

Tema 5: Expresiones algebraicas.

5.1 Concepto de expresión algebraica.

- Una expresión algebraica es aquella en la que se opera aritméticamente con números y letras o incógnitas que están representado números cualesquiera. Ejemplos: $a^2 + b^2$, $x^2 + 3x$, $2x - 1 = 3$, $L = 2\pi r$, etc.

Hay cuatro tipos de expresiones algebraicas:

- Identidades, que son ciertas siempre independientemente del valor de las letras o incógnitas. Ejemplos: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $a(b + c) = ab + ac$
- Fórmulas, que dan una expresión cierta en un determinado contexto.

Ejemplo: Área = $\frac{b \cdot a}{2}$ expresa el área de un triángulo.

- Polinomios. Ejemplo: $P(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 4$. Se estudiarán ahora.
- Ecuaciones, que son expresiones ciertas sólo para algunos valores de la incógnita, que serán las soluciones. Ejemplo: $2x - 5 = x + 3$ (sol: $x=8$).

5.2 Monomios.

- Un monomio es una expresión algebraica de la forma ax^n . Siendo a un número real llamado coeficiente, x la incógnita y n un número natural que será el grado del monomio. Con los monomios se opera de forma natural teniendo en cuenta las propiedades de las potencias:
 - Sólo se pueden sumar o restar los monomios de igual grado sacando factor común. Ejemplo: $2x^3 + 5x^3 = (2 + 5)x^3 = 7x^3$
 - Para multiplicar dos monomios, se multiplican los coeficientes y se suman los exponentes. Ejemplo: $2x^3 \cdot 3x^4 = 2 \cdot 3x^{3+4} = 6x^7$
 - Para dividir dos monomios, se dividen los coeficientes y se restan los exponentes. Ejemplo: $\frac{5x^5}{3x^2} = \frac{5}{3}x^{5-2} = \frac{5}{3}x^3$

5.3 Polinomios.

- Un polinomio es una expresión algebraica formada por una suma o resta de monomios que normalmente escribiremos ordenados por su grado de mayor a menor. Ejemplo: $P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ es un polinomio de grado 3.
- Operaciones con polinomios:
 - Para sumar dos polinomios, se colocan ordenados en columnas de igual grado y se suman en cada columna los monomios.

$$\begin{array}{r}
 -5x^4 \quad +3x^3 \quad -2x^2 \quad +5x \quad -3 \\
 -2x^4 \quad -5x^3 \quad -5x^2 \quad +2x \quad +4 \\
 + \quad \hline
 -7x^4 \quad -2x^3 \quad -7x^2 \quad +7x \quad +1
 \end{array}$$

- Para restar dos polinomios, se colocan ordenados en columnas de igual grado y se cambia de signo el sustraendo, para a continuación sumar en cada columna igual que antes.

$$\begin{array}{r}
 -5x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \\
 - \quad -2x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 2x + 4 \\
 \hline
 -5x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \\
 + 2x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 2x - 4 \\
 \hline
 -3x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 3x - 7
 \end{array}$$

- Para multiplicar dos polinomios, se multiplica cada monomio del multiplicador por todos los monomios del multiplicando y se colocan los resultados ordenados en columnas de igual grado, para finalmente sumar en cada columna.

$$\begin{array}{r}
 \\
 + 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \\
 + 2x + 4 \\
 \hline
 + 12x^3 - 8x^2 + 20x - 12 \\
 + 6x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 6x \\
 \hline
 6x^4 + 8x^3 + 2x^2 + 14x - 12
 \end{array}$$

5.4 Productos notables.

- Cuadrado de una suma: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero, más el cuadrado del segundo más el doble producto del primero por el segundo.
 Ejemplo: $(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$
- Cuadrado de una diferencia: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero, más el cuadrado del segundo menos el doble producto del primero por el segundo.
 Ejemplo: $(x - 3)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$
- Suma por diferencia: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$
 Suma por diferencia es igual a la diferencia de los cuadrados.
 Ejemplo: $(x + 3)(x - 3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$