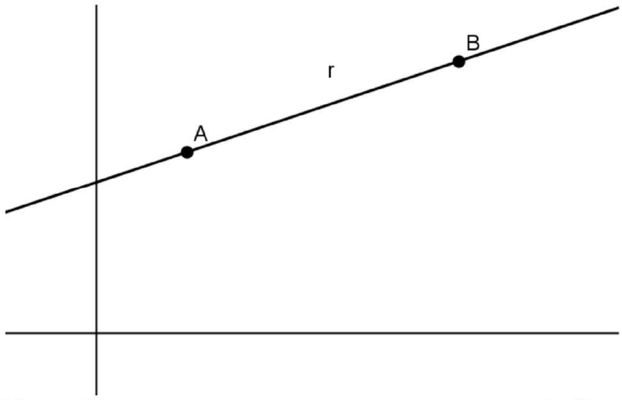
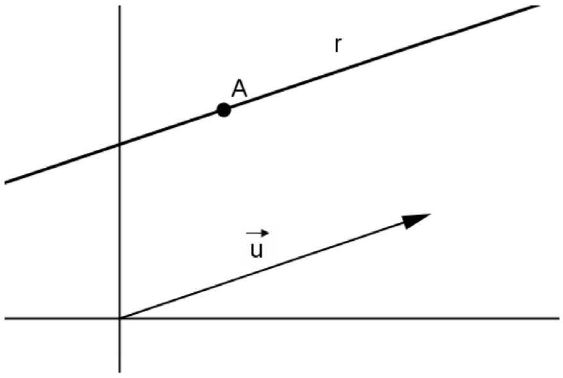
Tema 7: La recta en el plano.

7.1 Ecuación de la recta.

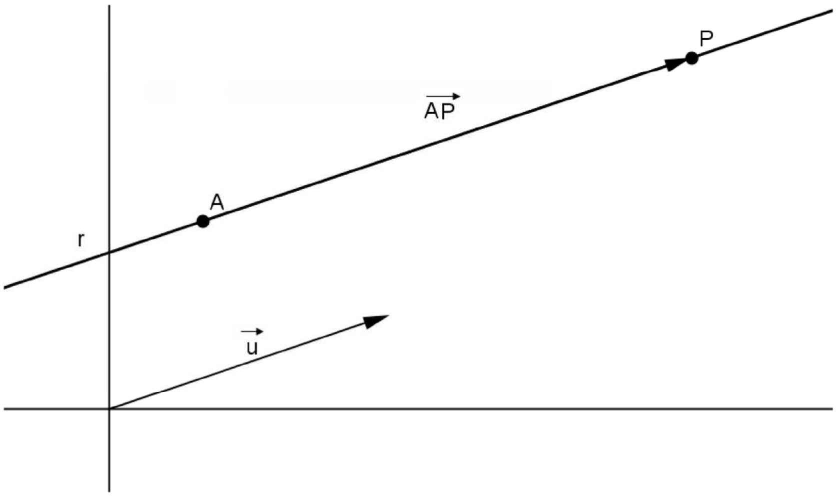
- Una recta queda perfectamente determinada a partir de dos puntos del plano:



O bien, si tenemos un punto y un vector que indique la dirección de la recta:



Utilizaremos esta segunda opción, sea $A = (x_0, y_0)$ un punto de la recta y $\vec{u} = (a, b)$ un vector de dirección de la recta. Hallar la ecuación de la recta consiste en obtener la condición que cumplen los puntos que pertenecen a ella, por lo que la pregunta que debemos hacernos es la siguiente: ¿qué condición cumple un punto $P = (x, y)$ por el hecho de estar en la recta?



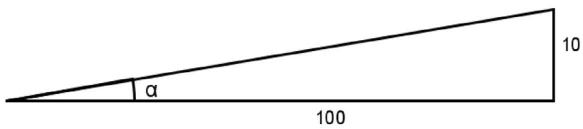
La respuesta a la pregunta anterior es: un punto P estará en la recta, si el vector que determina con el punto conocido A es paralelo (o proporcional) al vector de dirección de la recta.

Es decir, $\boxed{\overrightarrow{AP} = k \cdot \vec{u}}$ que se conoce como <u>ecuación vectorial</u> de la recta.

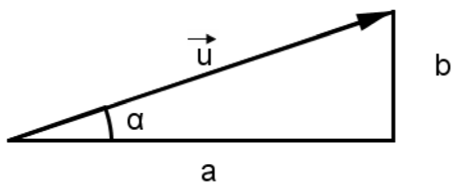
Si escribimos esta igualdad en coordenadas, tendremos la <u>ecuación vectorial en coordenadas</u>: $\boxed{(x - x_0, y - y_0) = k \cdot (a, b)}$.

Igualando las coordenadas: $\begin{cases} x - x_0 = k \cdot a \\ y - y_0 = k \cdot b \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = x_0 + k \cdot a \\ y = y_0 + k \cdot b \end{cases}}$, que se llaman <u>ecuaciones paramétricas</u>.

Si ahora despejamos ‘k’ en las dos ecuaciones, e igualamos los resultados, eliminamos el parámetro: $\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{a} = k \\ \dfrac{y - y_0}{b} = k \end{cases} \Rightarrow \boxed{\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}}$, que es la <u>ecuación continua</u> de la recta.



Antes de ver la siguiente forma de ecuación, explicaremos qué es la pendiente de una recta: si en la carretera vemos una señal de tráfico que indica que la pendiente es del 10 %, significa que por cada 100 m de avance en la horizontal, subimos 10 m en vertical. Es decir, la pendiente es la proporción entre el avance en la vertical con respecto al avance en la horizontal. O, lo que es lo mismo, la pendiente de la recta es la tangente del ángulo que forma la recta con la horizontal:



$m = tg\alpha = \dfrac{10}{100} = 0{,}1$ (es decir, 10%).

En una recta, la pendiente puede obtenerse a partir de su vector de dirección: $\boxed{m = tg\alpha = \dfrac{b}{a}}$.

Operando desde la ecuación continua: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} \Rightarrow \dfrac{b}{a}(x - x_0) = y - y_0$

Es decir: $\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$, que es la <u>ecuación punto-pendiente</u>.

Si despejamos ‘y’ en la ecuación continua, o en la ecuación punto pendiente, obtenemos la <u>ecuación explícita</u>: $y = m(x - x_0) + y_0$, muy útil a la hora de representar gráficamente la recta.

Por último, la <u>ecuación general</u> se obtiene eliminando denominadores y agrupando todos los términos en un mismo miembro:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \Rightarrow bx - bx_0 = ay - ay_0 \Rightarrow \overbrace{b}^{A}x \overbrace{-a}^{B}y + \overbrace{ay_0 - bx_0}^{C} = 0$$

O lo que es lo mismo: $\boxed{Ax + By + C = 0}$. Siendo $\begin{cases} A = b \\ B = -a \\ C = ay_0 - bx_0 \end{cases}$. Es decir, una recta es una ecuación con dos incógnitas. Esta ecuación confirma una idea ya conocida: una recta puede describirse mediante una ecuación con dos incógnitas. De hecho, en la representación gráfica de los sistemas de ecuaciones, la solución es precisamente el punto de intersección de las rectas.

Ejemplo: hallar todas las ecuaciones y representar gráficamente la recta que pasa por los puntos $A = (1,2)$ y $B = (2,5)$.

