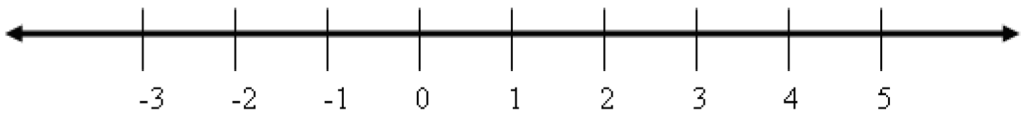
Tema 1: El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

1.1 Repaso de números: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$. Operaciones.

- El conjunto de los números naturales es $\mathbb{N}$= {1, 2, 3, ········ . Es un conjunto infinito y se representa, una vez elegido el origen y la medida unidad, en una semirrecta

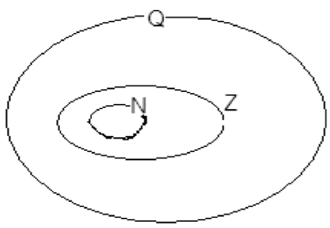
En este conjunto tan sólo es posible contar, sumar y multiplicar. No siempre se puede restar (3-6=?), ni dividir si la división no es exacta (5:2=?). Además surgen de forma natural, otros números negativos: al considerar otra dirección, el hecho de deber dinero, temperaturas negativas, etc.

- El conjunto de los números enteros es $\mathbb{Z}$={..,–5, –4,–3,–2,–1,0,1,2,3,4,5,… }



Este conjunto engloba al anterior y aquí se solucionan algunos problemas, pero seguimos sin poder dividir siempre, y nos encontramos de forma natural con la existencia de otros números: al considerar partes de la unidad, proporciones, medidas, etc.: $\frac{3}{4}$? 1'53?

- El conjunto de los números racionales o fracciones es $\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q} : p, q \in Z\right\}$. Es decir, las fracciones. Las fracciones son cocientes indicados donde el numerador y el denominador son números enteros (denominador$\neq 0$). Este conjunto engloba a los dos anteriores, bastaría poner denominador 1. Ahora en este nuevo conjunto, es siempre posible sumar, restar, multiplicar y dividir, siendo el resultado siempre una fracción.



- Tanto en las operaciones con números naturales, enteros o racionales, hay que respetar la jerarquía de las operaciones siguiendo este orden: paréntesis interiores, paréntesis exteriores, potencias o raíces, productos y cocientes y por último sumas y restas. Ejemplo:

$$2-[2-5\cdot(8-3\cdot 4-3)]+4-3\cdot(5-2)=2-[2-5\cdot(8-12-3)]+4-3\cdot(5-2)=$$
$$2-[2-5\cdot(-7)]+4-3\cdot 3=2-[2+35]+4-9=2-2-35+4-9=-40$$

$$\left[\frac{3}{2}\left(3-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{2}{3}\left(2-\frac{3}{2}\right)^2\right]^2=\left[\frac{3}{2}\left(\frac{7}{3}\right)^2-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^2=\left[\frac{3}{2}\frac{49}{9}-\frac{2}{3}\frac{1}{4}\right]^2=$$

$$\left[\frac{147}{18}-\frac{2}{12}\right]^2=\left[\frac{49}{6}-\frac{1}{6}\right]^2=\left(\frac{48}{6}\right)^2=64$$

- Recordemos que para operar con fracciones se utilizan las siguientes fórmulas:
  - Suma y resta: $\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d\pm b\cdot c}{bd}$
  - Multiplicación: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$ - División: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

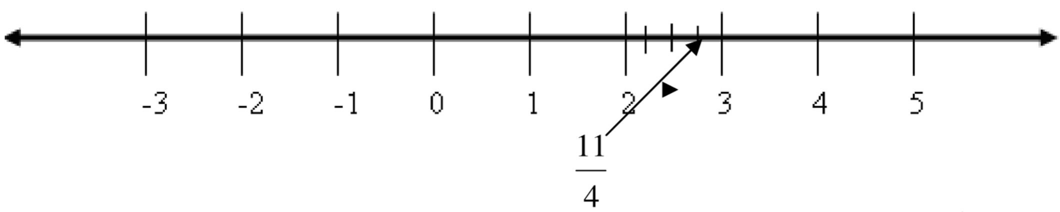
  No obstante, para sumar o restar varias fracciones, es conveniente utilizar el método del mínimo común múltiplo, con fracciones equivalentes a las dadas.

