Tema 1: Números enteros. Divisibilidad.

1.1 Divisibilidad

- Supongamos que dividimos dos números naturales D por d y resulta un cociente c y un resto r:

D	d	Ejemplo:	17	5
r	c		2	3

Esta división sin decimales se llama división entera y en ella se cumple el teorema o algoritmo de la división: $\boxed{D=d\cdot c+r}$. ¿Por qué?
Porque la división consiste en contar las veces que un número está contenido en otro, o sea, restamos sucesivamente el divisor (tantas veces como indica el cociente) hasta que no se pueda seguir restando y quede un resto. En el ejemplo anterior sería: $17-5-5-5=2 \Rightarrow 17-3\cdot 5=2 \Rightarrow 17=3\cdot 5+2$.

Si el resto es 0, decimos que la división es exacta:

D	d	Ejemplo:	15	5
0	c		0	3

$\boxed{\text{La división es exacta} \Leftrightarrow \text{ D es múltiplo de d } \Leftrightarrow \text{ d es divisor de D}}$

En el ejemplo anterior la división de 15 entre 5 es exacta, y por tanto:

- $15=5\cdot 3$
- 15 es múltiplo de 5.
- 5 es divisor de 15.
- 3 también es divisor de 15.

Los múltiplos de un número se obtienen multiplicando por 0,1,2,3,…
Ejemplo: los múltiplos de 5 son $5\cdot n$, es decir: 0,5,10,15,25,30,…
Además, dados dos múltiplos de un número, también lo son su suma $5n+5m=5(n+m)$ y su diferencia $5n-5m=5(n-m)$.

- Criterios de divisibilidad. Veremos ahora qué debe ocurrir para que un número sea divisible por otro, empezaremos por los primeros números:
  - Un número es divisible por 2 cuando es par. Ejemplo: $22=2\cdot 11$.
  - Un número es divisible por 3 cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 3. Ejemplo: 237 (2+3+7=12), $237=3\cdot 79$.
  - Un número es divisible por 4 cuando las dos últimas cifras forman un múltiplo de 4. Ejemplo: 264 (64 es múltiplo de 4), $264=4\cdot 66$.
  - Un número es divisible por 5 cuando acaba en 0 ó 5. Ejemplo: $65=5\cdot 13$.
  - Un número es divisible por 7 cuando al restar al número sin unidades el doble de las unidades resulta un múltiplo de 7. Ejemplo: 1645, ($164-10=154$ que es múltiplo de 7), $1645=7\cdot 235$.

- Un número es divisible por 8 cuando las tres últimas cifras forman un múltiplo de 8. Ejemplo: 2584, (584 es múltiplo de 8), 2584=8·323.
- Un número es divisible por 9 cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 9. Ejemplo: 6237, (6+2+3+7=18), 6237==9·693.
- Un número es divisible por 10 cuando acaba en 0. Ejemplo: 230=10·23.
- Un número es divisible por 11 si la suma de las cifras de lugar impar (comenzando a contar por la derecha) menos la suma de las cifras de lugar par es múltiplo de 11. Ejemplo: 638, ($6+8-3=11$ que es múltiplo de 11), 638=11·58.

1.2 Descomposición en factores primos.

- Una vez que conocemos los criterios de divisibilidad, podemos saber los divisores que tiene un número. Si un número no tiene divisores propios, se dice que es primo. Es decir, un número primo es divisible por sí mismo y por la unidad. Los demás números se dice que son compuestos.
- Los números compuestos pueden expresarse de forma única mediante producto de factores primos, para ello se divide de forma sucesiva por los números primos más pequeños por los que sea divisible. Ejemplo:

  El número 360 se descompone así: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, porque en cada división el número "se parte" en números cada vez más pequeños:

  $360 = 2 \cdot 180 = 2 \cdot 2 \cdot 90 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 45 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 15 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

