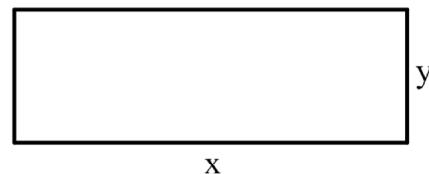


Tema 9: Funciones.

9.1 Concepto de función. Representación gráfica.

- Una función es una relación entre dos variables. Para cada valor de la variable independiente 'x', el valor de la otra variable 'y' está perfectamente determinado y es único. Ejemplo: un rectángulo tiene perímetro 10, es decir, $2x + 2y = 10$. Así que podemos escribir algebraicamente la relación entre las variables $x + y = 5$, o bien, $y = 5 - x$.



x	y
0	5
1	4
2	3
3	2
4	1
5	0

Esta es la tabla de valores, o parejas de números, que están relacionados por la función. El valor de la variable independiente 'x' puede ser cualquiera, pero el valor de la variable dependiente 'y' está siempre determinado por la relación o dependencia funcional entre las dos variables.

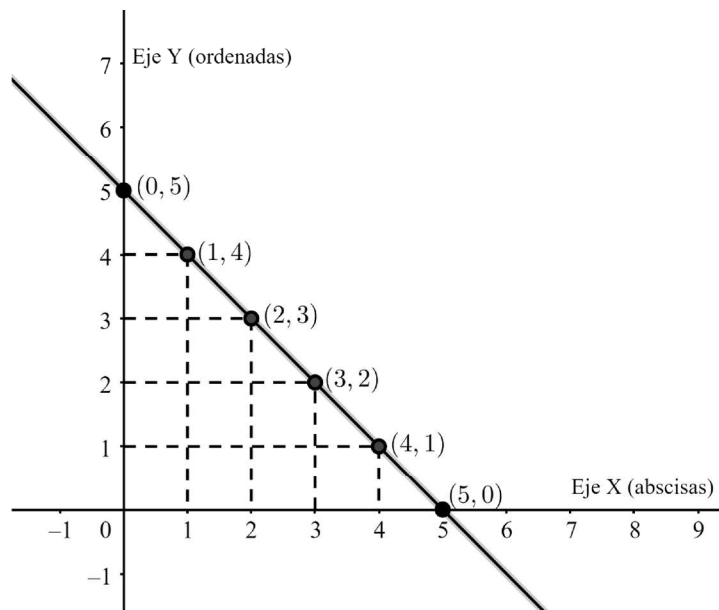
- Desde un punto de vista más formal, una función 'f' entre dos conjuntos de números es una aplicación (cada elemento tiene una única imagen), que asigna a cada elemento 'x' del primer conjunto un único elemento 'y' del segundo conjunto. Decimos que 'y' es la imagen de 'x' por la función 'f', y lo escribimos de la siguiente forma:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow y = f(x) = 5 - x$$

El primer renglón significa que 'f' es una función real de variable real, y el segundo renglón significa que a cada número real 'x' se le asigna una única imagen $f(x) = 5 - x$.

- En el plano consideramos el origen de coordenadas $O=(0,0)$ y los dos ejes graduados: el eje X, o eje de abscisas, que mide el desplazamiento horizontal, y el eje Y, o eje de ordenadas, que mide el desplazamiento vertical. La gráfica de una función es el conjunto de puntos del plano de la forma $(x, f(x))$. Es decir, la primera coordenada puede ser cualquier número, pero la segunda coordenada está determinada de manera única por la función y debe ser siempre la imagen de la primera coordenada.



Ejemplo: la empresa A empezó con un capital de 30000€ y cada año pierde 5000€. Por otra parte, la empresa B comenzó con 10000€ y cada año gana 5000€.

- Indica la relación entre el capital y el número de años transcurridos para cada empresa.
- Expresa las funciones asociadas a cada relación anterior.
- Representa gráficamente las dos funciones.
- ¿Cuándo tienen el mismo capital ambas empresas?