1.2 Representación de fracciones en la recta.

- Si la fracción es positiva, se realiza la división entera. El cociente indica entre cuáles números positivos se encuentra la fracción ("dos y pico"). El divisor indica el número de partes en que debe dividirse el intervalo anterior (en 4 partes). Y el resto indica el número de partes que deben tomarse contando hacia la derecha.

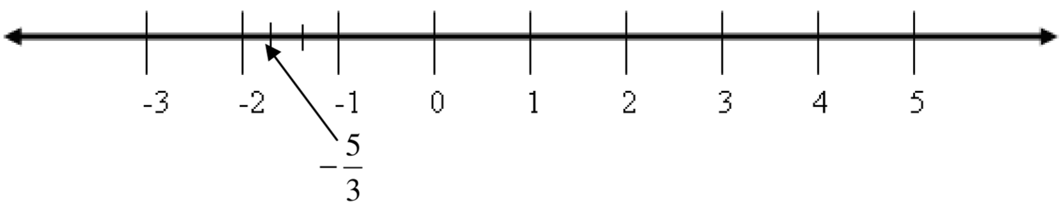
  $\frac{11}{4}\Rightarrow$ $\begin{array}{l|l} 11 & 4 \\ \hline 3 & 2 \end{array}$

  $\frac{8}{4}=2\Rightarrow\quad 1^{a}\,\frac{9}{4}\Rightarrow\quad 2^{a}\,\frac{10}{4}\Rightarrow\quad 3^{a}\,\frac{11}{4}\Rightarrow\quad 4^{a}\,\frac{12}{4}=3$



- Si la fracción es negativa, también se realiza la división entera. El cociente indica entre cuáles números negativos se encuentra la fracción ("menos uno y pico" estará entre -2 y -1). El divisor indica el número de partes en que debe dividirse el intervalo anterior (en 3 partes). Y el resto indica el número de partes que deben tomarse contando hacia la izquierda. $-\frac{3}{3}=-1\Rightarrow\quad 1^{a}\,\frac{-4}{3}\Rightarrow\quad 2^{a}\,\frac{-5}{3}\Rightarrow\quad 3^{a}\,\frac{-6}{3}=-2$

  $-\frac{5}{3}\Rightarrow$ $\begin{array}{l|l} -5 & 3 \\ \hline 2 & -1 \end{array}$



1.3 $\mathbb{Q}$ es el conjunto de los números periódicos.

- Todo número racional (o fracción) puede expresarse en forma decimal periódica, dividiendo el numerador entre el denominador de su expresión fraccionaria. El motivo es que cualquier división entre números enteros, tarde o temprano se acaba, o bien comenzará a repetirse porque hay un número finito de restos posibles. La expresión decimal periódica podrá ser:
  - Entero: $\frac{-8}{2} = -4$ (que puede considerarse nº periódico de periodo 0)
  - Decimal exacto: $\frac{9}{2} = 4{,}5$ (también es un número periódico de periodo 0)
  - Decimal periódico puro: $-\frac{1}{3} = -0{,}333333333\cdots = -0{,}\overset{\frown}{3}$
  - Decimal periódico mixto: $\frac{89}{30} = 2{,}96666666\cdots\cdots = 2{,}9\overset{\frown}{6}$
- A su vez, cualquier número periódico puede expresarse en forma de fracción:
  - Entero: $-3 = \frac{-3}{1}$. Basta poner denominador 1.
  - Decimal exacto: $-2{,}34 = -\frac{234}{100}$. Se multiplica y divide por 10,100, etc.
  - Decimal periódico puro: ejemplo x = $1{,}\overline{35}$. Se multiplica por 10, 100, etc., hasta tener otro número periódico de igual periodo, para después restarlos.

    $$\begin{array}{r} 100\,x = 135{,}353535\cdots\cdots\cdots \\ \underline{x = \quad 1{,}353535\cdots\cdots\cdots} \end{array}$$

    $$99\,x = 135 - 1 \qquad 99\,x = 134 \qquad x = \frac{134}{99} \qquad 1{,}\overline{35} = \frac{134}{99}$$

  - Decimal periódico mixto: ejemplo x = $1{,}3\overline{18}$. Se multiplica por 10, 100, etc., hasta que sea periódico puro y luego se sigue el proceso ya utilizado de tener otro número periódico puro de igual periodo y después restarlos.

    $$\begin{array}{r} 1000\,x = 1318{,}181818\cdots\cdots\cdots \\ \underline{10\,x = \quad 13{,}181818\cdots\cdots\cdots} \end{array}$$

    $$990\,x = 1318 - 13 \qquad 990\,x = 1305 \qquad x = \frac{1305}{990} \qquad 1{,}3\overline{18} = \frac{1305}{990}$$

  En definitiva, los números racionales (o fracciones) y los números decimales periódicos son en realidad el mismo conjunto.