Un punto puede ser A y un vector de dirección: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2-1, 5-2) = (1,3)$

La ecuación vectorial es, como siempre: $\overrightarrow{AP} = k \cdot \vec{u}$.

La ecuación vectorial en coordenadas es: $(x-1, y-2) = k \cdot (1,3)$

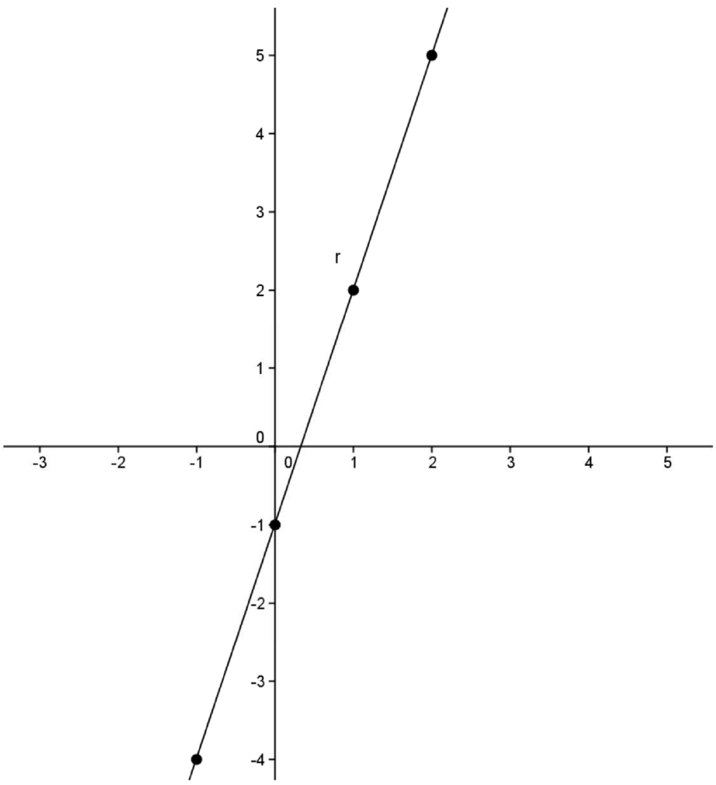
Igualando las coordenadas: $\begin{cases} x - 1 = k \cdot 1 \\ y - 2 = k \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 + 2k \end{cases}$, que son las ecuaciones paramétricas. Ahora, despejamos 'k' e igualamos las dos ecuaciones: $\begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = k \\ \dfrac{y-2}{3} = k \end{cases} \Rightarrow x - 1 = \dfrac{y-2}{3}$, que es la ecuación continua.

Despejando: $y - 2 \Rightarrow y - 2 = 3(x-1)$, que es la ecuación punto-pendiente.

Despejando: $y \Rightarrow y = 3x - 3 + 2 \Rightarrow y = 3x - 1$, que es la ecuación explícita.

Pasando a un mismo miembro: $-3x + y + 1 = 0 \Rightarrow 3x - y - 1 = 0$, obtenemos la ecuación general.

Como acabamos de ver en este ejemplo, las ecuaciones se deducen unas de otras de forma natural, por lo que no son necesarias las fórmulas.



Para representar gráficamente la recta, construimos una tabla de valores, damos valores a la variable 'x' y sustituimos preferentemente en la ecuación explícita. $y = 3x - 1$

x	y
-1	-4
0	-1
1	2
2	5
3	8

Observamos que, efectivamente, la recta pasa por los puntos iniciales: $A = (1,2)$ y $B = (2,5)$.

7.2 Interpretación de la ecuación: punto, vector y gráfica.

- Para obtener las distintas ecuaciones de una recta no es necesario memorizar todas las fórmulas, ya que unas se deducen de otras. Sin embargo, sí es importante conocer bien cada una de ellas para poder identificar rápidamente, a partir de la ecuación de una recta: un punto, un vector director y otros puntos que permitan representarla gráficamente.

  - Si la ecuación está escrita en la forma vectorial en coordenadas, $(x-x_0, y-y_0) = k\cdot(a,b)$, las coordenadas de un punto son los números que se restan a las variables en la izquierda y un vector es el que aparece a la derecha. Para hallar más puntos y representar gráficamente, se dan valores al parámetro 'k' y se obtiene para cada valor un punto de la recta.

    Ejemplo: $r \equiv (x-1, y+2) = k\cdot(2,-1)$, $A=(1,-2)$, $\vec{u}=(2,-1)$ y dando valores a 'k':

    $$k=-1 \Rightarrow (x-1,y+2)=(-2,1) \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$$

    $$k=0 \Rightarrow (x-1,y+2)=(0,0) \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$$

    $$k=1 \Rightarrow (x-1,y+2)=(2,-1) \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases}$$

k	x	y
-1	-1	-1
0	1	-2
1	3	-3

  - Si la ecuación está escrita en paramétricas, $r \equiv \begin{cases} x = x_0 + k\cdot a \\ y = y_0 + k\cdot b \end{cases}$, las coordenadas de un punto son los términos independientes en la derecha y las coordenadas del vector son los coeficientes del parámetro 'k'. Para hallar más puntos y representar gráficamente, se dan valores al parámetro 'k' y se obtiene para cada valor un punto de la recta.

    Ejemplo: $r \equiv \begin{cases} x = 1+2k \\ y = -2-k \end{cases}$, $A=(1,-2)$, $\vec{u}=(2,-1)$ y dando valores:

    $$k=-1 \Rightarrow \begin{cases} x=1-2 \\ y=-2+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$$

    $$k=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1+0 \\ y=-2+0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$$

    $$k=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1+2 \\ y=-2-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases}$$

k	x	y
-1	-1	-1
0	1	-2
1	3	-3

  - Si la ecuación está en forma continua, $\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b}$, las coordenadas de un punto son los números que se restan a las variables en el numerador, mientras que las coordenadas del vector, son los denominadores. Para tener más puntos y representar gráficamente, se dan valores a la variable 'x' y se despeja el valor correspondiente de la variable 'y'.

Ejemplo: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}$, $A=(1,-2)$, $\vec{u}=(2,-1)$ y damos valores a 'x':

$$x=-1 \Rightarrow \frac{-1-1}{2}=\frac{y+2}{-1} \Rightarrow -1=\frac{y+2}{-1} \Rightarrow 1=y+2 \Rightarrow -1=y$$

$$x=1 \Rightarrow \frac{1-1}{2}=\frac{y+2}{-1} \Rightarrow 0=\frac{y+2}{-1} \Rightarrow 0=y+2 \Rightarrow -2=y$$

$$x=3 \Rightarrow \frac{3-1}{2}=\frac{y+2}{-1} \Rightarrow 1=\frac{y+2}{-1} \Rightarrow -1=y+2 \Rightarrow -3=y$$

x	y
−1	−1
1	−2
3	−3

- Si la ecuación está escrita en forma punto-pendiente: $y-y_0=m\left(x-x_0\right)$, las coordenadas de un punto son los números que se restan a las variables y un vector es: $\vec{u}=(1,m)$, para que la pendiente sea 'm'. Para hallar más puntos y representar gráficamente, se dan valores a la variable 'x' igual que en la ecuación continua.