Sea 'x' el número de años e 'y' el capital \Rightarrow $\begin{cases} \text{Empresa A : } y = 30000 - 5000x \\ \text{Empresa B : } y = 10000 + 5000x \end{cases}$

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

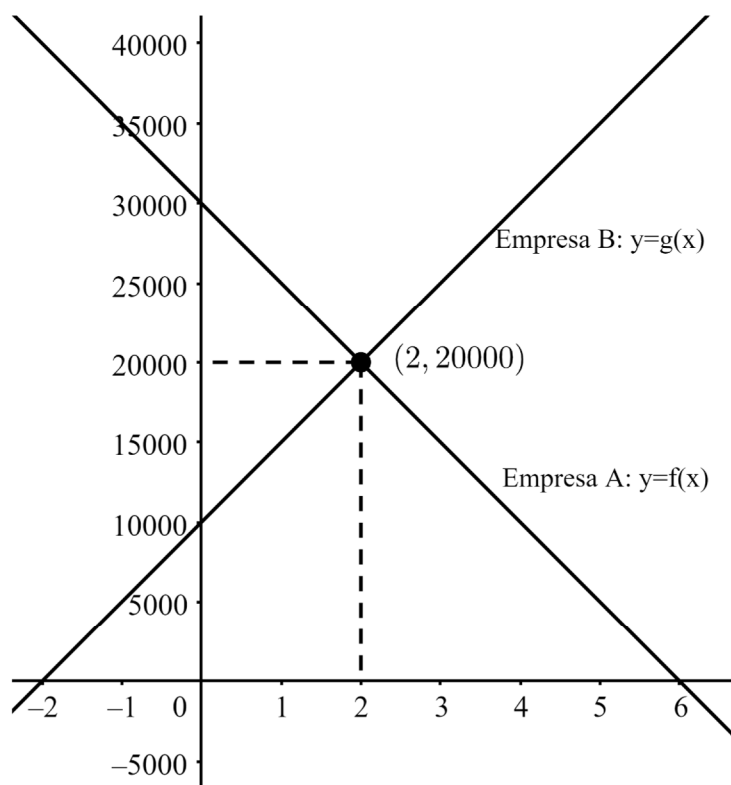
$$x \longrightarrow y = f(x) = 30000 - 5000x$$

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow y = g(x) = 10000 + 5000x$$

x	f(x)	x	g(x)
0	30000	0	10000
1	25000	1	15000
2	20000	2	20000
3	15000	3	25000
4	10000	4	30000
5	5000	5	35000
6	0	6	40000

Para representar gráficamente estas funciones es conveniente elegir una escala adecuada. En este caso, una escala de 5000 € resulta apropiada. Las empresas tienen el mismo capital al cabo de 2 años (20000€). Este resultado puede obtenerse resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que determinan las dos funciones.



9.2 Características generales de las funciones.

- El dominio de definición de una función es el conjunto números reales que tienen imagen. Es importante conocer el dominio de una función porque sólo en él puede representarse gráficamente. La determinación del dominio varía según el tipo de función:

- Función polinómica: no hay ninguna dificultad para obtener cualquier imagen, por lo que el dominio es todo el conjunto de los números reales: $D = \mathbb{R}$.
- Función racional: sólo hay problemas cuando el denominador es 0, esos números no estarán en el dominio. Por tanto, resolvemos la ecuación “Denominador = 0” y las soluciones se restan o quitan al conjunto de números reales \mathbb{R} . Ejemplo: hallar el dominio de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{x-2}{x-1} \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1} \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x = \pm 1 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

- Función irracional: tendrán imagen aquellos números en los que el radicando sea mayor o igual que cero. Es decir, el dominio es el conjunto solución de la inecuación “Radicando ≥ 0 ”. Ejemplo: hallar el dominio de: $f(x) = \sqrt{x-3} \Rightarrow x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \quad D = [3, +\infty)$.

- Cortes con los ejes:

- Cortes con el eje de abscisas OX. Los puntos situados en este eje tienen su segunda coordenada igual a 0, y la primera se obtiene resolviendo la ecuación $f(x) = 0$. Si las soluciones de esta ecuación son los números x_1, x_2, x_3, \dots , entones los puntos de corte con el eje OX son:

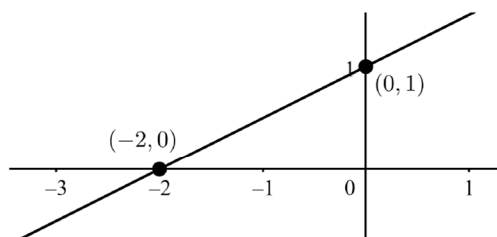
$$\boxed{(x_1, 0), (x_2, 0), (x_3, 0), \dots}.$$

- Corte con el eje de ordenadas OY. En este eje, la primera coordenada es 0, y la 2ª coordenada, como siempre en toda función, será su imagen $f(0)$. Por tanto, el punto de corte con el eje OY es siempre: $\boxed{(0, f(0))}$.

