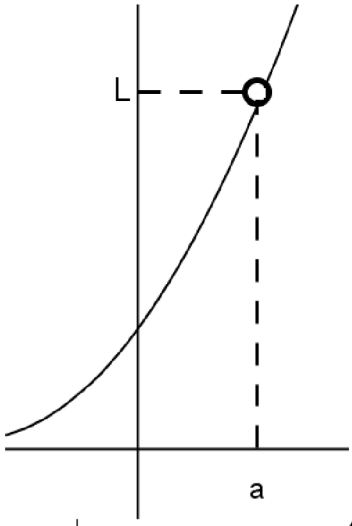
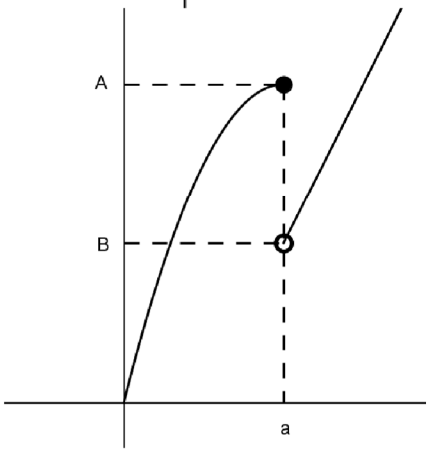
# Tema 10: Límites de funciones. Continuidad.

## 10.1 Límite de funciones.




- Definiciones:

  - El límite de una función en un nº real a vale L: $\lim_{x\to a} f(x) = L$, si para valores cada vez más próximos al número a, tanto por la izquierda como por la derecha, las imágenes se acercan cada vez más, tanto como queramos, al número L. Normalmente el límite y la imagen coinciden, pero no es exactamente lo mismo.




  - El límite por la izquierda en un nº real a vale A: $\lim_{x\to a^-} f(x) = A$, si para valores cada vez más próximos al número a, por la izquierda, las imágenes se acercan cada vez más, tanto como queramos, al número A.

  - El límite por la derecha en un nº real a vale B: $\lim_{x\to a^+} f(x) = B$, si para valores cada vez más próximos al número a, por la derecha, las imágenes se acercan cada vez más, tanto como queramos, al número B.

Claramente, para que haya límite los límites laterales deben coincidir.

Ejemplo: dada la función $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si} \quad x \le 2 \\ 2x-4 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$, calcular $\lim_{x\to 2} f(x)$.

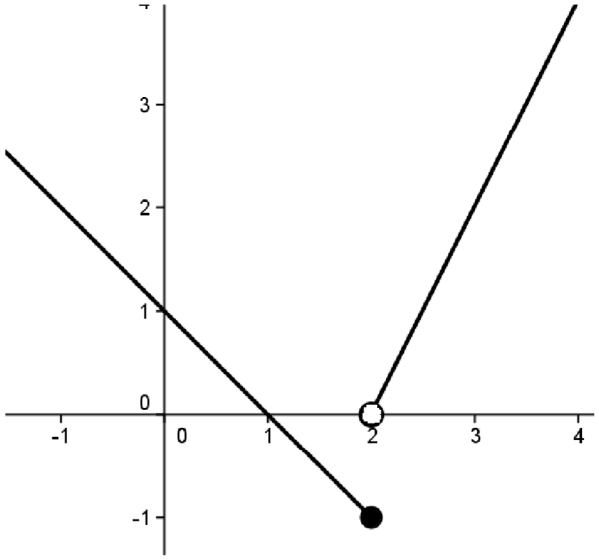
Hay dos intervalos y en cada uno de ellos una definición diferente:

En $(-\infty,2] \to f(x) = -x+1$

| x | f(x) |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |

En $(2,+\infty) \to f(x) = 2x-4$

| x | f(x) |
|---|---|
| (2 | 0) ○ |
| 3 | 2 |
| 4 | 4 |




Una vez representada la función los límites laterales pueden calcularse observando hacia qué número se acercan las imágenes al acercarnos al 2, tanto por la izquierda como por la derecha. También podemos dar valores muy cercanos a 2 por la izquierda y por la derecha y ver qué ocurre con las imágenes.

| x | f(x) |
|---|---|
| 1,9 | − 0,9 |
| 1,99 | − 0,99 |
| 1,999 | − 0,999 |

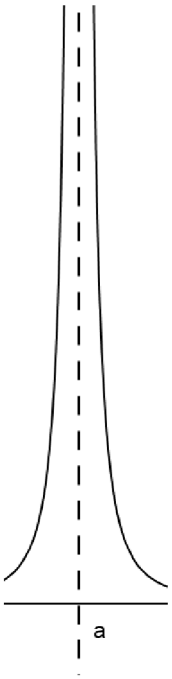
| x | f(x) |
|---|---|
| 2,1 | 0,2 |
| 2,01 | 0,02 |
| 2,001 | 0,002 |