  Ejemplo: $r \equiv y+2=-\frac{1}{2}(x-1)$, $A=(1,-2)$, $\vec{u}=\left(1,-\frac{1}{2}\right)$ o bien, multiplicando por 2, las coordenadas del vector, $\vec{u}'=(2,-1)$ porque, lo que importa del vector, es sólo su dirección. Ahora, damos valores a 'x':

$$x=-1 \Rightarrow y+2=-\frac{1}{2}(-1,-1) \Rightarrow y+2=1 \Rightarrow y=-1$$

$$x=1 \Rightarrow y+2=-\frac{1}{2}(1,1) \Rightarrow y+2=0 \Rightarrow y=-2$$

$$x=3 \Rightarrow y+2=-\frac{1}{2}(3,1) \Rightarrow y+2=-1 \Rightarrow y=-3$$

x	y
−1	−1
1	−2
3	−3

- Finalmente, si la ecuación está escrita en forma general, $Ax+By+C=0$.

  Siendo: $\begin{cases} A=b \\ B=-a \\ C=ay_0-bx_0 \end{cases}$. Un vector de dirección es: $\boxed{\vec{u}=(a,b)=(-B,A)}$.

  Para hallar más puntos y representar gráficamente, se dan valores a la variable 'x' igual que en las ecuaciones anteriores.

  Ejemplo: $x+2y+3=0$, $\vec{u}=(-2,1)$ y ahora, dando valores:

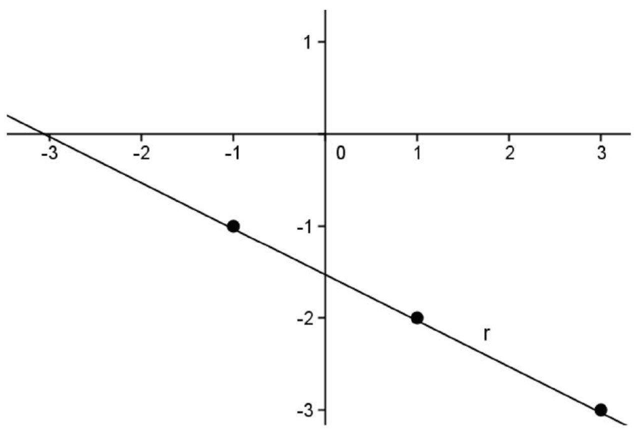
$$x=-1 \Rightarrow -1+2y+3=0 \Rightarrow 2y=-2 \Rightarrow y=-1$$

$$x=1 \Rightarrow 1+2y+3=0 \Rightarrow 2y=-4 \Rightarrow y=-2$$

$$x=3 \Rightarrow 3+2y+3=0 \Rightarrow 2y=-6 \Rightarrow y=-3$$

x	y
−1	−1
1	−2
3	−3

Observamos que todas las tablas de las distintas ecuaciones proporcionan exactamente los mismos puntos y representan la misma recta.

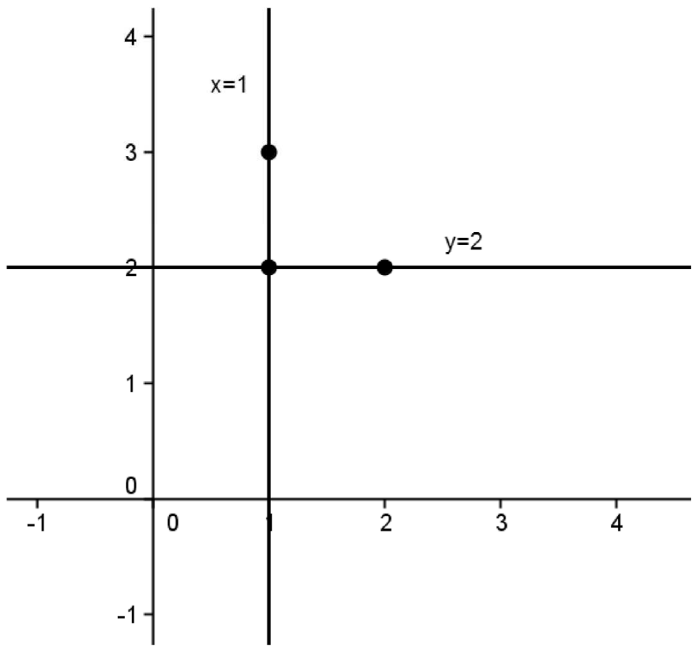


- Las rectas verticales y horizontales constituyen casos particulares especiales dentro del estudio de las ecuaciones de la recta. En ellas, alguna de las coordenadas del vector de dirección es nula y, por tanto, la ecuación continua no puede escribirse, ya que aparecería una división por cero.

  En realidad, en estas rectas todas las diferentes expresiones de la ecuación de la recta coinciden y se reducen a una expresión muy sencilla:
  En las rectas horizontales: $\boxed{y = b}$. Y en las rectas verticales: $\boxed{x = a}$.
  Por ejemplo, el eje de abscisas OX es: $y = 0$ y el eje de ordenadas OY: $x = 0$.

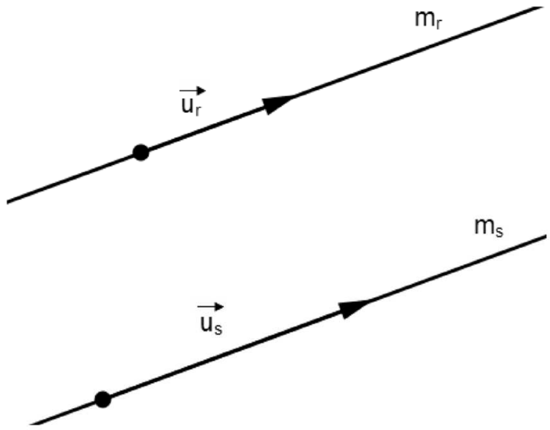
  - Ejemplo de recta vertical: pasa por los puntos $A = (1,2)$ y $B = (1,3)$. Un punto puede ser A y un vector de dirección: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1-1, 3-2) = (0,1)$.
    La ecuación vectorial es $\overrightarrow{AP} = k \cdot \vec{u}$. La ecuación vectorial en coordenadas es: $(x-1, y-2) = k \cdot (0,1)$. En paramétricas: $\begin{cases} x-1 = k \cdot 0 \\ y-2 = k \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + k \end{cases}$.
    Que significa que la primera coordenada ‘x’ es siempre 1 y la segunda coordenada ‘y’ puede ser cualquier número.
    Luego, todas las ecuaciones coinciden y pueden expresarse como: $x = 1$.

  - Ejemplo de recta horizontal: pasa por los puntos $A = (1,2)$ y $B = (2,2)$. Un punto puede ser A y un vector de dirección: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2-1, 2-2) = (1,0)$
    La ecuación vectorial es $\overrightarrow{AP} = k \cdot \vec{u}$. La ecuación vectorial en coordenadas es: $(x-1, y-2) = k \cdot (1,0)$. En paramétricas: $\begin{cases} x-1 = k \cdot 1 \\ y-2 = k \cdot 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 \end{cases}$.
    Que significa que la segunda coordenada ‘y’ es siempre 2 y la primera ‘x’ es cualquier número.
    Luego, todas las ecuaciones coinciden y pueden expresarse como: $y = 2$.



7.3 Paralelismo y perpendicularidad. Posiciones relativas.

- Paralelismo: si dos rectas son paralelas, entonces sus vectores de dirección son proporcionales y sus pendientes coinciden. Además, si las rectas están escritas en forma general, los coeficientes de 'x' e 'y' serán proporcionales.



