B = (3,3)$ y $C = (5,1)$.



En primer lugar, hallaremos todos los vectores y sus opuestos:

$$\vec{AB} = (3-1, 3-2) = (2,1) \quad \text{y} \quad \vec{BA} = (1-3, 2-3) = (-2,-1).$$

$$\vec{AC} = (5-1, 1-2) = (4,-1) \quad \text{y} \quad \vec{CA} = (1-5, 2-1) = (-4,1).$$

$$\vec{BC} = (5-3, 1-3) = (2,-2) \quad \text{y} \quad \vec{CB} = (3-5, 3-1) = (-2,2).$$

Los lados del triángulo son los módulos de los vectores anteriores:

$$c = |\vec{AB}| = |(2,1)| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}.$$

$$b = |\vec{AC}| = |(4,-1)| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}.$$

$$a = |\vec{BC}| = |(2,-2)| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}.$$

A continuación, calculamos los ángulos del triángulo utilizando los vectores que tienen origen en cada vértice:

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \text{ángulo}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arccos \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \arccos \frac{(2,1) \cdot (4,-1)}{|(2,1)| |(4,-1)|} = \\ &= \arccos \frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-1)^2}} = \arccos \frac{8-1}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{16+1}} = \\ &= \arccos \frac{7}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{17}}. \text{ Luego: } \hat{A} = 40,6013^\circ = 40^\circ 36' 4,66''.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{B} &= \text{ángulo}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \arccos \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|} = \arccos \frac{(-2,-1) \cdot (2,-2)}{|(-2,-1)| |(2,-2)|} = \\ &= \arccos \frac{(-2) \cdot 2 + (-1) \cdot (-2)}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2}} = \arccos \frac{-4+2}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{4+4}} = \\ &= \arccos \frac{-2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{8}}. \text{ Luego: } \hat{B} = 108,4349^\circ = 108^\circ 26' 5,81''.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{C} &= \text{ángulo}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \arccos \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| |\overrightarrow{CB}|} = \arccos \frac{(-4,1) \cdot (-2,2)}{|(-4,1)| |(-2,2)|} = \\ &= \arccos \frac{(-4) \cdot (-2) + 1 \cdot 2}{\sqrt{(-4)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 2^2}} = \arccos \frac{8+2}{\sqrt{16+1} \cdot \sqrt{4+4}} = \\ &= \arccos \frac{10}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{8}}. \text{ Luego: } \hat{C} = 30,9638^\circ = 30^\circ 57' 49,52''.\end{aligned}$$

$$\text{Comprobación: } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 40,6013^\circ + 108,4349^\circ + 30,9638^\circ = 180^\circ$$

Finalmente, hallamos el área por trigonometría, obteniendo previamente la

$$\text{altura: } \operatorname{sen} \hat{A} = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \operatorname{sen} \hat{A} = \sqrt{5} \cdot \operatorname{sen} 40^\circ 36' 4,66'' = 1,4552 \text{ u.}$$

$$\text{El área será entonces: } S = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{17} \cdot 1,4552}{2} = 3 \text{ u}^2.$$

6.5 Vectores ortogonales, unitarios y ortonormales.

- Dos vectores \vec{u} y \vec{v} , decimos que son ortogonales cuando son perpendiculares, o lo que es lo mismo, cuando su producto escalar es nulo.

$$\text{Es decir, } \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son ortogonales} \Leftrightarrow \boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0}.$$

Dado un vector no nulo, siempre es posible obtener dos vectores ortogonales a él con un módulo prefijado.

Ejemplo: hallar dos vectores de módulo 5 y perpendiculares al vector $\vec{u} = (3, -4)$.