Tanto razonando sobre la gráfica, como sobre los resultados de las tablas de valores anteriores, tenemos que:

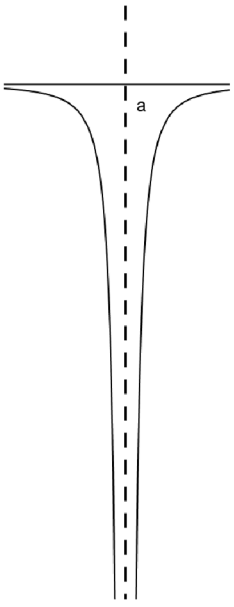
El límite por la izquierda es $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} -x+1 = -1$.

El límite por la derecha es $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 2x-4 = 0$.

Como los límites laterales no coinciden, no existe el límite de la función en el 2, es decir: $\lim_{x\to 2} f(x) =$ no existe.



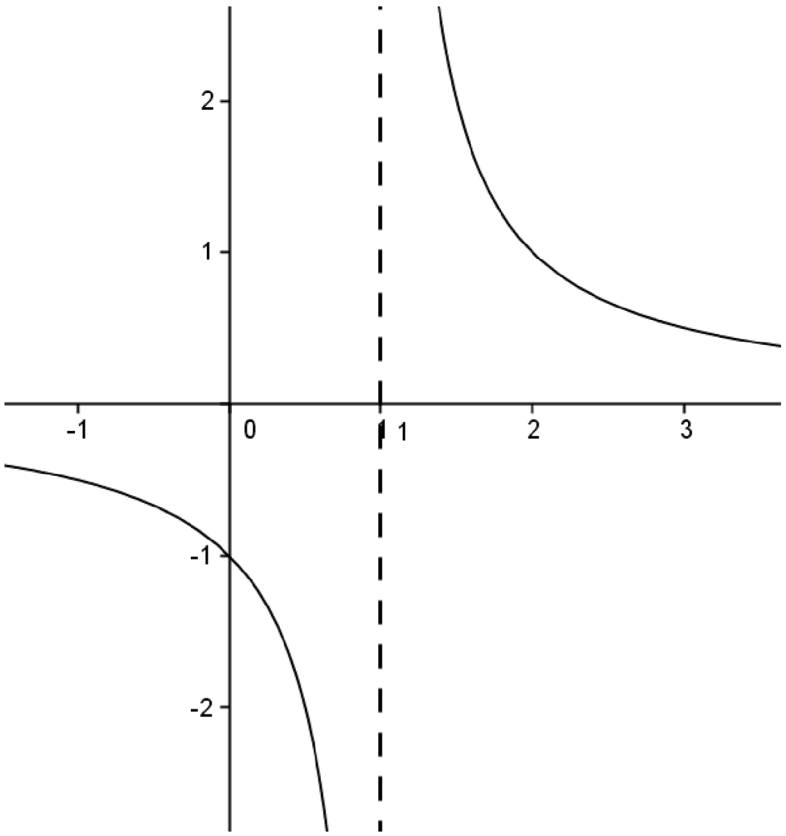

- El límite en un nº real a vale $+\infty$: $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ si para valores cada vez más próximos al número a, tanto por la izquierda como por la derecha, las imágenes son cada vez mayores de forma indefinida.




- El límite en un nº real a vale $-\infty$: $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ si para valores cada vez más próximos al número a, tanto por la izquierda como por la derecha, las imágenes son cada vez más negativas de forma indefinida.

- En la práctica es muy habitual que los límites laterales sean uno de ellos $+\infty$ y el otro $-\infty$. Y por tanto, no habrá límite.

  Ejemplo: dada la función $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, calcular $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

