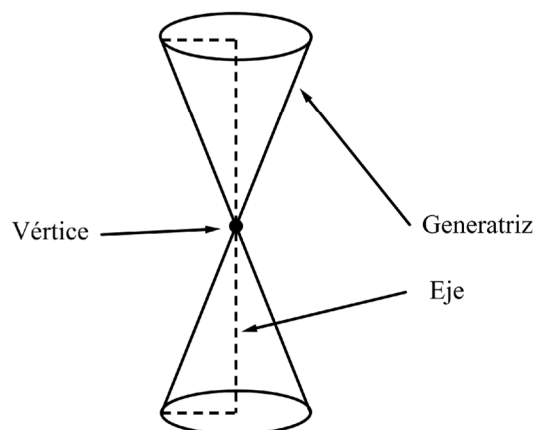


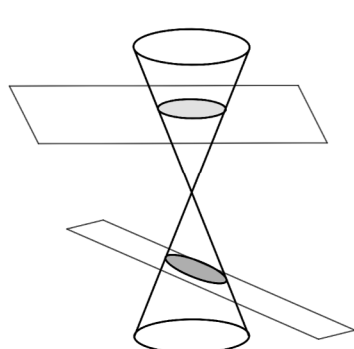
## Tema 8: Cónicas.

### 8.1 Introducción

- Se llama superficie cónica de revolución a la superficie engendrada por una línea recta, llamada generatriz, que gira alrededor de un eje manteniendo un punto fijo o vértice, situado en dicho eje.



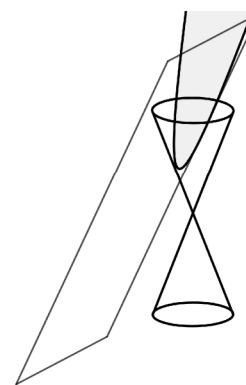
- Se llama cónica a la curva obtenida al cortar la superficie cónica con un plano. Al variar la inclinación de este plano cambiará el tipo de cónica:



Elipse o circunferencia



Hipérbola



Parábola

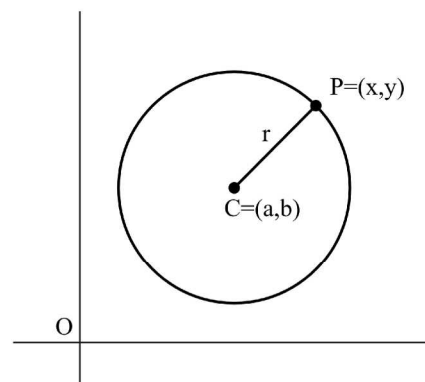
### 8.2 Circunferencia.

- Se llama circunferencia al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro. Es decir, el radio de la circunferencia es la distancia entre cualquier punto de la circunferencia y su centro.

$$r = d(C, P) = |\overrightarrow{CP}| = |(x - a, y - b)| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

Así:  $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$ ; y, elevando ambos miembros al cuadrado, tenemos la ecuación de la circunferencia:

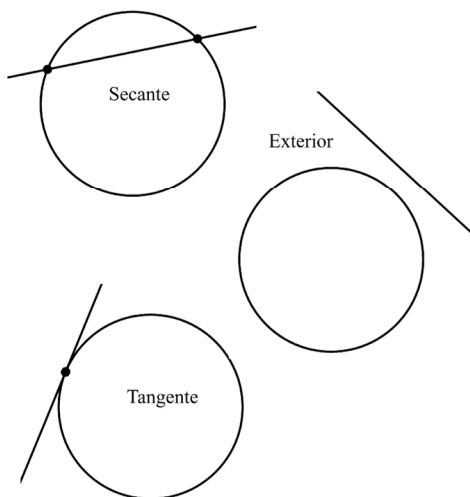
$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2}.$$



Desarrollando tendremos:  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$  o bien:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0. \text{ Siendo: } \begin{cases} D = -2a \\ E = -2b \\ F = a^2 + b^2 - r^2 \end{cases}$$

- Posiciones relativas de una recta respecto de una circunferencia:



**Secante:** tiene dos puntos comunes con la circunferencia.

**Tangente:** tiene un único punto en común con la circunferencia.

**Exterior:** no tiene ningún punto en común con la circunferencia. En todo caso, para obtener la intersección entre recta y circunferencia, hay que resolver el sistema que determinan.