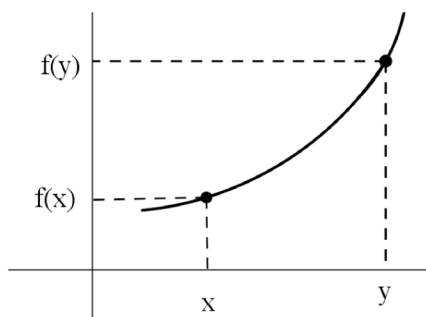
Ejemplo: $f(x) = \frac{x+2}{2}$. Resolvemos la ecuación $f(x) = 0$:

$$\frac{x+2}{2} = 0 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x = -2. \text{ Luego el punto de corte con OX es } (-2, 0).$$

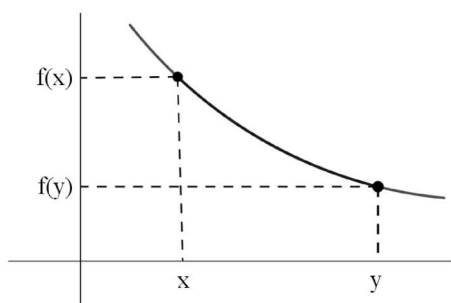
Ahora calculamos $f(0) = \frac{0+2}{2} = 1$ y el punto de corte con OY es $(0, 1)$.



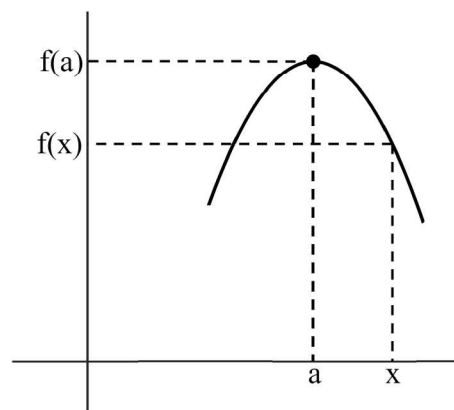
- Una función es creciente en un punto 'a' si existe un entorno $(a - r, a + r)$ de forma que para cualquier par de números 'x', 'y' (siendo $x < y$), las imágenes son $f(x) < f(y)$. Es decir, los puntos que están situados más a la derecha tienen imágenes mayores.



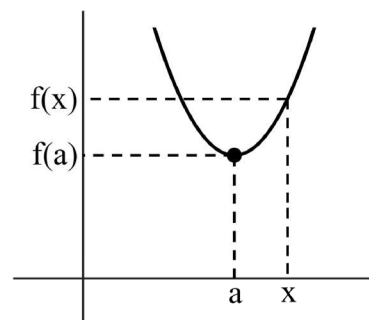
- Análogamente, una función es decreciente en un punto 'a' si existe un entorno $(a - r, a + r)$ de forma que para cualquier par de números de ese entorno 'x', 'y' (siendo $x < y$), las imágenes son $f(x) > f(y)$. Es decir, los puntos que están situados más a la derecha tienen imágenes menores:



- Una función presenta un máximo relativo en el punto 'a' si existe un entorno $(a - r, a + r)$ en el que todas las imágenes son menores que la imagen de 'a'. Es decir, cualquier número 'x' del entorno tendrá una imagen: $f(x) < f(a)$.

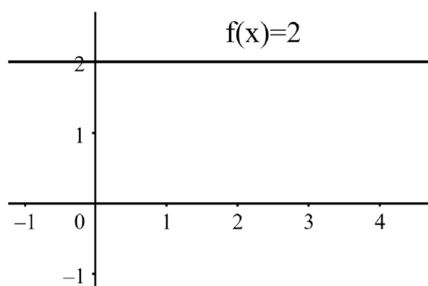


- Análogamente, una función presenta un mínimo relativo en el punto 'a' si existe un entorno $(a - r, a + r)$ en el que todas las imágenes son mayores que la imagen de 'a'. Es decir, cualquier número 'x' del entorno tendrá una imagen: $f(x) > f(a)$.

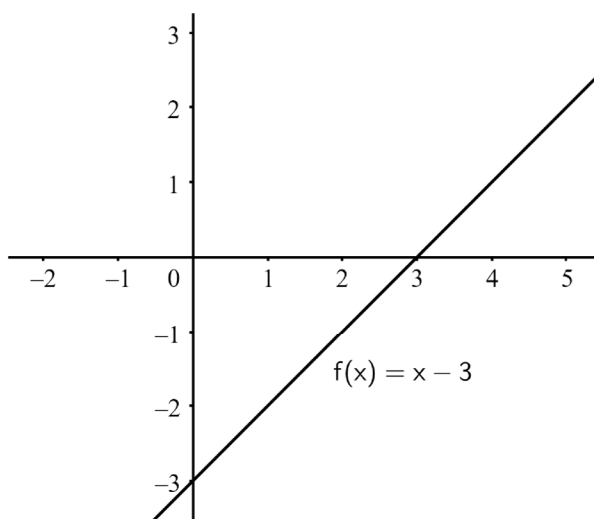


9.3 Funciones polinómicas.

- La función polinómica más simple es la función constante, que tiene la forma: $f(x) = k$. En este caso, la función siempre toma el mismo valor k , y por ello, su representación gráfica es una recta horizontal. Ejemplo: $f(x) = 2$.