3	6	0	|	2																			
1	6			1	8	0	|	2															
	0	0			0	0		9	0	|	2												
		0				0		1	0		4	5	|	3									
									0		1	5		1	5	|	3						
												0			0		5	|	5				
																	0		1				

3	6	0	|	2
1	8	0	|	2
	9	0	|	2
	4	5	|	3
	1	5	|	5
		5	|	5
		1	|	

Ejemplo: el número $2292 = 2^2 \cdot 3 \cdot 191$. En cada división el número se divide en números cada vez más pequeños $2292 = 2 \cdot 1146 = 2 \cdot 2 \cdot 573 = 2^2 \cdot 3 \cdot 191$

2	2	9	2	|	2																		
0	2				1	1	4	6	|	2													
	0	9				1	4			5	7	3	|	3									
		1	2				0	6		2	7			1	9	1	|	1	9	1			
			0					0			0	3				0		1					
												0											

2	2	9	2	|	2	
1	1	4	6	|	2	
	5	7	3	|	3	
	1	9	1	|	1	9 1
			1	|		

El número 191 es primo. Los primeros números primos menores que 200 son: 2, 3, 5, 7,11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, …
Para obtenerlos se construye la criba de Eratóstenes, que consiste en eliminar los múltiplos de 2, luego los múltiplos de 3, luego de 5, etc.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

1.3 Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

- El Máximo común divisor de dos números (M.C.D.) es el mayor de los divisores comunes de ambos números, así el máximo común divisor de 12 y 30 es 6 (se escribe: M.C.D.(12,30)=6). Para calcularlo se realizan las descomposiciones factoriales y se toman los factores comunes elevados al menor exponente. Esto es así, porque claramente los factores debe ser comunes y además, hay que elevar al menor exponente para que de esta forma sigamos dividiendo a ambos números.

  Ejemplo: 12 y 30.

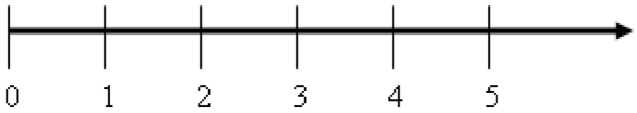
$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{M.C.D.}(12,30) = 2 \cdot 3 = 6$$

- El mínimo común múltiplo (m.c.m.) es el menor de los múltiplos comunes de ambos números, así el mínimo común múltiplo de 12 y 30 es 60. (se escribe así: m.c.m.(12,30)=60). Para calcularlo se realizan las descomposiciones factoriales y se toman todos los factores elevados al mayor exponente. Esto es así, porque se necesitan todos los factores para ser múltiplo, y además, hay que elevar al mayor exponente porque en caso contrario perderíamos el hecho de ser múltiplo del mayor de los números.
  Ejemplo: 12 y 30.
  $$\left.\begin{array}{l} 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{m.c.m.}(12,30) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$
- Hay una fórmula muy útil para comprobar si los cálculos son correctos: $\boxed{\text{M.C.D.}(a,b) \bullet \text{m.c.m.}(a,b) = a \cdot b}$. O sea, el producto del máximo común divisor por el mínimo común múltiplo coincide con el producto de ambos números. Esta fórmula se obtiene razonando con las descomposiciones factoriales porque después de tomar los factores comunes elevados al menor exponente y luego todos los factores elevados al mayor exponente, en realidad estamos tomando los factores que aparecen en ambas descomposiciones factoriales.
  Ejemplo: 12 y 30.
  $$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{M.C.D.}(12,30) = 2 \cdot 3 = 6 \\ \left.\begin{array}{l} 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{m.c.m.}(12,30) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60 \end{array}\right\} \Rightarrow 6 \cdot 60 = 12 \cdot 30 \Rightarrow 360 = 360$$
- Una utilidad importante del M.C.D. y m.c.m. es la resolución de problemas en los que hay que preguntarse si buscamos un múltiplo o un divisor.
  Ejemplo: dos amigos vienen a Cáceres uno cada 18 días y el otro cada 24 días. Hoy se han encontrado en Cáceres. ¿Dentro de cuantos días volverán a estar los dos a la vez en Cáceres?
  - Está claro que buscamos un múltiplo y además debe ser mínimo porque queremos saber cuándo se reencontrarán por primera vez.
  $$\left.\begin{array}{l} 18 = 2 \cdot 3^2 \\ 24 = 2^3 \cdot 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{m.c.m.}(18,24) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$$. Volverán a encontrarse en 72 días.
  Ejemplo: en una bodega hay 3 toneles de vino, cuyas capacidades son: 250, 360 y 540 litros. Todo el contenido de los toneles se quiere envasar en garrafas iguales. Calcular las capacidades máximas de estas garrafas para que en ellas se pueda envasar el vino contenido en cada uno de los toneles, y el número de garrafas que se necesitan.
  - Está claro que buscamos un divisor y además debe ser máximo porque queremos saber las capacidades máximas de estas garrafas.
  $$\left.\begin{array}{l} 250 = 2 \cdot 5^3 \\ 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ 540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{M.C.D.}(250,360,540) = 2 \cdot 5 = 10$$. Garrafas de 10 litros.
  Tendremos 25 garrafas del 1º, 36 garrafas del 2º y 54 garrafas del 3º.