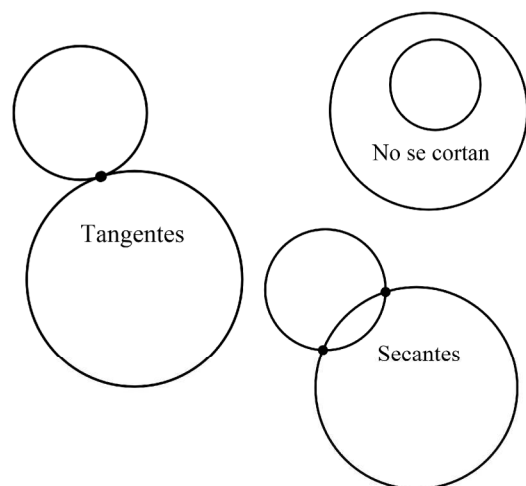
- Posiciones relativas entre dos circunferencias:

**Secantes:** se cortan en dos puntos.

**Tangentes:** tienen un punto común. Pueden serlo con una circunferencia interna o externa.

**No se cortan:** no tienen ningún punto en común. Puede ser una interna o externa.

Para detectar cada caso, basta resolver el sistema de segundo grado que determinan las ecuaciones de ambas circunferencias.

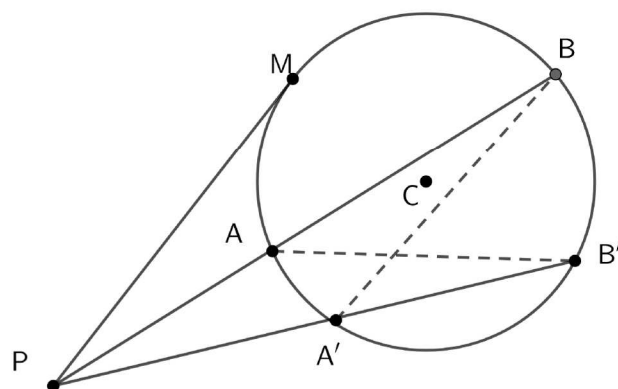


- Potencia de un punto respecto de una circunferencia: es el producto de los segmentos que determina una recta secante que pasa por P.

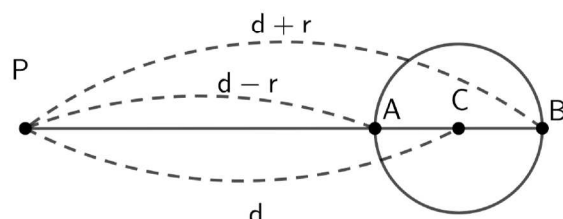
$$\text{Pot}_c(P) = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PA'} \cdot \overline{PB'}$$

Por semejanza de triángulos.

$$\text{Pot}_c(P) = (\overline{PM})^2 = \text{cte, por lo mismo.}$$



Si consideramos ahora una recta que pase por el centro, tendremos:



$$\text{Pot}_c(P) = (d - r) \cdot (d + r) = d^2 - r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2$$

Es decir: La potencia se obtiene sustituyendo las coordenadas del punto P en la ecuación de la circunferencia, pero sin igualar a cero.

El signo de la potencia indica la posición de P respecto de la circunferencia:

- Positivo, si el punto es exterior a la circunferencia.
- Cero, si el punto pertenece a la circunferencia.
- Negativo, si el punto es interior a la circunferencia.

- Eje radical de dos circunferencias:

Es el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen igual potencia respecto de las dos circunferencias. Si las dos circunferencias son secantes, entonces pasa por los puntos de corte, ya que dichos puntos tienen potencia nula respecto de ambas circunferencias.

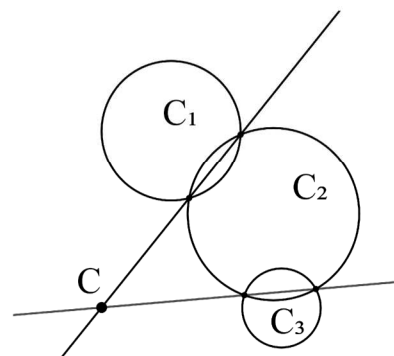
$$\text{Pot}_c(P) = \text{Pot}_{c'}(P) \Rightarrow x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = x^2 + y^2 + D'x + E'y + F'$$