1.4 Números irracionales $\mathbb{I}$. Aproximaciones.

- En el conjunto de los números racionales es posible realizar las cuatro operaciones básicas, y el resultado es una fracción o número periódico. Pero hay otros números que surgen de forma natural: por ejemplo al buscar la diagonal de un cuadrado de lado 1, la constante π que relaciona la longitud de la circunferencia con el diámetro, etc. Un número irracional, como su nombre indica no es racional, es decir, no puede expresarse en forma de fracción, o lo que es lo mismo no será un número decimal periódico. Por lo tanto un número irracional será un número decimal con infinitas cifras no periódicas.

Ejemplos: $\pi = 3{,}14159...$ e=2'71828… $\sqrt{2}$ =1,4142… 7,1234… 2,010010001… etc.

- Al operar con estos números no podremos utilizar sus infinitas cifras y tendremos que utilizar aproximaciones, por lo que siempre cometeremos un error: $1 < \sqrt{2} < 2$ las aproximaciones pueden ser por defecto $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ o por exceso. También se utilizan el redondeo $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ y el truncamiento: $1{,}246... \cong 1{,}24$ truncando, $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$ y $1{,}246... \cong 1{,}25$ por redondeo.

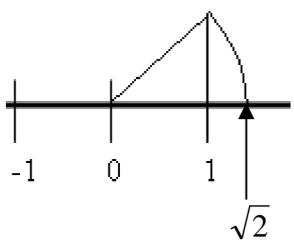
  En todo caso, tomemos una aproximación u otra, habrá un error absoluto, que será la diferencia entre el valor exacto y la aproximación. Este error absoluto no se podrá calcular si no conocemos el valor exacto, pero sí que podremos dar el orden o cota del error: por ejemplo al considerar la aproximación 1,41 en lugar del número $\sqrt{2}$ =1,4142…el error absoluto será entonces $e_a = \left|\sqrt{2} - 1{,}41\right| < \left|1{,}42 - 1{,}41\right| = 0{,}01$. Es decir, menor que una centésima.

  En general al tomar 1 cifra significativa, el error será menor que una décima, al tomar dos cifras el error será menor que una centésima etc.

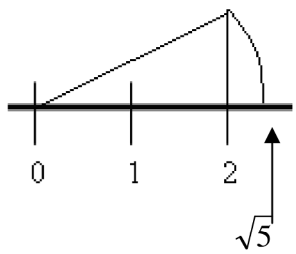
  Pero suele ser más interesante hablar del error relativo, que nos indica porcentualmente en cuánto nos equivocamos. El error relativo es el cociente entre el error absoluto y el valor exacto (o aproximación en su defecto).

  En el ejemplo, $e_r = \frac{e_a}{n^o} = \frac{\left|\sqrt{2} - 1{,}41\right|}{\sqrt{2}} \le \frac{0{,}01}{1{,}41} = 0{,}0071$. Un error del 0,71%.

- En general los números irracionales no pueden representarse de forma exacta en la recta real, tan sólo se puede representar una aproximación. Sin embargo, hay algunos números que sí pueden representarse de forma exacta mediante el teorema de Pitágoras: son algunos números relacionados con las ternas pitagóricas, la raíz de 2, 5, 10, 13 etc.



Con base 1 y altura 1, la hipotenusa medirá $\sqrt{2}$ y esa medida podrá trasladarse a la recta con el compás.
Con base 2 y altura 1, la hipotenusa medirá $\sqrt{5}$

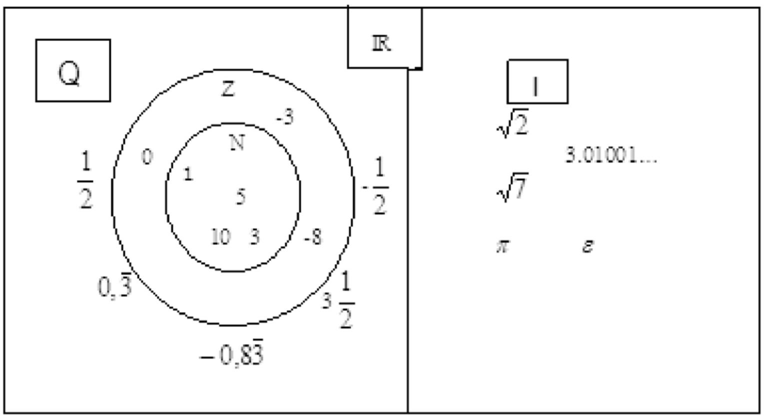


De la misma forma se representarían los números $-\sqrt{2}$ y $-\sqrt{5}$, pero ahora giraríamos el compás hacia la izquierda.