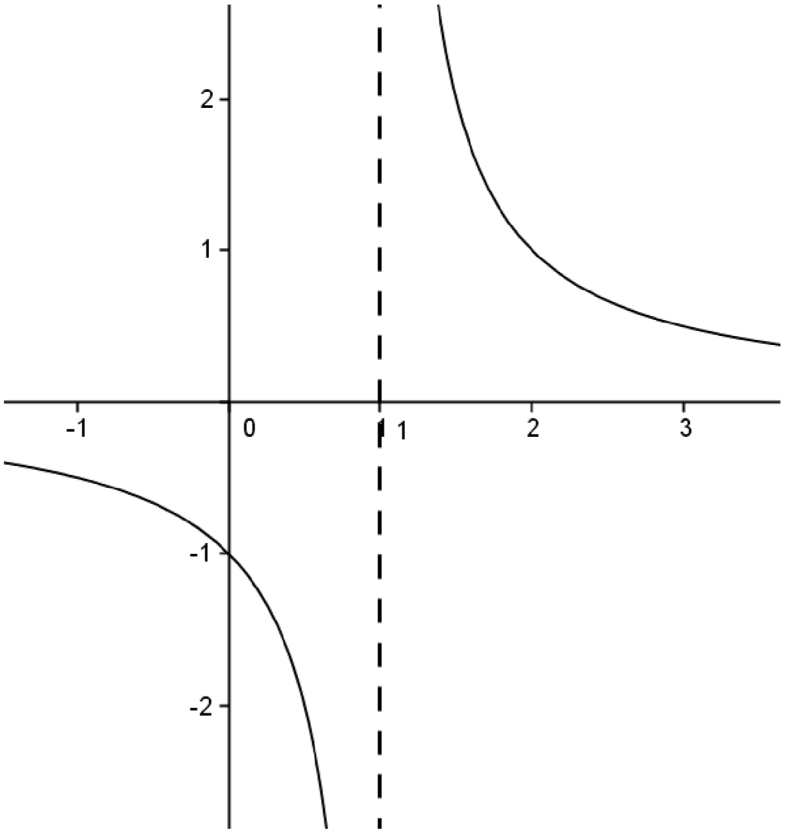



| x | f(x) |
|---|---|
| $-2$ | $-\frac{1}{3}$ |
| $-1$ | $-\frac{1}{2}$ |
| 0 | $-1$ |
| 0.9 | $-10$ |
| 0.99 | $-100$ |
| 1.01 | 100 |
| 1.1 | 10 |
| 2 | 1 |
| 3 | $\frac{1}{2}$ |
| 4 | $\frac{1}{3}$ |

  Bien razonando sobre la gráfica para valores muy próximos a 1, o bien mirando la tabla de valores, los límites laterales valen $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$, luego no existe el límite.

- El límite en $+\infty$ de una función vale L: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ si para valores cada vez mayores: 10, 100, 1000, etc., las imágenes se acercan cada vez más al número L.
- El límite en $-\infty$ de una función vale L: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ si para valores cada vez más negativos: $-10, -100, -1000$, etc., las imágenes se acercan cada vez más al número L.

  Ejemplo: dada $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Como es la misma función del ejemplo anterior, daremos únicamente valores para calcular los límites.




| x | f(x) |
|---|---|
| $-10$ | $-0{,}09$ |
| $-100$ | $-0{,}0099$ |
| $-1000$ | $-0{,}00099$ |
| … | … |
| 10 | 0,111 |
| 100 | 0,010 |
| 1000 | 0,001 |
| … | … |

Tenemos entonces que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$, y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$. Los superíndices del resultado del límite indican si nos acercamos hacia el límite por arriba, con valores mayores (+), o por abajo, con valores menores $(-)$.

- Propiedades de los límites:
  - $\lim_{x\to a,\pm\infty} [f(x)+g(x)] = \left[\lim_{x\to a,\pm\infty} f(x)\right] + \left[\lim_{x\to a,\pm\infty} g(x)\right]$
  - $\lim_{x\to a,\pm\infty} [f(x)-g(x)] = \left[\lim_{x\to a,\pm\infty} f(x)\right] - \left[\lim_{x\to a,\pm\infty} g(x)\right]$
  - $\lim_{x\to a,\pm\infty} [f(x)\cdot g(x)] = \left[\lim_{x\to a,\pm\infty} f(x)\right] \cdot \left[\lim_{x\to a,\pm\infty} g(x)\right]$
  - $\lim_{x\to a,\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a,\pm\infty} f(x)}{\lim_{x\to a,\pm\infty} g(x)}$ siempre que el denominador no sea 0.
  - $\lim_{x\to a,\pm\infty} (f(x))^{g(x)} = \left(\lim_{x\to a,\pm\infty} f(x)\right)^{\lim_{x\to a,\pm\infty} g(x)}$

- Operaciones con $\infty$: al aplicar las propiedades anteriores pueden aparecer operaciones en las que interviene $\infty$ y sus resultados son los siguientes:
  - $\frac{\infty}{k} = \infty$ : al aumentar el numerador la fracción aumenta.
  - $\frac{k}{\infty} = 0$ : al aumentar el denominador disminuye la fracción.