1.4 Números naturales $\mathbb{N}$ y números enteros $\mathbb{Z}$.

- El conjunto de los números naturales es $\mathbb{N}$= {1, 2, 3, ····· }, es un conjunto infinito y se representa en una semirrecta una vez elegido el origen y la medida unidad.



En este conjunto tan sólo es posible contar, sumar y multiplicar. No siempre se puede restar ($3-6=?$), ni dividir si la división no es exacta (5:2=?).

- El conjunto de los números enteros es $\mathbb{Z}$={..,−5, −4,−3,−2,−1,0,1,2,3,4,5,… }

En el conjunto de los números enteros el orden se basa en la posición en la recta: un número es mayor que otro si está situado más a la derecha.
El valor absoluto de un número entero se obtiene eliminando el signo.
Ejemplo: $|+3|=3$ y también $|-3|=3$.

Dos números enteros son opuestos cuando tienen el mismo valor absoluto y signo diferente. Ejemplo: -3 y $+3$.

- El conjunto $\mathbb{Z}$ engloba al anterior $\mathbb{N}$ y aquí se solucionan dos problemas:
  - Ahora sí que es posible restar dos números cualesquiera: $3-6=-3$ (seguimos todavía sin poder dividir).
  - Ahora pueden describirse de forma natural otros números negativos al considerar temperaturas negativas, otra dirección diferente como bajar al sótano, el hecho de deber dinero o tener saldos negativos, etc.

1.5 Operaciones con números enteros.

- Suma: para sumar dos números enteros que tienen el mismo signo, se suman sus valores absolutos y se mantiene el mismo signo.
  Ejemplos: $5+3=8$ y $-4-2=-6$.
  Para sumar dos números enteros que tienen signo diferente, se restan sus valores absolutos y se mantiene el signo del mayor en valor absoluto.
  Ejemplos: $-5+3=-2$ y $-4+7=+3$.
- Resta: para restar dos números enteros, se cambia de signo al sustraendo y luego se suman como en el apartado anterior. Ejemplos: $-5-3=-8$
  $-4-(-2)=-4+2=-2$ $\quad 5-3=2$ $\quad 4-(-7)=4+7=11$
- Producto: dos números enteros se multiplican siguiendo la regla de los signos:

+	•	+	=	+
+	•	−	=	−
−	•	+	=	−
−	•	−	=	+

Esta regla de los signos se razona así: al ganar varias veces un beneficio, el resultado sigue siendo un beneficio (positivo), y por el contrario al pedir varias veces una deuda, el resultado sigue siendo una deuda (negativo).
Ejemplos: $5\cdot(-3)=-15$ $\quad (-5)\cdot(-3)=+15$