Y simplificando, se obtiene la ecuación del eje radical:

$$\boxed{(D - D')x + (E - E')y + (F - F') = 0}$$

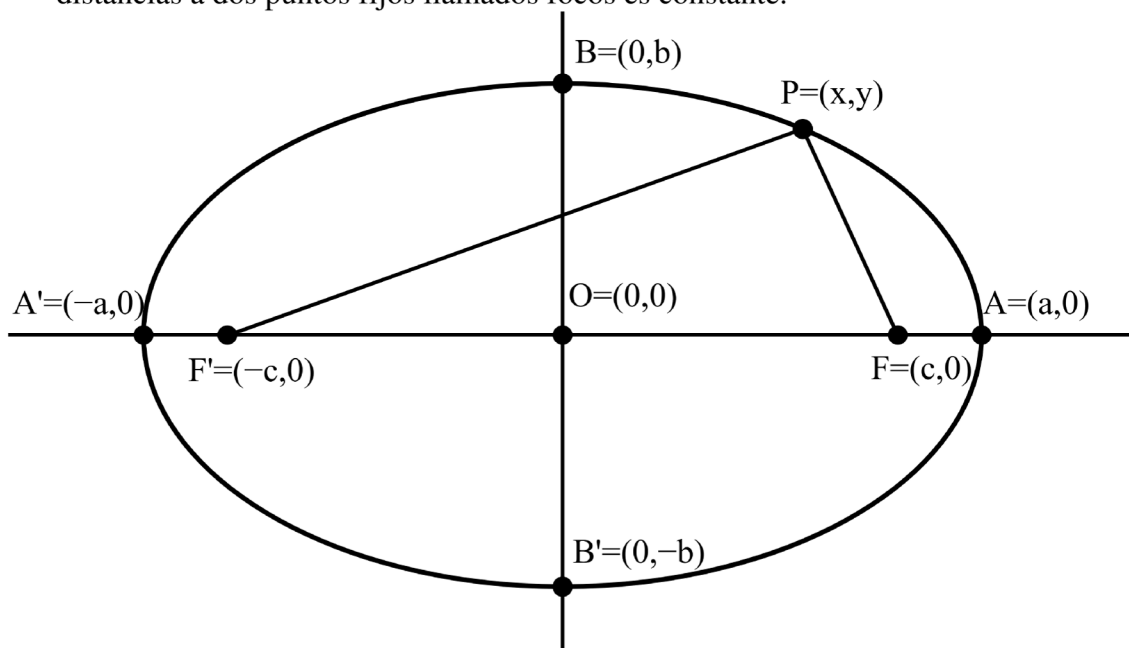
- Centro radical de tres circunferencias:

Es el punto del plano que tiene igual potencia respecto de las tres circunferencias. Cuando existe, se obtiene como intersección de los ejes radicales de cada dos circunferencias.



### 8.3 Elipse.

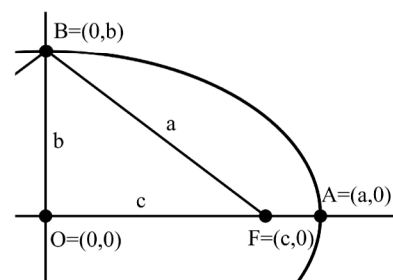
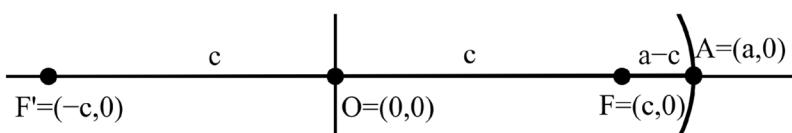
- La elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.



- Los principales elementos de la elipse son los siguientes:
  - Focos o puntos fijos:  $F' = (-c, 0)$  y  $F = (c, 0)$ .
  - Vértices: Son los puntos de intersección de la elipse con los ejes:

- $A' = (-a, 0)$ ,  $A = (a, 0)$ ,  $B' = (0, -b)$  y  $B = (0, b)$ .
- Eje focal o primario: recta que pasa por los focos.
  - Eje secundario: mediatriz del segmento  $\overline{F'F}$ .
  - Centro: punto medio del segmento  $\overline{F'F}$ :  $O = (0, 0)$ .
  - Radio vectores de P: los segmentos  $\overline{PF'}$  y  $\overline{PF}$ .
  - Distancia focal:  $\overline{F'F} = 2c$ . Semidistancia focal:  $\overline{OF} = c$ .
  - Eje mayor:  $\overline{A'A} = 2a$ . Semieje mayor:  $\overline{OA} = a$ .
  - Eje menor:  $\overline{B'B} = 2b$ . Semieje menor:  $\overline{OB} = b$ .
  - Excentricidad:  $e = \frac{c}{a}$ , este número mide el achatamiento de la elipse, como  $c < a$ , será  $e \leq 1$ . Cuanto mayor sea  $e$ , más alargada es la elipse.