- $\frac{k}{0}=\infty$ : al disminuir el denominador aumenta la fracción.
- $\frac{\infty}{0}=\infty$ : aumenta el numerador y el denominador disminuye.
- $\frac{0}{\infty}=0$ : disminuye el numerador y aumenta el denominador.
- $\infty \pm k=\infty \quad , \quad \infty+\infty=\infty \quad , \quad \infty\cdot\infty=\infty$
- $0^{+\infty}=0 \quad , \quad 0^{-\infty}=+\infty \quad , \quad (+\infty)^{+\infty}=+\infty \quad , \quad (+\infty)^{-\infty}=0$
- $k^{+\infty}=\begin{cases} +\infty & \text{si} \quad k>1 \\ 0 & \text{si} \quad 0<k<1 \end{cases} \quad , \quad k^{-\infty}=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad k>1 \\ +\infty & \text{si} \quad 0<k<1 \end{cases}$

- Hay algunas operaciones con $\infty$ que no pueden razonarse como antes y pueden dar lugar a cualquier resultado, son las llamadas indeterminaciones:

$$\frac{\infty}{\infty}=? \quad , \quad \infty-\infty=? \quad , \quad \frac{0}{0}=? \quad , \quad 0\cdot\infty=? \quad , \quad 1^{\infty}=? \quad , \quad 0^{0}=? \quad \text{y} \quad \infty^{0}=?$$

## 10.1 Cálculo de límites de funciones.

- Límite de una función polinómica:
  - El límite en un nº real se obtiene sustituyendo. Ejemplo:
    $\lim_{x\to 2}\left(x^3-3x^2+4x-7\right)=2^3-3\cdot 2^2+4\cdot 2-7=8-12+8-7=-3$
  - El límite en $\infty$ vale siempre $\infty$, y el signo depende del coeficiente de mayor grado y de la paridad del mayor exponente. Ejemplos:
    $\lim_{x\to+\infty}\left(x^3-3x^2+4x-7\right)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}\left(-x^3-3x^2+4x-7\right)=-\infty$
    $\lim_{x\to-\infty}\left(x^3-3x^2+4x-7\right)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}\left(-x^3-3x^2+4x-7\right)=+\infty$
- Límite de una función racional o fracción polinómica:
  - El límite en un nº real se obtiene sustituyendo, si es posible. Ejemplo:

    a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-8}=\frac{2^2-3\cdot 2+2}{2^2-8}=\frac{4-6+2}{4-8}=\frac{0}{-4}=0$ .

    b) Si el denominador es 0, hay que estudiar los límites laterales porque normalmente, como ya hemos visto, no habrá límite. Ejemplo:

    $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x}{x^2-4}=\frac{2^2-3\cdot 2}{2^2-4}=\frac{4-6}{4-4}=\frac{-2}{0}=\begin{cases}\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-3x}{x^2-4}=\frac{-2}{0^-}=+\infty \\ \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-3x}{x^2-4}=\frac{-2}{0^+}=-\infty\end{cases}$$

    Luego no hay límite porque los límites laterales no coinciden.

    c) Por último también puede aparecer la indeterminación $\frac{0}{0}$ que se resuelve descomponiendo en factores los polinomios y simplificando:

Ejemplo $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{2x^2-8}=\frac{2^2-3\cdot 2+2}{2\cdot 2^2-8}=\frac{4-6+2}{8-8}=\frac{0}{0}$ Ind.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{2x^2-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{2\cdot(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{2\cdot(x+2)}=\frac{1}{8}$$

- El límite en $\infty$ da lugar normalmente a la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ que se resuelve dividiendo numerador y denominador por la mayor potencia de x que aparezca en la expresión. Pueden darse tres posibilidades: si el grado del numerador es mayor, el resultado será $\infty$, si tienen igual grado, el resultado será el cociente entre los coeficientes de mayor grado y si el grado del numerador es menor, el resultado será 0.
  Ejemplos:
  a) Grado del numerador mayor.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-3x+2}{2x^2-3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}-\frac{3x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{\frac{2x^2}{x^3}-\frac{3x}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}=$$

  $=\frac{1-0+0}{0-0}=\frac{1}{0^+}=+\infty$. Observar que el primer término del denominador indica el signo, también puede observarse el resultado al principio $\frac{+}{+}=+$.

  b) Grado del numerador igual al grado del denominador.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-3x+1}{2x^2-3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{3}{x}}=$$

  $$=\frac{3-0+0}{2-0}=\frac{3}{2}$$

  c) Grado del numerador menor.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-3x+1}{2x^3-3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^3}-\frac{3x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{3x}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{2-\frac{3}{x^2}}=$$