- Las funciones polinómicas de grado 1 son de la forma $f(x) = mx + n$, y su representación gráfica es una recta cuya pendiente es m . Ejemplo: $f(x) = x - 3$ es una recta de pendiente 1 (inclinación de 45°).



- Las funciones polinómicas de grado 2: $f(x) = ax^2 + bx + c$ tienen como representación gráfica una parábola, que alcanza un máximo cuando el coeficiente 'a' es negativo y un mínimo si 'a' es positivo.

$a < 0 \Rightarrow \text{Máx}$
$a > 0 \Rightarrow \text{mín}$

.

Ejemplo: $f(x) = x^2 - 4x + 3$. El procedimiento de representación gráfica es el siguiente:

- El vértice será un mínimo, porque el coeficiente 'a' es positivo ($a=1$).
- Hallar los puntos de corte con los ejes.

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Por tanto, los puntos de corte con OX son: $(1,0)$ y $(3,0)$.

Ahora calculamos la imagen del 0: $f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3$. Por lo tanto, el punto de corte con OY es $(0,3)$.

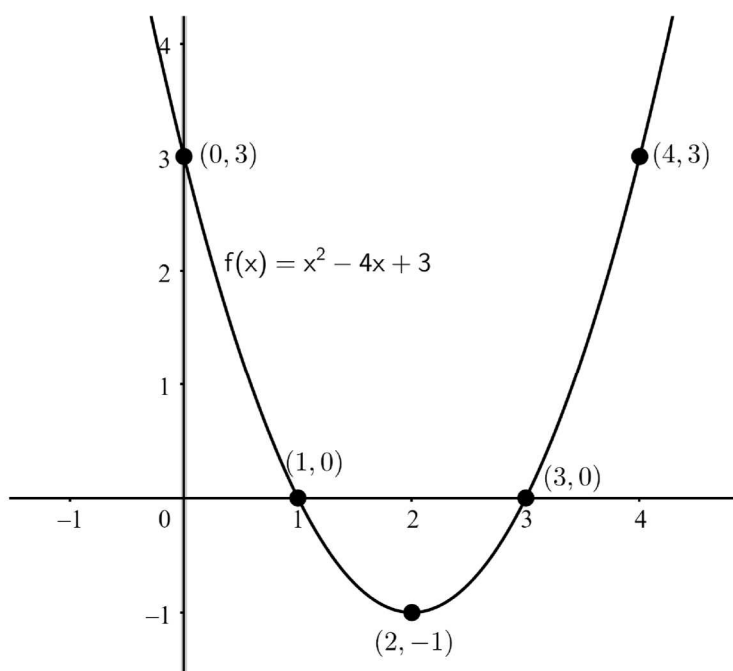
- A continuación calculamos el punto más importante el vértice, por el que pasa el eje vertical de simetría. La primera coordenada del vértice se encuentra en el punto medio de las raíces, que han dado lugar a los cortes con el eje OX. Y la segunda coordenada es la imagen de la primera. En el caso en que no haya cortes con el eje OX, la primera coordenada del

vértice es $-\frac{b}{2a}$. En nuestro ejemplo, la primera coordenada del vértice es

$$\frac{1+3}{2} = 2 \quad (\text{o bien: } -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2).$$

Y la segunda coordenada es $f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$. Luego el vértice es $V = (2, -1)$.

- Finalmente, colocamos el vértice en el centro de la tabla de valores y damos valores simétricos respecto al vértice



x	f(x)
-1	8
0	3
1	0
2	-1
3	0
4	3
5	8

9.4 Funciones definidas a trozos.

- Como su nombre indica, estas funciones presentan una definición diferente según el intervalo considerado. Al representar gráficamente estas funciones, hay que indicar claramente qué ocurre en los puntos críticos donde cambia la definición. Para ello, hay que representar con un punto ● (más grueso o relleno) donde sí está la imagen, y con un punto ○ (vacío o hueco) donde no está la imagen. También es muy importante que no haya doble trazo (dos imágenes) en ningún punto, porque entonces no sería una función.