Importante: la constante de la que se habla en la definición vale  $2a$ , ya que al considerar que el punto A pertenece a la elipse, tenemos:  $\text{cte} = \overline{AF} + \overline{AF'} \Rightarrow \Rightarrow \text{cte} = (a - c) + (a - c + 2c) \Rightarrow \boxed{\text{cte} = 2a}$ . Además, considerando que el punto B también pertenece a la elipse, se obtiene la relación:  $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$ .



- Desarrollo de la ecuación de la elipse: Sea  $P = (x, y)$  un punto de la elipse. Por la definición se cumple:

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a;$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2};$$

$$\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2;$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2};$$

$$-4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Rightarrow a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = (a^2 + cx)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow \frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

En resumen, la ecuación reducida de la elipse es:  $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ .

Si el centro de la elipse es el punto  $C = (x_0, y_0)$ , la ecuación de la elipse será:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1}.$$

Que desarrollando los cuadrados y eliminando denominadores queda:

$$b^2x^2 - 2b^2x_0x + b^2x_0^2 + a^2y^2 - 2a^2y_0y + a^2y_0^2 = a^2b^2;$$

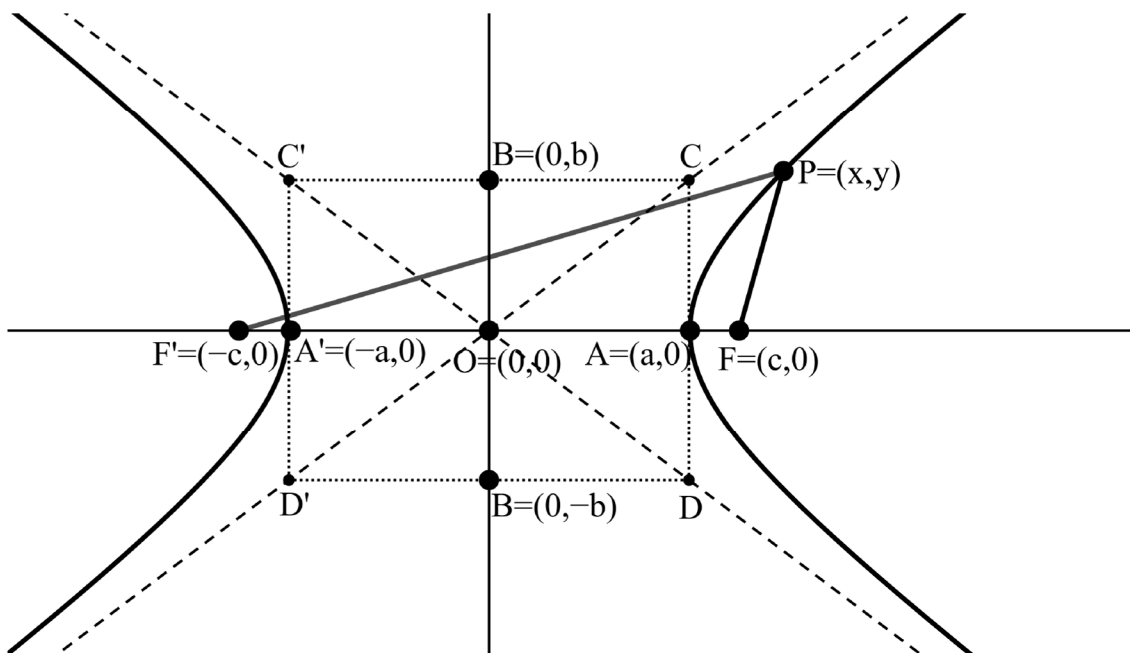
$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2x_0x - 2a^2y_0y + b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0$$

$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0$ . Esta ecuación es parecida a la ecuación de la circunferencia, pero ahora los coeficientes A y B no tienen porqué coincidir. Si los focos se encuentran sobre el eje de ordenadas, la elipse tiene eje mayor vertical y sus ecuaciones reducida y general son:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1, \text{ siendo siempre: } a > b.$$

## 8.4 Hipérbola

- La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano para los que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.