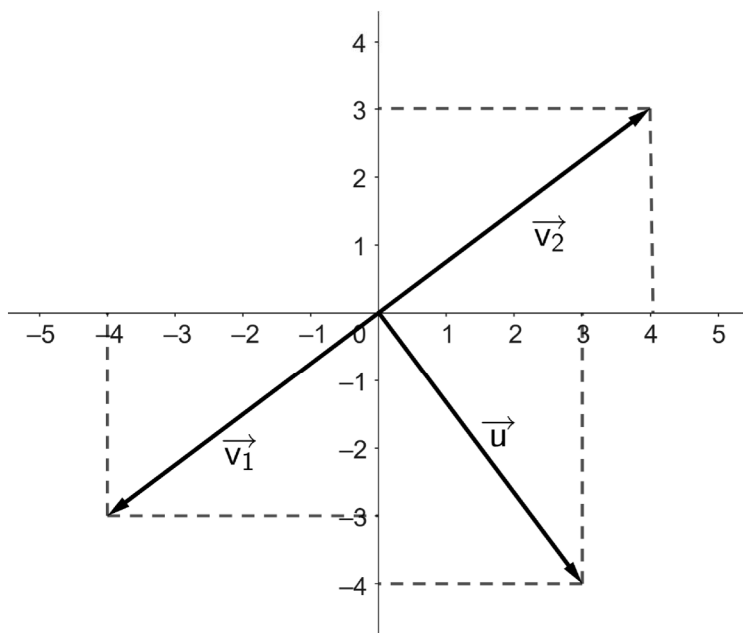
Sea $\vec{v} = (x, y)$ el vector buscado, plantearemos un sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \\ |\vec{v}| = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x - 4y = 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = \frac{3}{4}x \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{x^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2} = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{9}{16}x^2 = 25 \Rightarrow 16x^2 + 9x^2 = 400 \Rightarrow 25x^2 = 400 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \begin{cases} -4 \\ 4 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } x = -4 \Rightarrow y = \frac{3}{4}(-4) = -3 \\ \text{Si } x = 4 \Rightarrow y = \frac{3}{4}4 = 3 \end{array} \right.$$

Luego, tenemos dos soluciones: $\vec{v}_1 = (-4, -3)$ y $\vec{v}_2 = (4, 3)$.



Si nos fijamos en los resultados de este ejemplo, podemos aprender una técnica para obtener vectores perpendiculares, que consiste en intercambiar las coordenadas y cambiar el signo de una de ellas:

$$\vec{u} = (3, -4) \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 = (-4, -3) \\ \vec{v}_2 = (4, 3) \end{cases}$$

Esto es así, porque el producto escalar entonces será cero:

$$(a, b) \cdot (-b, a) = -ab + ab = 0$$

- Un vector es unitario cuando su módulo es 1. Dado un vector \vec{u} no nulo, el vector $\vec{u}' = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ es siempre un vector unitario, de igual dirección y sentido.

Podemos comprobar fácilmente que tiene módulo 1: $|\vec{u}'| = \left| \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \right| = \frac{|\vec{u}|}{|\vec{u}|} = 1$.

Dos vectores son ortonormales, cuando son simultáneamente ortogonales y unitarios. Por ejemplo, los vectores de la base canónica: $\vec{i} = (1, 0)$ y $\vec{j} = (0, 1)$.

A partir de dos vectores ortogonales, se obtienen fácilmente dos vectores ortonormales dividiendo cada uno por su módulo. Además, dado un vector unitario, siempre puede encontrarse un vector ortonormal a él.

Ejemplo: Dado el vector unitario $\vec{u} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, hallar un vector ortonormal.

Comprobemos, en primer lugar, que el vector \vec{u} es unitario:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1.$$

Sea $\vec{v} = (x, y)$ el vector buscado, plantearemos un sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \\ |\vec{v}| = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = \frac{3}{4}x \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{x^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{9}{16}x^2 = 1 \Rightarrow 16x^2 + 9x^2 = 16 \Rightarrow 25x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow x = \begin{cases} -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} \end{cases}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } x = -\frac{4}{5} \Rightarrow y = \frac{3}{4} \cdot \frac{-4}{5} = -\frac{3}{5} \\ \text{Si } x = \frac{4}{5} \Rightarrow y = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \end{array} \right.$$

Por tanto, tenemos dos soluciones: $\vec{v}_1 = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ y $\vec{v}_2 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