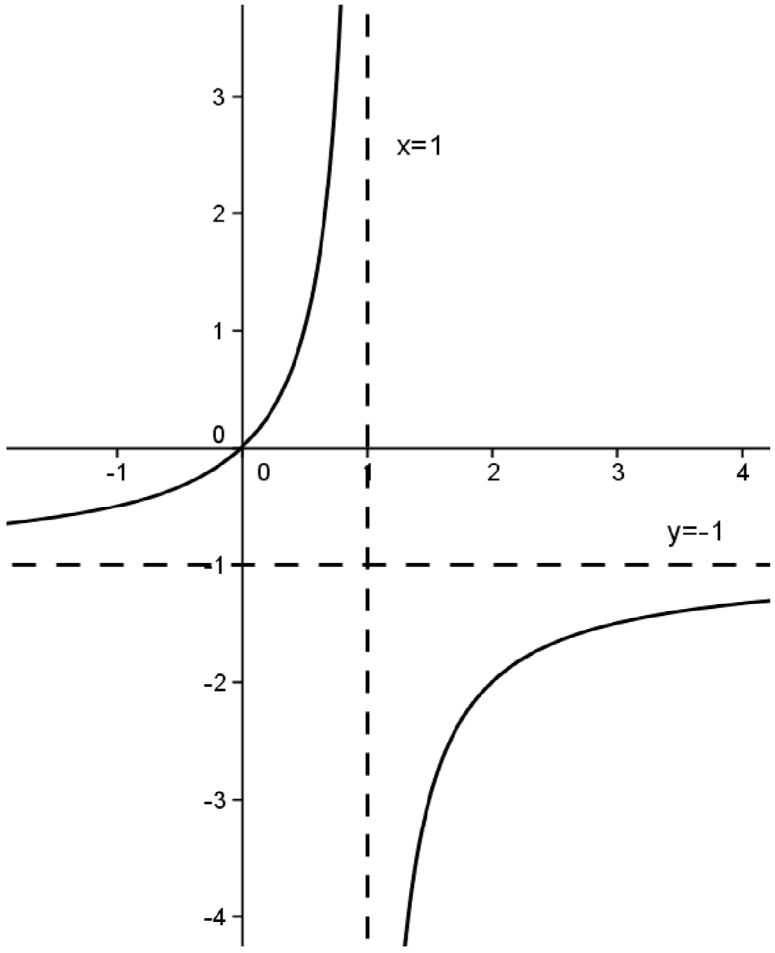
  $$=\frac{0-0+0}{2-0}=\frac{0}{2}=0$$

## 10.2 Asíntotas.

- Asíntotas verticales:
  La recta: $x = a$ es una asíntota vertical si alguno de los límites laterales en el número a vale infinito, es decir: $\boxed{\lim_{x\to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty}$. Las asíntotas verticales suelen encontrarse en los números que anulan el denominador de las funciones racionales, aunque también pueden existir en las funciones logarítmicas. En cualquier caso, siempre se encontraran en números que no pertenecen al dominio de la función.

  Ejemplo: la función $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ tiene D=$\mathbb{R}\setminus\{1\}$ y los límites laterales son $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{x}{1-x} = +\infty$ y $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x}{1-x} = -\infty$, luego la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.
- Asíntotas horizontales:
  La recta: $y = b$ es una asíntota horizontal si alguno de los límites en el infinito vale b, es decir: $\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b}$. Ejemplo: la función $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$

  Tiene por límites en el infinito: $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x}{1-x} = -1^+$ y $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{1-x} = -1^-$, luego la recta $y = -1$ es una asíntota horizontal.