Ejemplo: representar gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

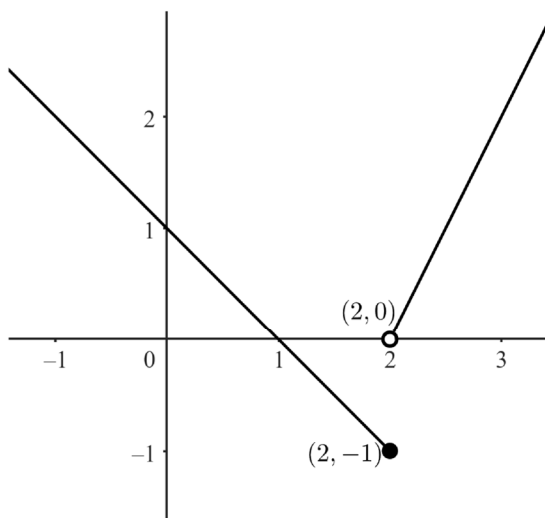
Hay dos intervalos, y en cada uno de ellos la función es diferente:

En $(-\infty, 2] \rightarrow f(x) = -x + 1$

En $(2, +\infty) \rightarrow f(x) = 2x - 4$

x	f(x)
0	1
1	0
2	-1

x	f(x)
(2, 0)	○
3	2
4	4



Ejemplo: representar gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 3x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Hay dos intervalos, y en cada uno de ellos una definición diferente:

En $(-\infty, 1) \rightarrow f(x) = 2x - 1$

En $[1, +\infty) \rightarrow f(x) = -x^2 + 3x$

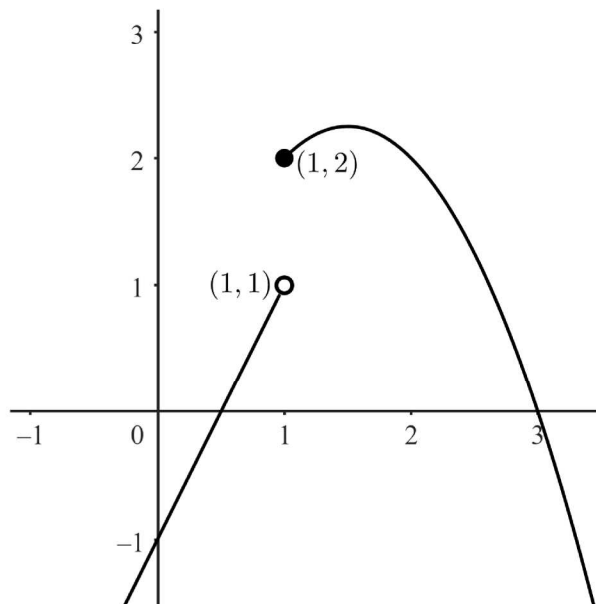
x	f(x)
-1	-3
0	-1
(1, 1)	○

x	f(x)
1	2
2	2
3	0

El estudio de forma resumida de la parábola es el siguiente:

El vértice $V = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ es un máximo, y los

cortes son $(0,0)$ y $(3,0)$. Sin embargo, el primer corte está fuera del rango de definición de la parábola.



Ejemplo: representar gráficamente la función $f(x) = |x + 1|$

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1) & \text{si } x+1 < 0 \\ x+1 & \text{si } x+1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{si } x < -1 \\ x+1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

En general, todas las funciones que se definen a partir del valor absoluto, pueden expresarse también como una función definida a trozos. Además, en la representación gráfica, el punto crítico es común a ambos intervalos, por lo que el punto relleno y el hueco coinciden.

Hay dos intervalos, y en cada uno de ellos, una definición diferente:

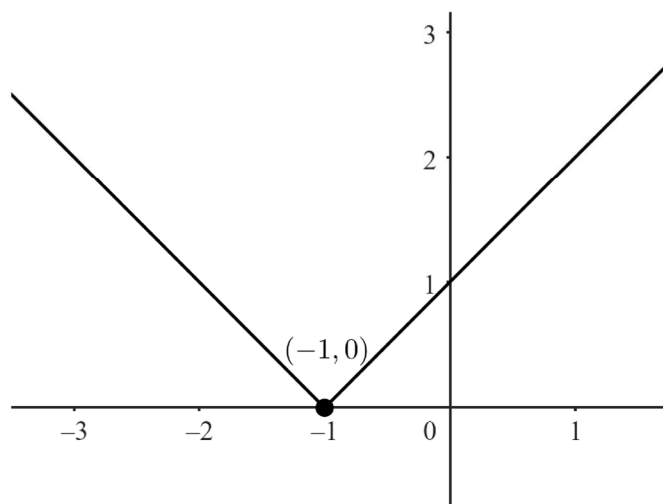
$$\text{En } (-\infty, -1) \rightarrow f(x) = -x - 1 \quad \text{En } [-1, +\infty) \rightarrow f(x) = x + 1$$