$\vec{u}_r = (a, b)$ y $\vec{u}_s = k\cdot \vec{u}_r = k\cdot(a, b) = (ka, kb)$, son proporcionales.

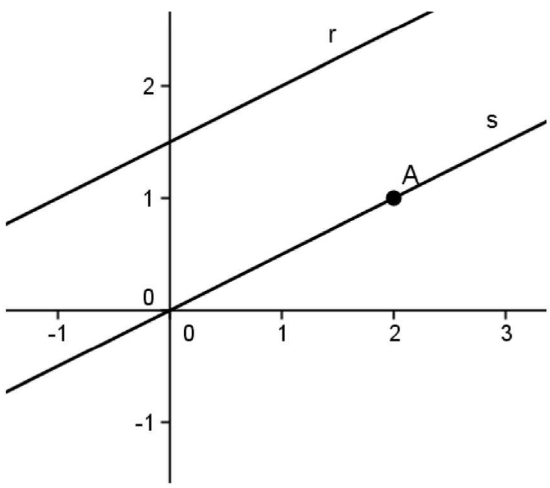
$m_r = \dfrac{b}{a}$ y $m_s = \dfrac{kb}{ka} = \dfrac{b}{a} = m_r$. Las pendientes coinciden.

$\begin{cases} r \equiv Ax + By + C = 0 \\ s \equiv A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$ Como, $\vec{u}_s = k\cdot \vec{u}_s \Rightarrow (-B', A') = k\cdot(-B, A)$

$\begin{cases} -B' = -k\cdot B \\ A' = k\cdot A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{B'}{B} = k \\ \dfrac{A'}{A} = k \end{cases} \Rightarrow \dfrac{B'}{B} = \dfrac{A'}{A}$. Luego, los coeficientes de 'x' e 'y' son proporcionales y las rectas se distinguen sólo en el término independiente.

Ejemplo: Determinar si las rectas siguientes rectas son o no paralelas.

$\begin{cases} r \equiv 2x - y + 1 = 0 \\ s \equiv -4x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$ Como $\vec{u}_r = (1,2)$ y $\vec{u}_s = (-2,-4)$ son proporcionales, las rectas son paralelas. Además, las rectas no coinciden, ya que los términos independientes no guardan la misma proporción que los demás coeficientes.



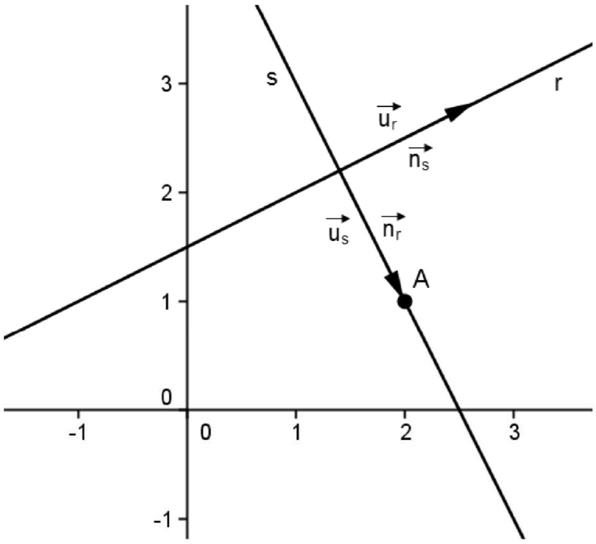
Ejemplo: dada la recta: $r \equiv x - 2y + 3 = 0$ y el punto $A = (2,1)$, hallar la ecuación de la recta 's' paralela a 'r' que pasa por el punto A. Necesitamos un punto y un vector de dirección, el punto es A y un vector de dirección será el mismo de la recta inicial: $\vec{u}_s = \vec{u}_r = (-B, A) = (2,1)$. En paramétricas:

$\begin{cases} x-2=k\cdot 2 \\ y-1=k\cdot 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2+2k \\ y=1+k \end{cases}$ igualamos: $\begin{cases} \dfrac{x-2}{2}=k \\ \dfrac{y-1}{1}=k \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}$

$\Rightarrow x-2=2y-2 \Rightarrow x-2y=0$.

Otra forma más rápida de hacer el mismo ejercicio, consiste en considerar directamente: $s \equiv x-2y+C=0$ (por ser paralela) y C se obtiene imponiendo que debe pasar por el punto A: $2-2\cdot 1+C=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow s \equiv x-2y=0$.

- Perpendicularidad: si dos rectas son perpendiculares, entonces el producto escalar de sus vectores de dirección será cero.
  $r \perp s \Leftrightarrow \vec{u}_r=(a,b) \perp \vec{u}_s=(a',b') \Leftrightarrow a\cdot a'+b\cdot b'=0$.
  Siguiendo con la igualdad anterior: $a\cdot a'=-b\cdot b' \Leftrightarrow 1=-\dfrac{b\cdot b'}{a\cdot a'} \Leftrightarrow \boxed{-1=m_r\cdot m_s}$
  Es decir, el producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares es -1.
  Además, si una recta está expresada en forma general: $r \equiv Ax+By+C=0$, entonces un vector perpendicular o normal es: $\boxed{\vec{n}_r=(A,B)}$. Esto se debe a que un vector de dirección es: $\vec{u}_r=(-B,A)$ y, el producto escalar de ambos vectores es: $\vec{u}_r \bullet \vec{u}_s=-AB+AB=0$, por lo que son perpendiculares.
  Ejemplo: comprobar si las siguientes rectas son o no perpendiculares:
  $\begin{cases} r \equiv 2x-y+1=0 \\ s \equiv 2x+4y+3=0 \end{cases}$ Como $\vec{u}_r=(1,2)$ y $\vec{u}_s=(-4,2)$, las rectas son perpendiculares, ya que: $\vec{u}_r \bullet \vec{u}_s=-4+4=0$, o bien: $m_r\cdot m_s=2\cdot\dfrac{2}{-4}=-1$.



Ejemplo: dada la recta: $r \equiv x-2y+3=0$ y el punto $A=(2,1)$, hallar la ecuación de la recta 's' perpendicular a 'r' por el punto A.
Necesitamos un punto y un vector de dirección, el punto es A y un vector de dirección será el vector normal de la recta 'r': $\vec{u}_s=\vec{n}_r=(A,B)=(1,-2)$.
En paramétricas:
$\begin{cases} x-2=k\cdot 1 \\ y-1=k\cdot(-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2+k \\ y=1-2k \end{cases}$

Despejamos 'k' e igualamos: $\begin{cases} \dfrac{x-2}{1}=k \\ \dfrac{y-1}{-2}=k \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-2} \Rightarrow$

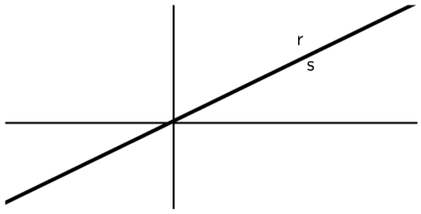
$\Rightarrow -2x+4=y-1 \Rightarrow \Rightarrow -2x-y+5=0 \Rightarrow 2x+y-5=0$.