1.5 El conjunto de números reales $\mathbb{R}$.

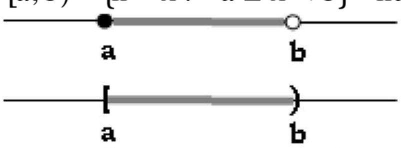
- El conjunto de los números reales es la unión de los conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$. Es el conjunto de todos los números que existen, sean racionales o irracionales. En este conjunto están todos los números que se encuentran de forma natural en la realidad (en la naturaleza) y ahora serán posibles todas las operaciones.

Números reales R
- Racionales Q
  - Exactos
    - Enteros Z
      - positivos N
      - cero
      - negativos
    - No enteros
  - No exactos
    - puros
    - mixtos
- Irracionales I

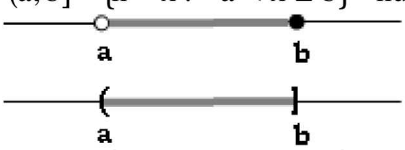


- El conjunto de los números reales se identifica con la recta real:
  - Dado un número real cualquiera se puede obtener de forma exacta un punto de la recta, si el número es racional, y de forma aproximada si el número es irracional.
  - Si elegimos un punto cualquiera de la recta real podemos conseguir una sucesión de aproximaciones que se identifican con un número real.
- Un intervalo de números reales es un conjunto de infinitos números comprendidos entre dos extremos dados y se identifica con un trozo de la recta real:
  - $[a,b]=\{n^{os}\ x:\ a\le x\le b\}$= números entre a y b, ambos inclusive.

  - $[a,b)=\{n^{os}\ x:\ a\le x< b\}$= números entre a y b, incluido sólo a.



  - $(a,b]=\{n^{os}\ x:\ a< x\le b\}$= números entre a y b, incluido sólo b.



  - $(a,b)=\{n^{os}\ x:\ a< x< b\}$= números entre a y b, ambos exclusive.

- $[a,+\infty) = \{n^{os}\ x: \quad a \le x\}$= números mayores o iguales que a.

- $(a,+\infty) = \{n^{os}\ x: \quad a < x\}$= números mayores que a.

- $(-\infty, b] = \{n^{os}\ x: \quad x \le b\}$= números menores o iguales que b.

- $(-\infty, b) = \{n^{os}\ x: \quad x < b\}$= números menores que b.

Ejemplo: el intervalo $\left[\frac{1}{3},3\right)$.

En algunas ocasiones los intervalos pueden definirse a partir del valor absoluto de una expresión.

- Como $|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \ge 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ $\quad |x| \le 2 = [-2,2] \qquad |x| < 2 = (-2,2)$
- Como $|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x \ge 1 \\ -x+1 & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$ $\quad |x-1| \le 3 = \begin{cases} x-1 \le 3 & \text{si} \quad x \ge 1 \\ -x+1 \le 3 & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$

  Luego $|x-1| \le 3 = [-2,4]$, que es el entorno cerrado de centro 1 y radio 3. Es decir, los números cuya distancia al nº 1 es de 3 unidades o menos.
- $|x-1| > 3 = \begin{cases} x-1 > 3 & \text{si} \quad x \ge 1 \\ -x+1 > 3 & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$ y $|x-1| > 3 = (-\infty,-2) \cup (4,+\infty)$, que sería el resto o complementario del entorno cerrado de centro 1 y radio 3.

1.6 Repaso de potencias. Notación científica.

- Las cuatro operaciones fundamentales $+,-,\times,\div$ son siempre posibles con números reales y en el peor de los casos trabajaremos con aproximaciones. A partir de ahora estudiaremos otras operaciones, como la raíz. Repasaremos en primer lugar las potencias y sus propiedades, porque toda raíz es en realidad una potencia de exponente una fracción.
  - $a^n = a \cdot a \cdot \ldots\ldots. a \quad (n - \text{veces})$. Definición para exponente natural.
  - $a^0 = 1 \quad$ convenio para validar la expresión: $\left(1 = \frac{a^n}{a^n} = a^0\right)$
  - $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Definición para exponente entero. No tendría sentido multiplicar por ejemplo menos 3 veces, pero al definir así esta nueva operación, se amplía la definición de potencia para exponente entero, manteniéndose todas las propiedades.