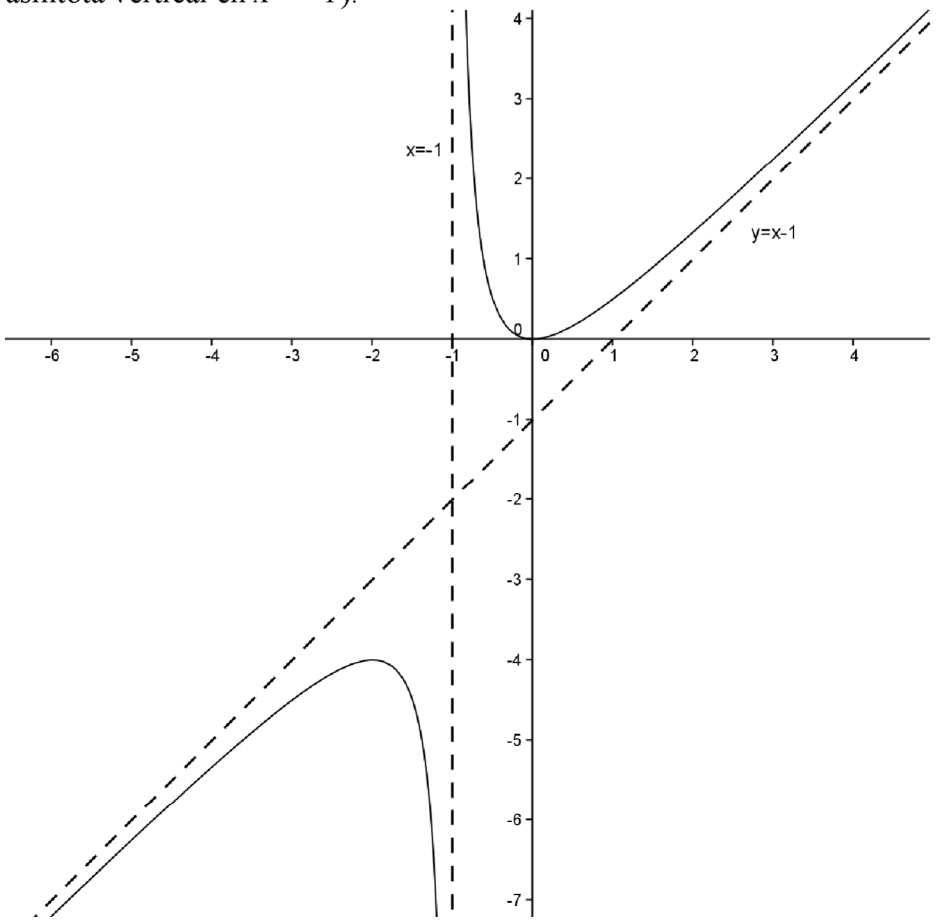


- Asíntotas oblicuas. La recta: $y = mx + n$ es una asíntota oblicua si coinciden los límites en el infinito de la función y de la recta, es decir: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (mx+n)$. Este tipo de asíntotas podemos encontrarlas en las funciones racionales cuando el grado del numerador supera en una unidad al grado del denominador. Además, es conveniente recordar que si hay asíntota horizontal no habrá entonces en ese lado asíntota oblicua.
  - Dividiendo por x en la expresión anterior se obtiene el valor de la pendiente m: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{mx+n}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} m + \frac{n}{x} = m + 0 = m$. Luego la pendiente es $\boxed{m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}}$.
  - Una vez conocida la pendiente, el término independiente n se obtiene despejando en la expresión inicial: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (mx+n) = \left(\lim_{x\to\pm\infty} mx\right) + n$ de donde $\boxed{n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx)}$

Ejemplo: la función $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$: $\quad m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2+x} = 1$

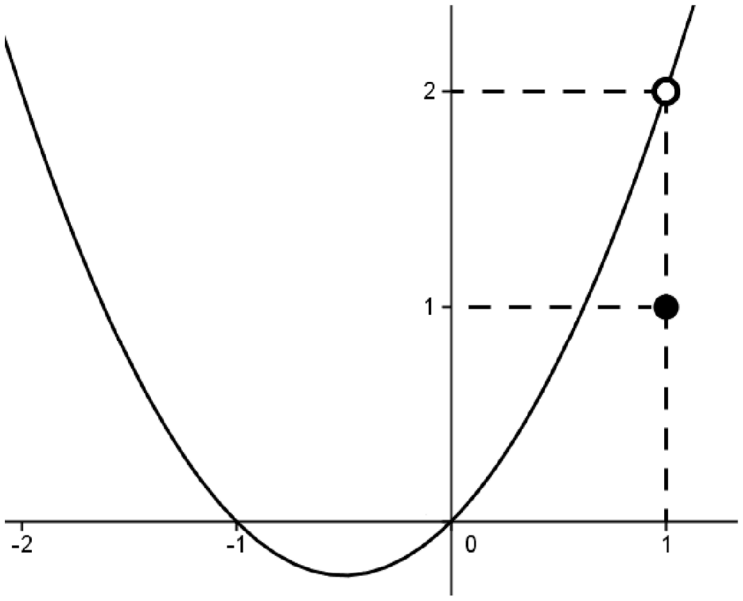
$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x+1} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - x^2 - x}{x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$$

Luego la recta $y = x - 1$ es una asíntota oblicua (y además también hay una asíntota vertical en $x = -1$).