x	f(x)
-3	2
-2	1
-1	0

○

x	f(x)
-1	0
0	1
1	2

●



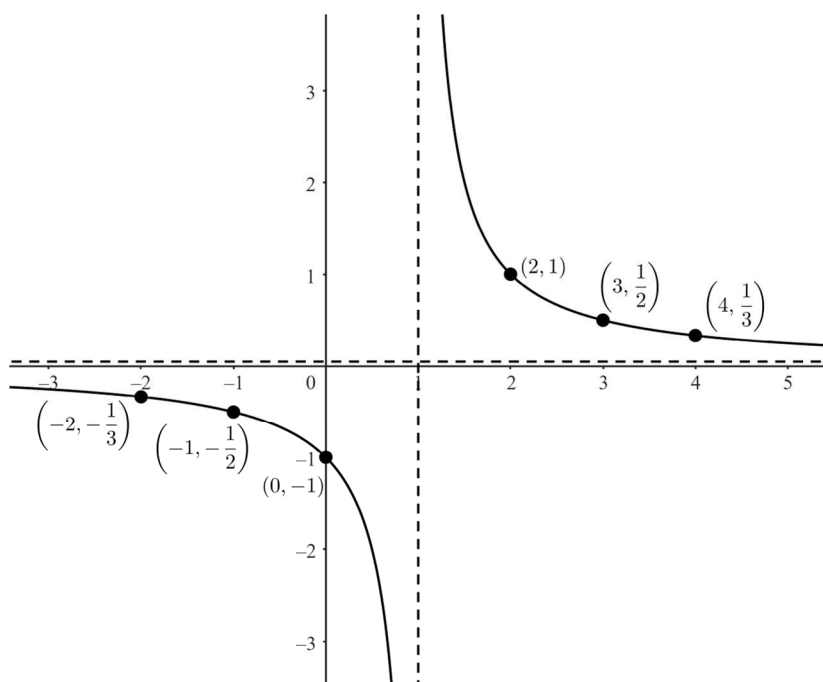
9.5 Funciones racionales.

- Son funciones en las que la variable 'x' se encuentra en el denominador. Su expresión general es $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, siendo P(x) y Q(x) dos polinomios.

Ejemplo: $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Para estudiar una función racional seguiremos el siguiente proceso:

- Primero identificamos los valores que anulan el denominador, ya que no pertenecen al dominio de definición: $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$, luego $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- En el punto que no pertenece al dominio tendremos la asíntota vertical $x = 1$, que determinará la forma de la función.
- Es conveniente dar valores próximos a la asíntota, porque ahí las imágenes "se disparan" hacia $-\infty$ ó $+\infty$.
- Después damos valores simétricos respecto a la asíntota vertical.
- Estas funciones también tienen asíntotas horizontales que se estudiarán más adelante.

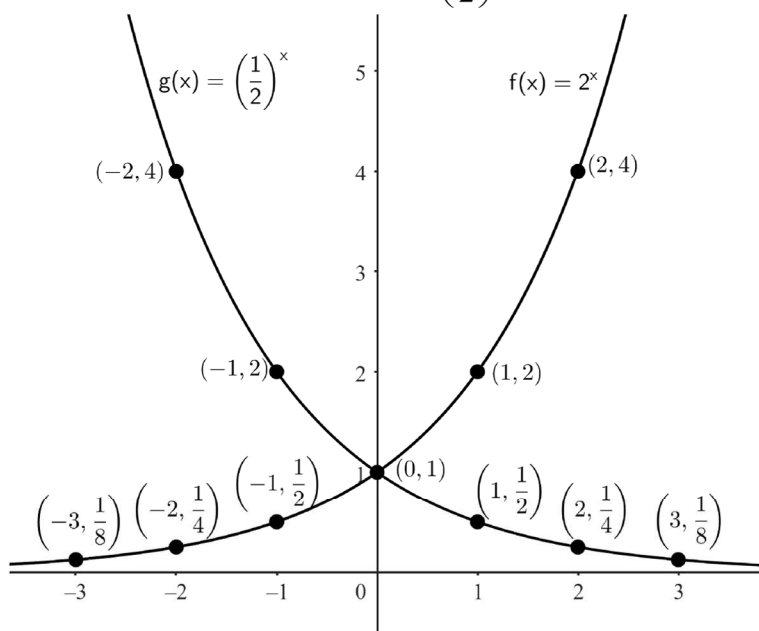


x	f(x)
-2	$-\frac{1}{3}$
-1	$-\frac{1}{2}$
0	-1
0.9	-10
0.99	-100
1.01	100
1.1	10
2	1/2
3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{4}$