Otra forma más rápida de hacer el mismo ejercicio, consiste en considerar que: $\vec{n}_s = \vec{u}_r = (-B, A) = (2,1)$. Por tanto, podemos escribir directamente una ecuación general: $s \equiv 2x + y + C = 0$. Para determinar C, imponemos que la recta pase por el punto A: $2\cdot 2 + 1\cdot 1 + C = 0 \Rightarrow C = -5 \Rightarrow s \equiv 2x + y - 5 = 0$.

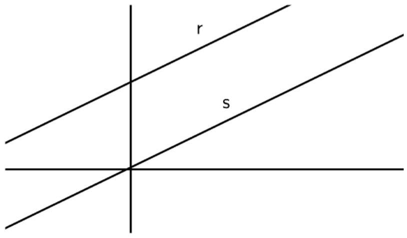
Es muy importante observar: que si dos rectas son perpendiculares, el vector de dirección de una de ellas es, a su vez, vector normal de la otra recta.

- Las posiciones relativas de dos rectas están directamente relacionadas con el concepto de paralelismo: si las rectas son paralelas, pueden ser a su vez, coincidentes o no. Y si no son paralelas, automáticasmente serán secantes y se cortarán en un punto. El hecho de ser perpendiculares, no es una posición relativa, sino que es un caso particular de rectas secantes.

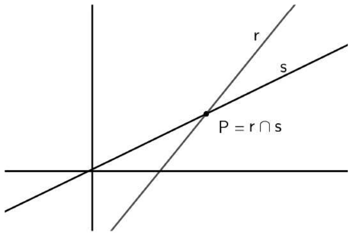
  - Coincidentes. Los coeficientes de las incógnitas son proporcionales y, también son proporcionales, los términos independientes. En realidad, es la misma ecuación repetida.



  - Paralelas. Los coeficientes de las incógnitas son proporcionales, pero no así los términos independientes.



  - Secantes. Cualquier otra situación. Es decir, los coeficientes de las incógnitas no son proporcionales, o bien los vectores no son proporcionales. Las rectas se cortan en un punto, que se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones que determinan.



Ejemplo: estudiar la posición relativa de las siguientes rectas, representarlas gráficamente y hallar, si es posible, su intersección: $\begin{cases} r \equiv 2x - y - 1 = 0 \\ s \equiv 2x - 4y + 2 = 0 \end{cases}$.

Claramente, observamos que no son paralelas porque los coeficientes de las incógnitas no son proporcionales. Resolvemos entonces el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y = 1 \\ 2x - 4y = -2 \end{array}\right\} 2^{\text{a}} \text{ por } (-1) \Rightarrow \begin{array}{c} \left.\begin{array}{r} 2x - y = 1 \\ -2x + 4y = 2 \end{array}\right\} + \\ \hline 3y = 3 \end{array} \Rightarrow 3y = 3 \Rightarrow y = 1$$

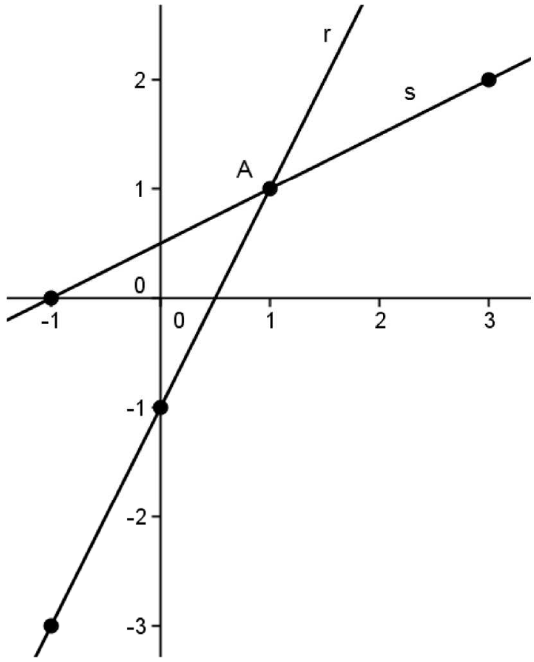
. Como $y = 1$, sustituyendo en la 1ª ecuación: $2x - 1 = 1 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$.

Luego, las rectas r y s son secantes y su punto de corte es: $P = (1,1)$.

r: $y = 2x - 1$ s: $y = \frac{x+1}{2}$

x	y
−1	−3
0	−1
1	1

x	y
−1	0
1	1
3	2



7.4 Ángulos y distancias.

- El ángulo que determinan dos rectas, es el mismo que determinan sus vectores de dirección. Hay que tener que, al cortarse dos rectas, determinan cuatro ángulos iguales dos a dos. Nos fijaremos siempre en el ángulo menor de ellos, es decir, en el ángulo agudo.

  $$\widehat{(r,s)} = \widehat{(\vec{u}_r, \vec{u}_s)} = \arccos \frac{\vec{u}_r \bullet \vec{u}_s}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_s|}$$

  Ejemplo: Hallar el ángulo que determinan las rectas secantes del ejercicio anterior: $\begin{cases} r \equiv 2x - y - 1 = 0 \\ s \equiv 2x - 4y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_r = (1,2) \\ \vec{u}_s = (4,2) \end{cases}$

  $$\Rightarrow \alpha = \arccos \frac{\vec{u}_r \bullet \vec{u}_s}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_s|} = \arccos \frac{(1,2)\bullet(4,2)}{|(1,2)| \cdot |(4,2)|} = \arccos \frac{1\cdot 4 + 2\cdot 2}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{4^2+2^2}} = \arccos \frac{8}{\sqrt{5}\sqrt{20}} =$$

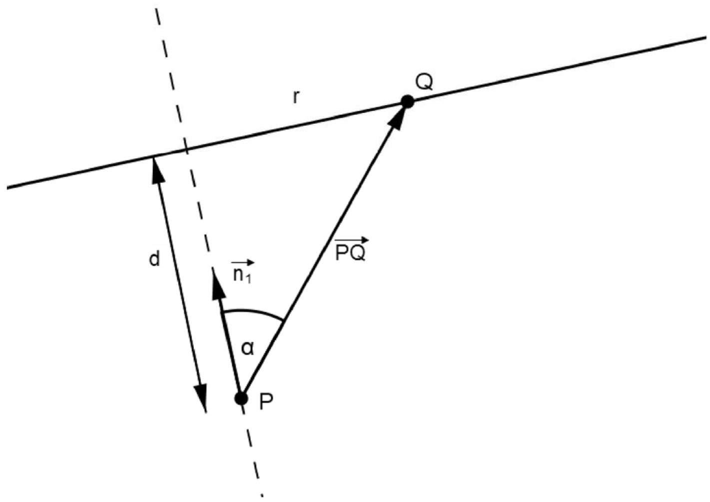
  $$= \arccos \frac{8}{\sqrt{100}} = \arccos \frac{8}{10} = \arccos 0{,}8 = 36{,}869897^\circ = 36^\circ 52' 11{,}63''.$$

- La distancia entre dos puntos es igual al módulo del vector que los une.
  Ejemplo: Hallar la distancia entre los puntos: $A = (1,1)$ y $B = (3,2)$

  $$\overrightarrow{AB} = (3-1, 2-1) = (2,1) \Rightarrow d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = |(2,1)| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}.$$

- Distancia de un punto a una recta: dado un punto $P = (x_0, y_0)$ y una recta en forma general: $r \equiv Ax + By + C = 0$, entonces la distancia se obtiene mediante la siguiente fórmula: $\boxed{d(P,r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$.