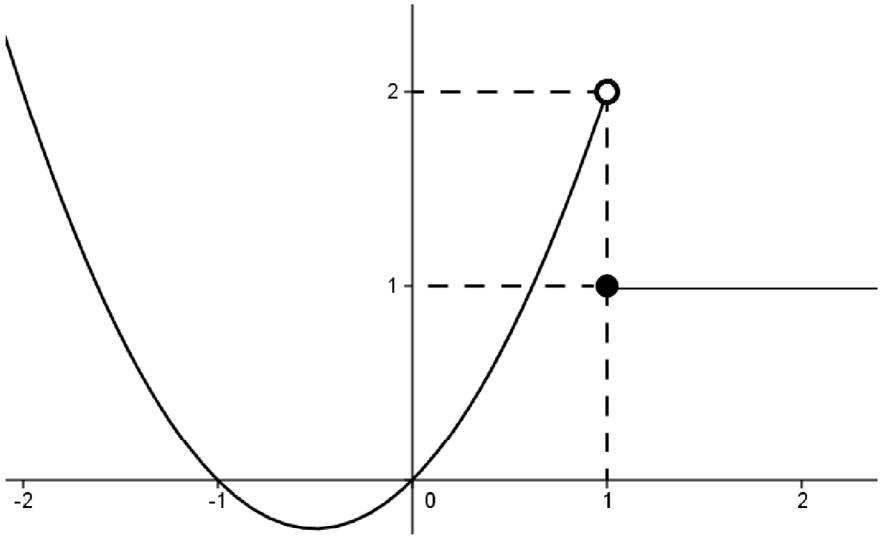
## 10.3 Continuidad de una función.

- Una función es continua en un nº real a si el límite y la imagen en dicho punto coinciden: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Esta definición obliga a que los límites laterales deben existir y coincidir, porque en caso contrario no habrá límite. Podemos encontrar tres tipos de discontinuidad:
  - Discontinuidad puntual o evitable, que tiene lugar cuando existe el límite pero no coincide con la imagen: Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} x^2 + x \text{ si } x \neq 1 \\ 1 \qquad \text{si } x = 1 \end{cases}$



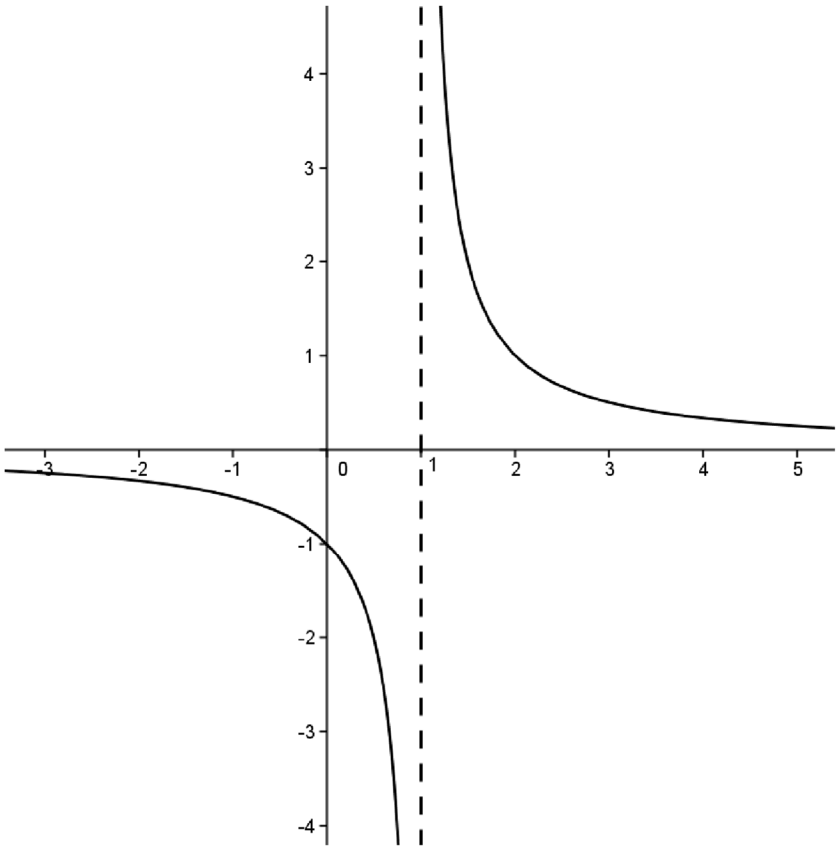

Esta función es continua en todos sus puntos excepto en el 1 por que el límite y la imagen no coinciden: $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$, pero f(1)=1.