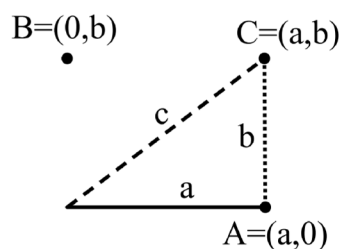
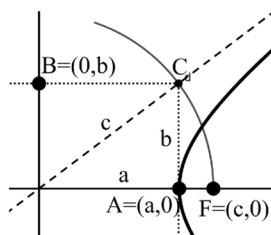
- Los principales elementos de la hipérbola son los siguientes:
  - Focos o puntos fijos:  $F' = (-c,0)$  y  $F = (c,0)$ .
  - Vértices:  $A' = (-a,0)$ ,  $A = (a,0)$ ,  $B' = (0,-b)$  y  $B = (0,b)$ . Los vértices B y B', se llaman vértices imaginarios y no están en la hipérbola.
  - Eje focal o eje real: recta que pasa por los focos.
  - Eje secundario o imaginario: mediatriz del segmento  $\overline{F'F}$ .
  - Centro: punto medio del segmento  $\overline{F'F}$ :  $O = (0,0)$ .
  - Radio vectores de P: los segmentos  $\overline{PF'}$  y  $\overline{PF}$ .
  - Distancia focal:  $\overline{F'F} = 2c$ . Semidistancia focal:  $\overline{OF} = c$ .
  - Eje real:  $\overline{A'A} = 2a$ . Semieje real:  $\overline{OA} = a$ .
  - Eje imaginario:  $\overline{B'B} = 2b$ . Semieje imaginario:  $\overline{OB} = b$ .

- Excentricidad:  $e = \frac{c}{a}$ , como  $c > a$ , siempre será  $e \geq 1$ .
- Rectángulo fundamental: Rectángulo de vértices C, C', D y D'.
- Asíntotas de la hipérbola. Tienen por ecuación:  $y = \pm \frac{b}{a}x$ . Las asíntotas son diagonales del rectángulo fundamental.

Importante: la constante de la que se habla en la definición vale  $2a$ , ya que al considerar que el punto A como perteneciente a la hipérbola, tenemos:

$$cte = |\overline{AF'} - \overline{AF}| \Rightarrow cte = |(2a + c - a) - (c - a)| \Rightarrow \boxed{cte = 2a}$$
. Además, el

número b es, por definición, el número que cumple la igualdad:  $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$ .



- Desarrollo de la ecuación de la hipérbola:

Sea  $P = (x, y)$  un punto de la hipérbola. Por la definición se cumple:

$$|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 2a \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a;$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2};$$

$$\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2;$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2};$$

$$-4cx = 4a^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}; \quad -a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

$$\left(-a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = (a^2 + cx)^2;$$

$$a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2;$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2 \Rightarrow -\frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = -\frac{a^2b^2}{a^2b^2} \Rightarrow$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

En resumen, la ecuación reducida de la hipérbola es:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Si el centro de la hipérbola es el punto:  $C = (x_0, y_0)$ , su ecuación será:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1}$$

Que desarrollando los cuadrados y eliminando denominadores queda:

$$b^2x^2 - 2b^2x_0x + b^2x_0^2 - a^2y^2 + 2a^2y_0y - a^2y_0^2 = a^2b^2;$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2x_0x + 2a^2y_0y + b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0;$$

$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0$ . Observamos ahora que los primeros

coeficientes:  $A = b^2$  y  $B = -a^2$  siempre van a tener signos opuestos.

Si los focos se encuentran sobre el eje de ordenadas, las ecuaciones reducida y general serán:

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$  y  $\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$ , siendo siempre 'a' el semieje real.

Un caso particular de hipérbola sucede al considerar como focos los puntos  $F' = (-a, a)$  y  $F = (a, a)$ , entonces se obtiene la hipérbola equilátera, cuya

ecuación reducida es:  $xy = \frac{a^2}{2}$ .