- $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$. Definición para exponente racional. Al igual que antes, no tendría sentido multiplicar por ejemplo media vez, pero al definir así esta nueva operación, se amplía la definición de potencia para exponente racional, manteniéndose todas las propiedades e introduciendo las raíces.
- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $(a^n)^k = a^{nk}$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

- La notación científica se basa en las potencias de 10, y sirve para trabajar con números muy grandes (astronómicos), o números muy pequeños (microscópicos). Los números se expresan de la forma $a,bc... \cdot 10^n$, es decir, una parte decimal con una única cifra entera y una potencia de 10. En la calculadora se introduce la potencia de 10 con la tecla EXP.
  - Para pasar de expresión decimal a notación científica un número muy grande, se cuenta el número de ceros y luego sumamos al exponente cada vez que corremos la coma hacia la izquierda:
    Ejemplo: $1.234_2 000.000_1 000.000 = 1234 \cdot 10^{12} = 1{,}234 \cdot 10^{15}$
  - Para pasar de expresión decimal a notación científica un número muy pequeño, contamos el número de decimales y luego sumamos al exponente cada vez que corremos la coma hacia la izquierda:
    Ejemplo: $0{,}0000000000000000001234 = 1234 \cdot 10^{-22} = 1{,}234 \cdot 10^{-19}$
  - Para pasar de notación científica a expresión decimal un número muy grande, se corre la coma hacia la derecha, restando en el exponente (para eliminar los decimales), para a continuación añadir ceros a la derecha:
    Ejemplo: $1{,}234 \cdot 10^{15} = 1234 \cdot 10^{12} = 1.234_2 000.000_1 000.000$
  - Para pasar de notación científica a expresión decimal un número muy pequeño, se corre la coma hacia la derecha, restando en el exponente (para eliminar los decimales), para a continuación añadir ceros a la izquierda hasta tener el número de decimales que indica el exponente:
    Ejemplo: $1{,}234 \cdot 10^{-19} = 1234 \cdot 10^{-22} = 0{,}0000000000000000001234$

1.7 Radicales. Propiedades. Radicales semejantes. Racionalización.

- El resultado de una raíz cuadrada es un número, que elevado al cuadrado nos resulta el radicando: $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow B^2 = A$. En general la raíz enésima es un número, que elevado a n resulta el radicando: $\sqrt[n]{A} = B \Leftrightarrow B^n = A$.
  - Si el índice es par y el radicando positivo, la raíz tendrá dos resultados, uno positivo y otro negativo. Ejemplo: $\sqrt[4]{16} = \pm 2$
  - Si el índice es par y el radicando negativo, no habrá ninguna solución: Ejemplo: $\sqrt[4]{-16}$ = no existe

  - Si el índice es impar y el radicando positivo, la raíz tendrá un único resultado positivo. Ejemplo: $\sqrt[3]{8} = 2$
  - Si el índice es impar y el radicando negativo, la raíz tendrá un único resultado negativo. Ejemplo: $\sqrt[3]{-8} = -2$

- Las propiedades de las raíces se basan en las de las potencias, de las que provienen:
  - $\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$
  - $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$. Esta propiedad nos sirve para incluir o extraer factores en una raíz: Ejemplo: $\sqrt[3]{x^5 \cdot y} = \sqrt[3]{x^3 \cdot x^2 \cdot y} = \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot y} = x \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot y}$
  - $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$. Igual que antes, utilizando esta propiedad podremos incluir o extraer factores: Ejemplo: $\sqrt[4]{\dfrac{x^7}{y^5}} = \dfrac{\sqrt[4]{x^4} \cdot \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{y^4} \cdot \sqrt[4]{y}} = \dfrac{x \cdot \sqrt[4]{x^3}}{y \cdot \sqrt[4]{y}} = \dfrac{x}{y} \sqrt[4]{\dfrac{x^3}{y}}$
  - $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$.
  - $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}$.
  - $\sqrt[n \cdot p]{a^{k \cdot p}} = \sqrt[n]{a^k}$. Esta propiedad nos sirve para comparar, multiplicar o dividir raíces aunque tengan diferente índice, utilizando la técnica del mínimo común múltiplo: Ejemplo:

$$\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^5} = \sqrt[12]{x^3} \cdot \sqrt[12]{x^{18}} \cdot \sqrt[12]{x^{20}} = \sqrt[12]{x^{3+18+20}} = \sqrt[12]{x^{41}} \left(= \sqrt[12]{x^{36}} \cdot \sqrt[12]{x^5} = x^3 \cdot \sqrt[12]{x^5} \right)$$