  Demostración: consideremos en primer lugar un vector normal unitario a la recta: $\vec{n}_1 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(A,B)}{\sqrt{A^2+B^2}} = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$.



Vamos a calcular la distancia: $d = d(P, r)$, utilizando el producto escalar de los vectores $\vec{n}_1$ y $\overrightarrow{PQ}$, siendo $Q = (x_1, y_1)$ un punto cualquiera de la recta.

$$\vec{n}_1 \bullet \overrightarrow{PQ} = |\vec{n}_1| \cdot \left|\overrightarrow{PQ}\right| \cdot \cos\alpha = |\vec{n}_1| \cdot \left|\overrightarrow{PQ}\right| \cdot \frac{d}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|} = d$$

En realidad, esta igualdad sólo es cierta considerada en valor absoluto: $\left|\vec{n}_1 \bullet \overrightarrow{PQ}\right| = d$, porque depende del sentido del vector $\vec{n}_1$, más concretamente:

- Si el vector apunta hacia la recta, α es agudo y tiene coseno positivo.
- Pero si apunta en sentido contrario, alejándose de la recta, el ángulo α pasaría a ser el suplementario (obstuso) y tendría coseno negativo.

$$d = \left|\vec{n}_1 \bullet \overrightarrow{PQ}\right| = \left|\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) \bullet (x_1 - x_0, y_1 - y_0)\right| = \qquad -C$$

$$= \left|\frac{A\cdot(x_1 - x_0)}{\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{B\cdot(y_1 - y_0)}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| = \frac{|A\cdot(x_1 - x_0) + B\cdot(y_1 - y_0)|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|A\cdot x_1 - A\cdot x_0 + B\cdot y_1 - B\cdot y_0|}{\sqrt{A^2+B^2}} =$$

$$= \frac{|-A\cdot x_0 - B\cdot y_0 - C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|A\cdot x_0 + B\cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Es decir, la distancia se obtiene al sustituir las coordenadas del punto en la expresión de la recta "pero sin igualar a cero", tomando luego el valor absoluto del resultado y dividiendo al final entre el módulo del vector normal.

Ejemplo: hallar analítica y gráficamente la distancia del punto: $P = (1,4)$ a la recta: $r \equiv x - 2y + 2 = 0$.

El método gráfico consiste en hallar la recta: $s \perp r$ por P, después calcular el punto: $Q = r \cap s$ y, finalmente, la distancia será: $d = d(P, r) = \left|\overrightarrow{PQ}\right|$. La recta perpendicular 's' tendrá como vector de dirección: $\vec{u}_s = \vec{n}_r = (A, B) = (1, -2)$.

En paramétricas: $\begin{cases} x - 1 = k\cdot 1 \\ y - 4 = k\cdot(-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 4 - 2k \end{cases}$.

Despejamos 'k' e igualamos: $\begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = k \\ \dfrac{y-4}{-2} = k \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-4}{-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow -2x + 2 = y - 4 \Rightarrow \ \Rightarrow -2x - y + 6 = 0 \Rightarrow 2x + y - 6 = 0$.

$\begin{cases} r \equiv x - 2y + 2 = 0 \\ s \equiv 2x + y - 6 = 0 \end{cases}$. Resolvemos ahora el sistema que determinan:

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y = -2 \\ 2x + y = 6 \end{array}\right\} 1^{\text{a}} \text{ por } (-2) \Rightarrow \begin{array}{c} \left.\begin{array}{r} -2x + 4y = 4 \\ 2x + y \;\; = 6 \end{array}\right\} + \\ \hline 5y = 10 \end{array} \Rightarrow 5y = 10 \Rightarrow y = 2.$$

Como $y = 2$; por ejemplo, sustituyendo en la 1ª ecuación, tendremos: $x - 4 = -2 \Rightarrow x = 4 - 2 \Rightarrow x = 2$. Las rectas 'r' y 's' se cortan en: $Q = (2,2)$.

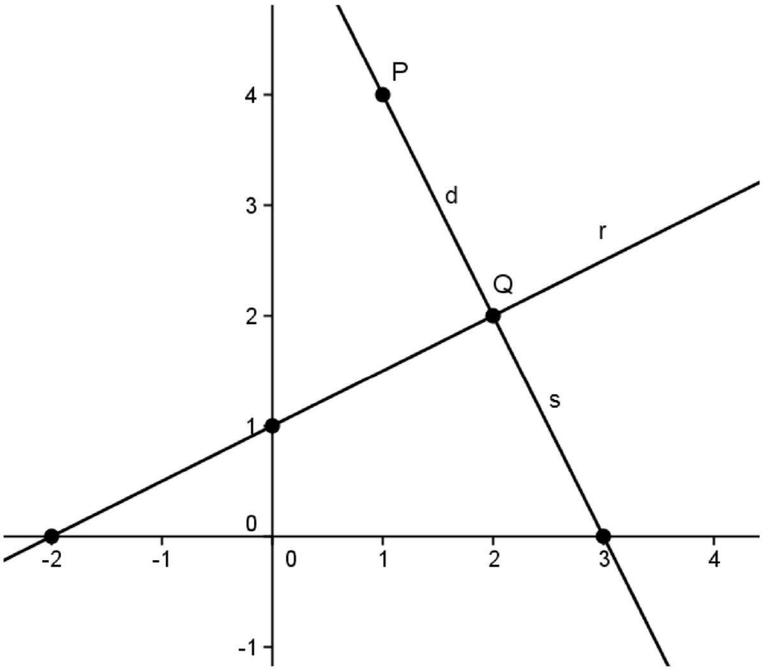
La distancia es: $d = d(P, r) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = |(2-1, 2-4)| = |(1,-2)| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.

r: $y = \dfrac{x+2}{2}$

x	y
−2	0
0	1
2	2

s: $y = -2x + 6$

x	y
1	4
2	2
3	0



El método analítico consiste simplemente en aplicar la fórmula:

$d(P, r) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{|1 \cdot 1 - 2 \cdot 4 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \dfrac{|-5|}{\sqrt{5}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$. Igual que el resultado que se obtenido por el método gráfico.

- Distancia entre dos rectas. Si las rectas son secantes o coincidentes la distancia es cero. Sólo tiene sentido cuando las rectas son paralelas. En ese caso, la distancia entre ambas coincide con la distancia de cualquier punto de una de ellas a la otra recta: $d(r, s) = d(P_r, s)$. Es decir, sería esencialmente el mismo proceso (ya visto) para hallar la distancia de un punto a una recta.

7.5 Rectas y puntos importantes del triángulo.

- Medianas y baricentro: se llama mediana a la recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto. La intersección de las medianas es el baricentro o centro de gravedad del triángulo.