Por ejemplo, si los focos son los puntos:  $F' = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  y  $F = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ,

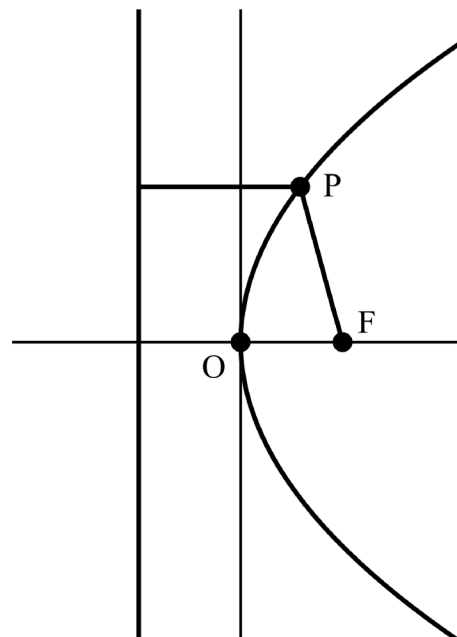
entonces la ecuación resultante es la hipérbola equilátera de ecuación:  $y = \frac{1}{x}$ .

## 8.5 Parábola.

- La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo, llamado foco, y de una recta fija, llamada directriz.

- Los principales elementos de la parábola son:

- Parámetro: distancia del foco a la directriz, se designa por la letra p. Es decir:  $p = d(P, d)$ .
- Foco o punto fijo:  $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$ .
- Directriz o recta fija:  $d \equiv x = -\frac{p}{2}$ .
- Eje: recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco. Eje:  $y = 0$ .
- Vértice o punto de intersección de la parábola con su eje. En la gráfica:  $V = O = (0, 0)$ .
- Radio vector de P: el segmento  $\overline{PF}$ .



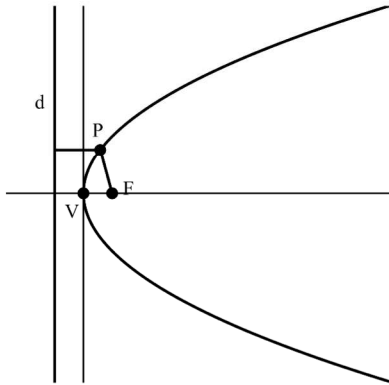
- Desarrollo de la ecuación de la parábola:

Sea  $P = (x, y)$  un punto de la parábola. Por la definición:  $d(P, d) = d(P, F)$ .

$$\frac{\left|x + \frac{p}{2}\right|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}. \text{ Elevamos al cuadrado: } \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2$$

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2, \text{ que simplificando queda: } 2px = y^2.$$

En resumen, la ecuación de la parábola es:  $y^2 = 2px$ .



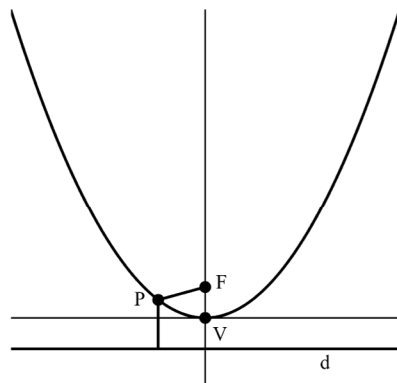
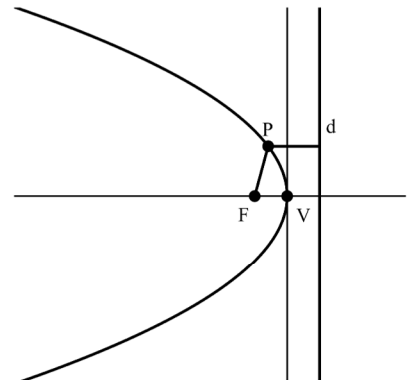
- En general, si el vértice es el punto:  $V = (x_0, y_0)$  y la parábola está a la derecha de la directriz (se abre hacia la derecha), su ecuación es:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

Además de la posición estudiada, también pueden darse las siguientes posiciones:

- Parábola a la izquierda de la directriz (se abre hacia la izquierda). Su ecuación es:

$$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$$



- Parábola por encima de la directriz (se abre hacia arriba). Su ecuación es:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

- Parábola por debajo de la directriz (se abre hacia abajo). Su ecuación es:

$$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$$