- Las raíces no se pueden sumar o restar, sin embargo, en algunas ocasiones al simplificar extrayendo factores, se observa un <u>radical semejante</u>, y entonces se podrá sacar factor común: Ejemplo:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{48} + \sqrt{98} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2^4 \cdot 3} + \sqrt{2 \cdot 7^2} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \sqrt[4]{3} + \sqrt{2} \cdot 7 \cdot \sqrt[4]{3} = (2+7) \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{3} =$$
$$= 9 \cdot \sqrt{2} \sqrt[4]{3} \left(= 9 \cdot \sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt[4]{3} = 9 \cdot \sqrt[4]{12} \right)$$

- Racionalizar una expresión en la que aparecen raíces consiste en eliminar las raíces del denominador. Para ello, se multiplica tanto el numerador como el denominador por una expresión.
  - Si hay una raíz cuadrada, se multiplica y divide por ella:

    Ejemplo: $\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$
  - Si hay una raíz de otro índice, se multiplica y divide por una raíz del mismo índice y con el exponente adecuado (índice menos exponente), buscando la simplificación en el denominador.

    Ejemplo: $\dfrac{2}{\sqrt[7]{3^2}} = \dfrac{2\sqrt[7]{3^5}}{\sqrt[7]{3^2} \cdot \sqrt[7]{3^5}} = \dfrac{2\sqrt[7]{3^5}}{\sqrt[7]{3^7}} = \dfrac{2\sqrt[7]{3^5}}{3}$
  - Si hay una suma o diferencia de dos raíces, se multiplica y divide por la expresión conjugada (cambiar el signo intermedio), para así tener en el denominador suma por diferencia igual a diferencia de cuadrados. Ejemplo:

$$\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{2\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}=\frac{2\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{2\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3-5}=$$
$$=\frac{2\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{-2}=-\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$$

1.8 Logaritmos.

- El logaritmo en base a (a-positivo distinto de 1) de un número x es el exponente r, al que hay que elevar la base a, para que nos resulte el número x. Es decir, $\log_a x = r \Leftrightarrow a^r = x$. Ejemplos: $\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$;
  $\log_5 25 = 2$ porque $5^2 = 25$; $\log_{10} 0{,}1 = -1$ porque $10^{-1} = 0{,}1$
  $\log_3 -9 =$ no existe; $\log_2 0 =$ no existe. No existe el logaritmo de los números negativos ni del cero, porque al elevar un número positivo a otro el resultado es siempre positivo, así que no puede salir ni negativo ni cero. Los logaritmos más utilizados son los logaritmos en base 10 o logaritmos decimales, si no se pone base, se supone que son decimales: $\log_{10} = L_{10} = \log$. También son muy utilizados los logaritmos en base e o neperianos (e=2,71828… es el número de Euler): $\log_e = L = \ln$.
- Las propiedades de los logaritmos también se basan en las propiedades de las potencias, porque vienen definidos a partir (o en función) de las potencias:
  - $\log_a x\cdot y = \log_a x + \log_a y$
  - $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
  - $\log_a x^y = y\cdot\log_a x$
  - $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$. Esta fórmula se conoce como cambio de base. Por

    ejemplo si queremos obtener con la calculadora $\log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} = 2{,}3219...$

    Es decir: $2^{2{,}3219} = 5$.

  En las propiedades de los logaritmos se observa que transforman operaciones complicadas en otras más sencillas, esto hizo que a lo largo de la historia se utilizasen para cálculos complejos u operaciones con grandes números. Ejemplo: $x = 200^{200}$ no se puede obtener con la calculadora, sin embargo sí su logaritmo: $\log x = \log 200^{200} = 200\cdot\log 200 = 200\cdot 2{,}3010 \approx 460{,}206$
  Como $\log x = 460{,}206 \Rightarrow x = 10^{460{,}206} = 1{,}6069\cdot 10^{460}$. Habría que añadir 454 ceros al nº 16069.