- Cociente: igual que antes dos números enteros se dividen siguiendo la regla de los signos. Pero ahora no siempre encontraremos un resultado, ya que la operación sólo será posible si el primer número es divisible por el segundo. Ejemplos: $6:(-3)=-2$ $(-6):(-3)=+2$ $5:(-3)=?$
- Operaciones combinadas: tanto en las operaciones con números naturales, como con números enteros, hay que respetar la jerarquía de las operaciones siguiendo este orden: paréntesis interiores, paréntesis exteriores, potencias o raíces, productos y cocientes y por último sumas y restas. Ejemplo:
$2-[2-5\cdot(8-3\cdot 4-3)]+4-3\cdot(5-2)=2-[2-5\cdot(8-12-3)]+4-3\cdot(5-2)=$
$2-[2-5\cdot(-7)]+4-3\cdot 3=2-[2+35]+4-9=2-2-35+4-9=-40$
- Potencias: dado un número entero a (base) y un número natural n (exponente), se define la potencia así: $\boxed{a^n=a\cdot a\cdot\ldots\ldots\cdot a}$ $(n-\text{veces})$. O sea, se multiplica la base por sí misma tantas veces como indica el exponente.
Ejemplos: $2^3=2\cdot 2\cdot 2=8$ $3^4=3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=81$
$(-5)^2=(-5)\cdot(-5)=+25$ $(-3)^3=(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)=-27$
Vemos que al elevar números positivos el resultado es positivo y al elevar un número negativo a exponente par el resultado también es positivo, pero al elevar un número negativo a exponente es impar, el resultado es negativo.
Las potencias tienen las siguientes propiedades:
- $a^0=1$ por convenio para validar la expresión: $(1=a^n:a^n=a^0)$
- $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$
- $a^n:a^m=a^{n-m}$
- $(a^n)^k=a^{nk}$
- $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$
- $(a:b)^n=a^n:b^n$
- Raíces: la raíz cuadrada de un número a, es otro número b que elevado al cuadrado resulta a: $\boxed{\sqrt{a}=b\Leftrightarrow b^2=a}$. Ejemplo: $\sqrt{16}=4$ porque $4^2=16$. También serviría $\sqrt{16}=-4$ porque $(-4)^2=16$. Luego todas las raíces cuadradas de números positivos tienen dos soluciones: $\sqrt{4}=\pm 2$, $\sqrt{9}=\pm 3$, $\sqrt{16}=\pm 4$, $\sqrt{25}=\pm 5\ldots$etc. Por el contrario, no existe la raíz cuadrada de los números negativos: $\sqrt{-4}=?$, $\sqrt{-9}=?\ldots$etc. Esto es así porque no hay ningún número que al elevarlo al cuadrado resulte negativo.
En general la raíz de índice cualquiera (n-ésima) de un número a, es otro número b que elevado a la potencia n resulta a: $\boxed{\sqrt[n]{a}=b\Leftrightarrow b^n=a}$. Ejemplo: $\sqrt[4]{16}=\pm 2$ porque $(\pm 2)^4=16$. También todas las raíces de índice par de números positivos tienen dos soluciones: $\sqrt{4}=\pm 2$, $\sqrt[4]{81}=\pm 3$, $\sqrt[4]{625}=\pm 5$, $\ldots$etc. Por el contrario, no existe la raíz de índice par de los números negativos: $\sqrt{-4}=?$, $\sqrt[4]{-81}=?\ldots$etc. Además, ahora existen todas las raíces de índice impar y siempre hay un único resultado $\sqrt[3]{8}=2$, $\sqrt[3]{-8}=-2$, $\sqrt[3]{27}=3$, $\sqrt[3]{-27}=-3$, $\sqrt[5]{32}=2$, $\sqrt[5]{-32}=-2$, $\sqrt[5]{243}=3$, $\sqrt[5]{-243}=-3$.