9.6 Funciones exponenciales.

- Su definición es $f(x) = a^x$ (siendo $a > 0$). Tienen las siguientes características:
 - $D = \mathbb{R}$.
 - Las imágenes son siempre positivas.
 - Siempre pasan por el punto $(0,1)$.
 - Son funciones crecientes si la base es mayor que 1 y decrecientes si la base está comprendida entre 0 y 1.

Ejemplos: $f(x) = 2^x$ y $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



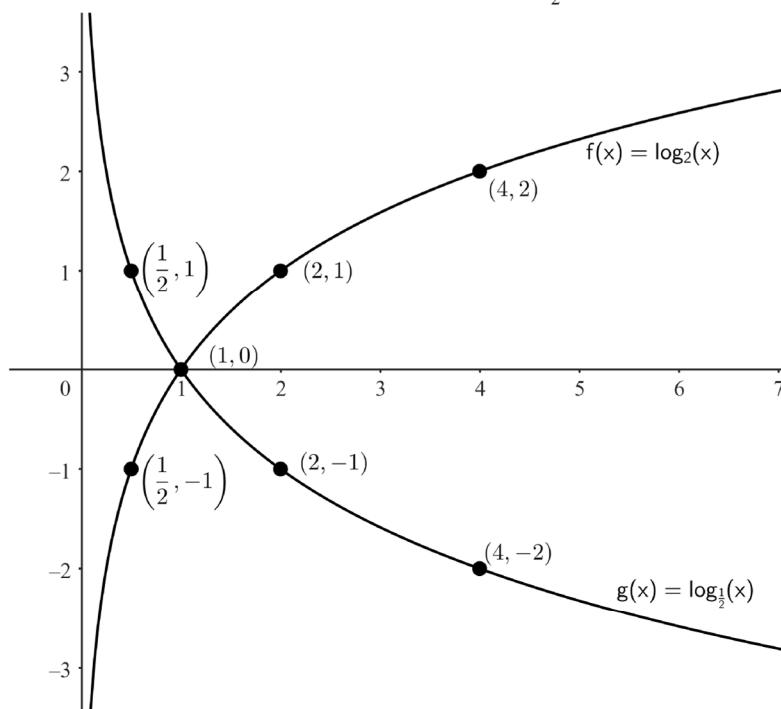
x	2^x
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4

x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$

9.7 Funciones logarítmicas.

- Su definición es $f(x) = \log_a(x)$ (siendo $a > 0$). Tienen las siguientes características:
 - $D = (0, +\infty)$.
 - Presentan una asíntota vertical en la recta $x = 0$.
 - Siempre pasan por el punto $(1, 0)$.
 - Son funciones crecientes si la base del logaritmo es mayor que 1, y decrecientes si la base del logaritmo está entre 0 y 1.

Ejemplos: $f(x) = \log_2(x)$ y $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$:



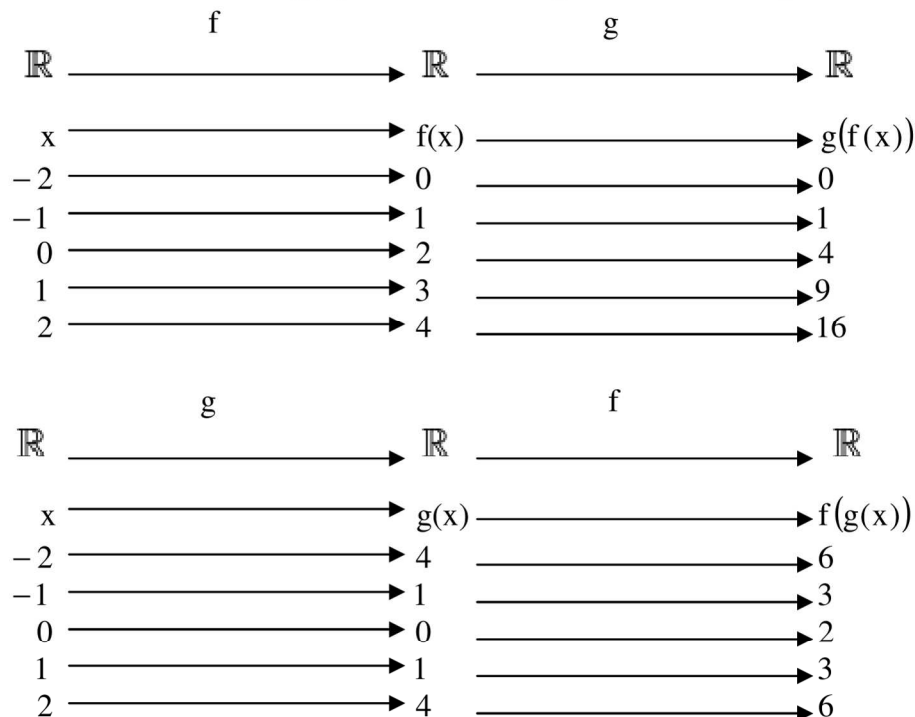
x	$\log_2 x$
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2