  Ejemplo: hallar las medianas y el baricentro del triángulo de vértices $A=(1,1),\ B=(4,1)$ y $C=(3,3)$.

$$m_1 \equiv \begin{cases} A=(1,1) \\ \dfrac{B+C}{2}=\left(\dfrac{7}{2},2\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=(1,1) \\ \vec{u}=\overrightarrow{A\dfrac{B+C}{2}}=\left(\dfrac{5}{2},1\right)\approx(5,2) \end{cases}$$

$$m_1 \equiv \frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{2} \Rightarrow 2x-2=5y-5 \Rightarrow 2x-5y+3=0.$$

$$m_2 \equiv \begin{cases} B=(4,1) \\ \dfrac{A+C}{2}=(2,2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=(4,1) \\ \vec{u}=\overrightarrow{B\dfrac{A+C}{2}}=(-2,1) \end{cases}$$

$$m_2 \equiv \frac{x-4}{-2}=\frac{y-1}{1} \Rightarrow x-4=-2y+2 \Rightarrow x+2y-6=0.$$

$$m_3 \equiv \begin{cases} C=(3,3) \\ \dfrac{A+B}{2}=\left(\dfrac{5}{2},1\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=(3,3) \\ \vec{u}=\overrightarrow{C\dfrac{A+B}{2}}=\left(\dfrac{-1}{2},-2\right)\approx(1,4) \end{cases}$$

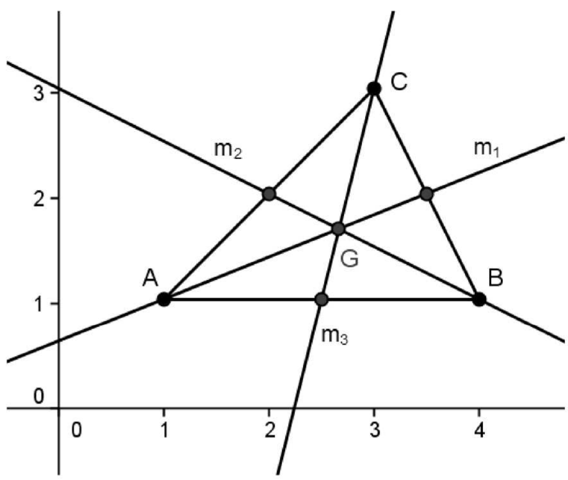
$$m_3 \equiv \frac{x-3}{1}=\frac{y-3}{4} \Rightarrow 4x-12=y-3 \Rightarrow 4x-y-9=0.$$

$\begin{cases} m_1 \equiv 2x-5y+3=0 \\ m_2 \equiv x+2y-6=0 \end{cases}$. Resolvemos ahora el sistema que determinan:

$$\left.\begin{matrix} 2x-5y=-3 \\ x+2y=6 \end{matrix}\right\} \text{ 2ª por } (-2) \Rightarrow \begin{array}{r} \left.\begin{matrix} 2x-5y=-3 \\ -2x-4y=-12 \end{matrix}\right\}+ \\ \hline -9y=-15 \end{array} \Rightarrow 3y=5 \Rightarrow y=\frac{5}{3}.$$

Como $y=\dfrac{5}{3}$; por ejemplo, sustituyendo en la 1ª ecuación, tendremos:

$2x-\dfrac{25}{3}=-3 \Rightarrow 6x-25=-9 \Rightarrow 6x=16 \Rightarrow 3x=8 \Rightarrow x=\dfrac{8}{3}$. Luego, el baricentro es: $G=\left(\dfrac{8}{3},\dfrac{5}{3}\right)$. Que pertenece también pertenece a la mediana m_3.



- Mediatrices y circuncentro: se llama mediatriz a la recta perpendicular a un lado que pasa por su punto medio. La intersección de las mediatrices es el circuncentro o centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.
  Ejemplo: hallar las mediatrices y el circuncentro del triángulo de vértices $A=(1,1)$, $B=(4,1)$ y $C=(3,3)$.
  Previamente a cada mediatriz, calculamos la recta lado correspondiente:

$$r_{AB} \equiv \begin{cases} A=(1,1) \\ B=(4,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=(1,1) \\ \vec{u}=\overrightarrow{AB}=(3,0) \end{cases} \Rightarrow r_{AB} \equiv y=1$$

$$M_1 \equiv \begin{cases} \dfrac{A+B}{2}=\left(\dfrac{5}{2},1\right) \\ \vec{u}_{M_1}=\vec{n}_{r_{AB}}=(0,1) \end{cases} \Rightarrow M_1 \equiv x=\frac{5}{2}$$

$$r_{AC} \equiv \begin{cases} A=(1,1) \\ C=(3,3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=(1,1) \\ \vec{u}=\overrightarrow{AC}=(2,2) \end{cases} \Rightarrow r_{AC} \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-2=2y-2 \Rightarrow 2x-2y=0 \Rightarrow x-y=0.$$

$$M_2 \equiv \begin{cases} \dfrac{A+C}{2}=(2,2) \\ \vec{u}_{M_2}=\vec{n}_{r_{AC}}=(1,-1) \end{cases} \Rightarrow M_2 \equiv \frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{-1} \Rightarrow -x+2=y-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x-y+4=0 \Rightarrow M_2 \equiv x+y-4=0$$

$$r_{BC} \equiv \begin{cases} B=(4,1) \\ C=(3,3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=(4,1) \\ \vec{u}=\overrightarrow{BC}=(-1,2) \end{cases} \Rightarrow r_{BC} \equiv \frac{x-4}{-1}=\frac{y-1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-8=-y+1 \Rightarrow 2x+y-9=0.$$

$$M_3 \equiv \begin{cases} \dfrac{B+C}{2}=\left(\dfrac{7}{2},2\right) \\ \vec{u}_{M_3}=\vec{n}_{r_{BC}}=(2,1) \end{cases} \Rightarrow M_3 \equiv \frac{x-\frac{7}{2}}{2}=\frac{y-2}{1} \Rightarrow x-\frac{7}{2}=2y-4 \Rightarrow$$

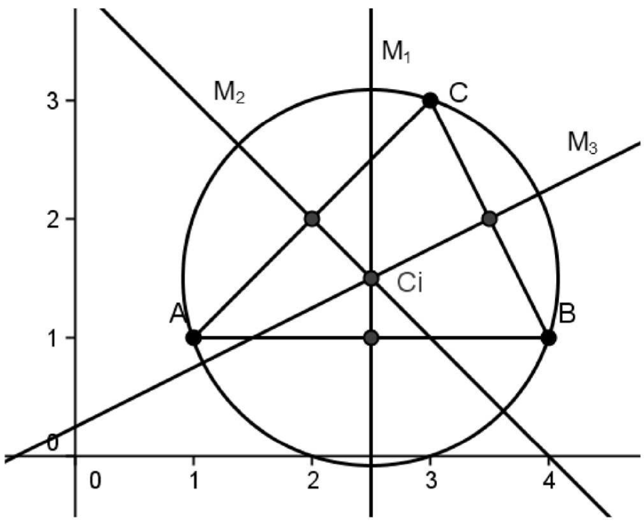
$$\Rightarrow 2x-7=4y-8 \Rightarrow M_3 \equiv 2x-4y+1=0$$

$\begin{cases} M_1 \equiv x-\dfrac{5}{2}=0 \\ M_2 \equiv x+y-4=0 \end{cases}$. Resolvemos ahora el sistema que determinan: como $x=\frac{5}{2}$, sustituyendo en la 2ª ecuación tendremos:

$$\frac{5}{2}+y-4=0 \Rightarrow 5+2y-8=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y=3 \Rightarrow y=\frac{3}{2}.$$

Luego, el circuncentro es $Ci=\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$. Que pertenece también a la mediatriz M_3.