  - Discontinuidad de salto finito, que tiene lugar cuando los límites laterales existen pero no coinciden. Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} x^2 + x \text{ si } x < 1 \\ 1 \qquad \text{si } x \geq 1 \end{cases}$



Esta función es continua en todos sus puntos excepto en el 1 porque los límites laterales $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$ son distintos.

- Discontinuidad de salto infinito, que tiene lugar cuando los límites laterales son uno de ellos $+\infty$ y el otro $-\infty$. Ejemplo: $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$




Esta función es continua en todos sus puntos excepto en el 1 porque los límites laterales son $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$.

- Las funciones polinómicas, rectas, parábolas etc., son siempre continuas en todos los puntos. Las funciones racionales son continuas en su dominio, es decir, excepto en los números que anulan el denominador, donde encontramos asíntotas verticales que provocan discontinuidades de salto infinito. Y en general el resto de funciones con las que trabajamos habitualmente, funciones irracionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, etc., también son continuas en su dominio. Por tanto para estudiar la continuidad hay que tener claro el dominio de definición y además estudiar el límite y la imagen en los puntos críticos de las funciones definidas a trozos.

- Ejemplos de estudio de continuidad

  Estudiar la continuidad de la función $f(x) = |x+1|$

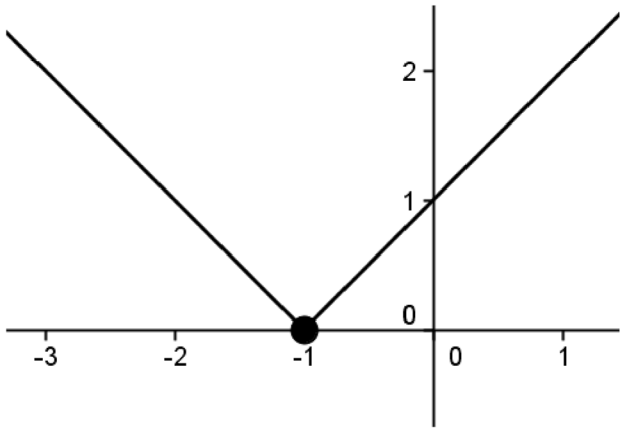
  $$f(x) = \begin{cases} -(x+1) & \text{si} \quad x+1<0 \\ x+1 & \text{si} \quad x+1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{si} \quad x<-1 \\ x+1 & \text{si} \quad x\geq -1 \end{cases}$$

  En $(-\infty,-1) \to f(x) = -x-1$ En $[-1,+\infty) \to f(x) = x+1$

| x | f(x) |
|---|---|
| $-3$ | 2 |
| $-2$ | 1 |
| $(-1$ | $0)$ ○ |

| x | f(x) |
|---|---|
| $-1$ | 0 |
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |

Esta función es continua en todos sus puntos porque en el $-1$, que es el único punto que hay que estudiar, los límites laterales y la imagen coinciden:
$\lim_{x\to -1^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 0$ y $f(-1) = 0$.

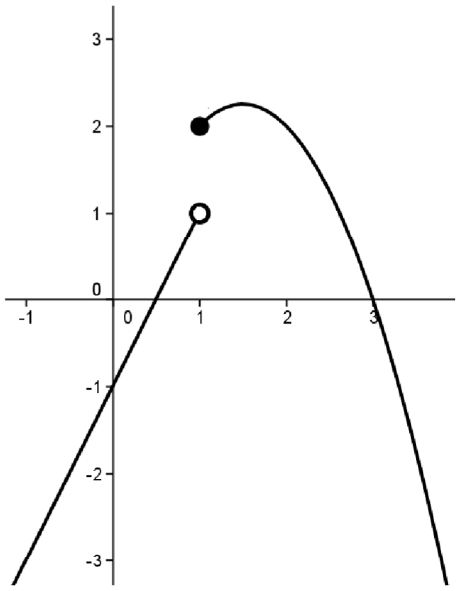



Ejemplo: estudiar la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si} \quad x < 1 \\ -x^2+3x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

En $(-\infty,1) \to f(x) = 2x-1$

| x | f(x) |
|---|---|
| $-1$ | $-3$ |
| 0 | $-1$ |
| $(1$ | $1)$ ○ |

En $[1,+\infty) \to f(x) = -x^2+3x$

| x | f(x) |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 2 |
| 3 | 0 |

En cuanto al estudio de la parábola de forma resumida, sería el siguiente:
El vértice $V = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ es un máximo y los cortes son $(0,0)$ y $(3,0)$. El primer corte está fuera del rango de definición de la parábola.
Esta función es continua en todos sus puntos excepto en el 1 porque los límites laterales $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$ son distintos, por lo que tendremos una discontinuidad de salto finito.