x	$\log_{\frac{1}{2}} x$
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	-1
4	-2

9.8 Operaciones con funciones. Composición.

- A partir de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ podemos definir nuevas funciones mediante las siguientes operaciones:
 - Suma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
 - Diferencia: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
 - Producto: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
 - Cociente: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
 - Exponenciación: $(f^g)(x) = (f(x))^{g(x)}$
- Sin embargo, la operación más importante es la composición, que consiste en aplicar una función y, sobre el resultado obtenido, aplicar a su vez la otra función.

Ejemplo: consideremos la función “sumar 2”: $f(x) = x + 2$, y la función “elevar al cuadrado”: $g(x) = x^2$. Veamos qué ocurre al componerlas:



Como podemos ver en este ejemplo la composición de funciones no es conmutativa.

- La función “g compuesta con f” consiste en aplicar primero la función $f(x)$ y, sobre el resultado, aplicar $g(x)$. Es decir: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

En el ejemplo anterior:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 2) = (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4.$$

- La función “f compuesta con g” consiste en aplicar primero la función $g(x)$ y, sobre el resultado, aplicar $f(x)$. Es decir: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

En el ejemplo anterior: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 2$.

x	$g(f(x))$	x	$f(g(x))$
-2	0	-2	6
-1	1	-1	3
0	4	0	2
1	9	1	3
2	16	2	6

Otro ejemplo: dadas las funciones $f(x) = \frac{x+1}{2}$ y $g(x) = 3x + 2$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{x+1}{2}\right) + 2 = \frac{3x+3}{2} + \frac{4}{2} = \frac{3x+7}{2}.$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x+2) = \frac{(3x+2)+1}{2} = \frac{3x+3}{2}.$$

9.9 Función inversa.

- La correspondencia inversa, que no siempre es una función, consiste en intercambiar los originales con sus imágenes. Es decir, darle la vuelta a la tabla de valores. Ejemplo: consideremos la función “sumar 2”: $f(x) = x + 2$.

x	f(x)
-2	0
-1	1
0	2
1	3
2	4

x	f ⁻¹ (x)
0	-2
1	-1
2	0
3	1
4	2

En este ejemplo, la función inversa de “sumar 2” $f(x) = x + 2$, es lógicamente lo contrario, “restar 2”. Por tanto, $f^{-1}(x) = x - 2$.

El procedimiento para obtener la función inversa es el siguiente.

- Escribimos “y” en lugar de f(x) para operar cómodamente.
 $y = x + 2$
- Intercambiamos los originales y sus imágenes. Es decir, intercambiamos la variable “x” por la variable “y”:
 $x = y + 2$
- Despejamos “y” para obtener la nueva función.
 $x - 2 = y \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 2$
- Comprobamos componiendo las dos funciones. Debe obtenerse la función identidad: $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x$.
 $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x + 2) = (x + 2) - 2 = x$.

Ejemplo: $f(x) = 2x - 5$. Podemos prever que lo contrario de multiplicar por 2 y restar luego 5: Al revés sería primero sumar 5 y luego dividir por 2.

- $y = 2x - 5$
- $x = 2y - 5$
- $x + 5 = 2y \Rightarrow \frac{x + 5}{2} = y \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + 5}{2}$
- $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x - 5) = \frac{(2x - 5) + 5}{2} = \frac{2x}{2} = x$.

Otro ejemplo: $f(x) = \frac{2x + 1}{x}$.

- $y = \frac{2x + 1}{x}$
- $x = \frac{2y + 1}{y}$
- $xy = 2y + 1 \Rightarrow xy - 2y = 1 \Rightarrow y(x - 2) = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x - 2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{x - 2}$
- $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{2x + 1}{x}\right) = \frac{1}{\left(\frac{2x + 1}{x}\right) - 2} = \frac{1}{\frac{2x + 1 - 2x}{x}} = x$.