- Alturas y ortocentro: se llama recta altura a la que pasa por un vértice de forma perpendicular al lado opuesto. La intersección de las rectas alturas es el ortocentro. El ortocentro tiene menor utilidad práctica, sería el circuncentro del triángulo (circunscrito) obtenido al trazar paralelas a cada lado que pasan por el vértice opuesto. Ejemplo: hallar las rectas altura y ortocentro del triángulo de vértices $A=(1,1)$, $B=(4,1)$ y $C=(3,3)$.

  $r_{AB} \equiv y=1$, obtenida en el apartado anterior.

  $$a_1 \equiv \begin{cases} C=(3,3) \\ \vec{u}_{a_1}=\vec{n}_{r_{AB}}=(0,1) \end{cases} \Rightarrow a_1 \equiv x=3$$

  $r_{AC} \equiv x-y=0$, obtenida en el apartado anterior.

  $$a_2 \equiv \begin{cases} B=(4,1) \\ \vec{u}_{a_2}=\vec{n}_{r_{AC}}=(1,-1) \end{cases} \Rightarrow a_2 \equiv \frac{x-4}{1}=\frac{y-1}{-1} \Rightarrow -x+4=y-1 \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow -x-y+5=0 \Rightarrow a_2 \equiv x+y-5=0$$

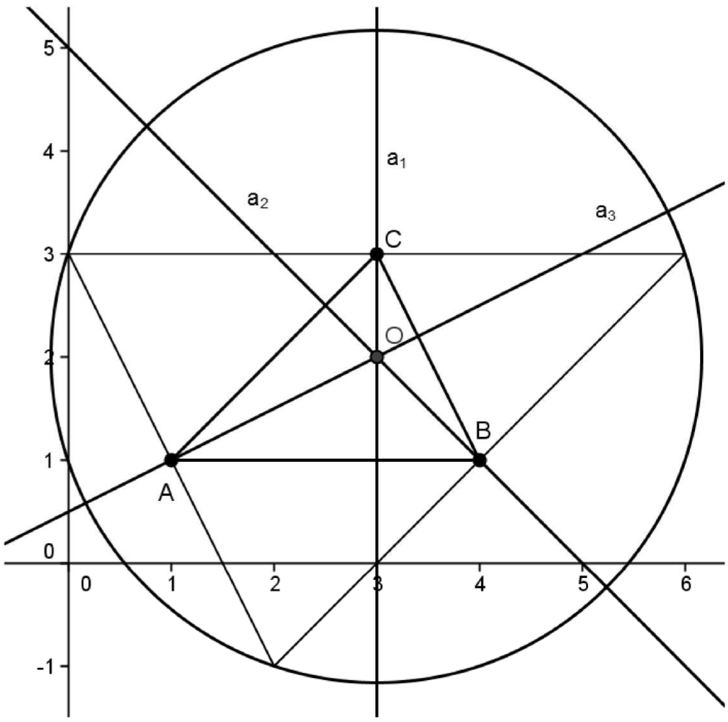
  $r_{BC} \equiv 2x+y-9=0$, obtenida en el apartado anterior.

  $$a_3 \equiv \begin{cases} A=(1,1) \\ \vec{u}_{a_3}=\vec{n}_{r_{BC}}=(2,1) \end{cases} \Rightarrow a_3 \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1} \Rightarrow x-1=2y-2 \Rightarrow$$

  $$a_3 \equiv x-2y+1=0$$

  $$\begin{cases} a_1 \equiv x-3=0 \\ a_2 \equiv x+y-5=0 \end{cases}.$$

  Resolvemos ahora el sistema que determinan: como $x=3$, sustituyendo en la 2ª ecuación tendremos: $3+y-5=0 \Rightarrow y=2$. Luego, el ortocentro es $O=(3,2)$. Que también pertenece a la altura a_3.



  Los puntos Baricentro, Circuncentro y Ortocentro están siempre alineados. Este resultado fue demostrado por Euler, y la recta se llama **recta de Euler**.

- Bisectrices e incentro: una bisectriz es la recta que divide un ángulo en dos ángulos iguales. También es la recta cuyos puntos equidistan de dos rectas dadas (rectas lado del triángulo). La intersección de las bisectrices es el incentro o centro de la circunferencia inscrita. Ejemplo: hallar las bisectrices e incentro del triángulo de vértices $A=(1,1)$, $B=(4,1)$ y $C=(3,3)$.

$r_{AB} \equiv y = 1$, $r_{AC} \equiv x - y = 0$. Ya calculadas anteriormente.

$$b_1 \equiv d(P, r_{AB}) = d(P, r_{AC}) \Rightarrow \frac{|y-1|}{\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{|x-y|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$$

$\sqrt{2}\,(y-1) = \pm(x-y) \Rightarrow \sqrt{2}y - \sqrt{2} = x - y$. En este caso se elige la bisectriz que tiene pendiente positiva, que es coherente con la gráfica del triángulo:
$-x + 1{,}4142y + y - 1{,}4142 = 0 \Rightarrow b_1 \equiv x - 2{,}4142y + 1{,}4142 = 0$.

$r_{AB} \equiv y = 1$, $r_{BC} \equiv 2x + y - 9 = 0$. Ya calculadas anteriormente.

$$b_2 \equiv d(P, r_{AB}) = d(P, r_{BC}) \Rightarrow \frac{|y-1|}{\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{|2x+y-9|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$\sqrt{5}\,(y-1) = \pm(2x+y-9) \Rightarrow \sqrt{5}y - \sqrt{5} = -2x - y + 9$. En este caso elegimos la bisectriz con pendiente negativa tras observar la gráfica del triángulo:
$2x + 2{,}2361y + y - 2{,}2361 - 9 = 0 \Rightarrow b_2 \equiv 2x + 3{,}2361y - 11{,}2361 = 0$

$r_{AC} \equiv x - y = 0$, $r_{BC} \equiv 2x + y - 9 = 0$. Ya calculadas anteriormente.

$$b_3 \equiv d(P, r_{AC}) = d(P, r_{BC}) \Rightarrow \frac{|x-y|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|2x+y-9|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$\sqrt{5}\,(x-y) = \pm\sqrt{2}\,(2x+y-9) \Rightarrow \sqrt{5}x - \sqrt{5}y = -2\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 9\sqrt{2}$. Elegimos signo $-$ para que la pendiente de la bisectriz sea $+$. Ver la gráfica.
$2{,}2361x - 2{,}2361y + 2{,}8284x + 1{,}4142y - 12{,}7279 = 0 \Rightarrow$
$b_3 \equiv 5{,}0645x - 0{,}8219y - 12{,}7279 = 0$

$$\begin{cases} b_1 \equiv x - 2{,}41y + 1{,}41 = 0 \\ b_2 \equiv 2x + 3{,}24y - 11{,}24 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x - 2{,}4142y = -1{,}4142 \\ 2x + 3{,}2361y = 11{,}2361 \end{array}\right\} 1^{\text{a}} \text{ por } (-2) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} -2x + 4{,}8284y = 2{,}8284 \\ 2x + 3{,}2361y = 11{,}2361 \end{array}\right\} + \Rightarrow 8{,}0645y = 14{,}0645 \Rightarrow y = 1{,}7440.$$
$$\overline{\qquad 8{,}0645y = 14{,}0645 \qquad}$$

Como $y = 1{,}7440$, por ejemplo sustituyendo en la 1ª ecuación tendremos:
$x - 4{,}2104 = -1{,}4142 \Rightarrow x = 2{,}7962$.
Por tanto, el incentro es: $I = (2{,}7962\,;1{,}7440)$.