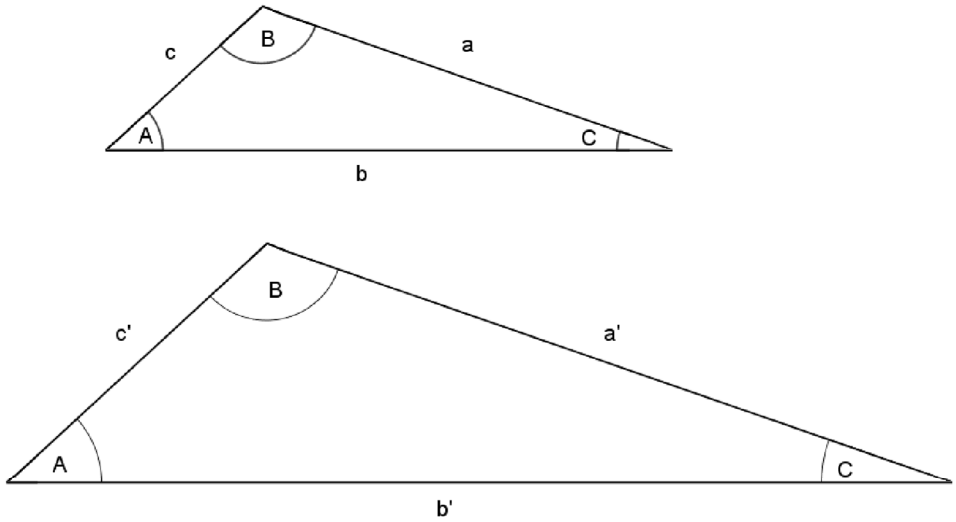
Tema 8: Semejanza.

8.1 Semejanza de triángulos.

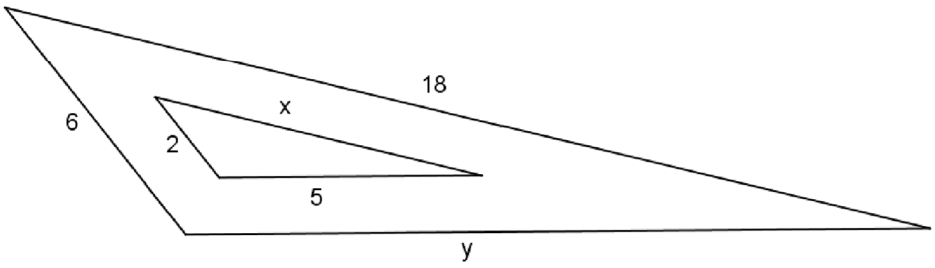
- Dos triángulos son semejantes si tienen la misma forma, es decir, tienen los mismos ángulos. Si dos triángulos son semejantes, entonces sus lados son proporcionales.



$$\boxed{\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=k}$$

A este número o fracción k se le llama constante o razón de proporcionalidad.

- Ejemplo: halla las medidas de los lados que faltan en la siguiente figura:

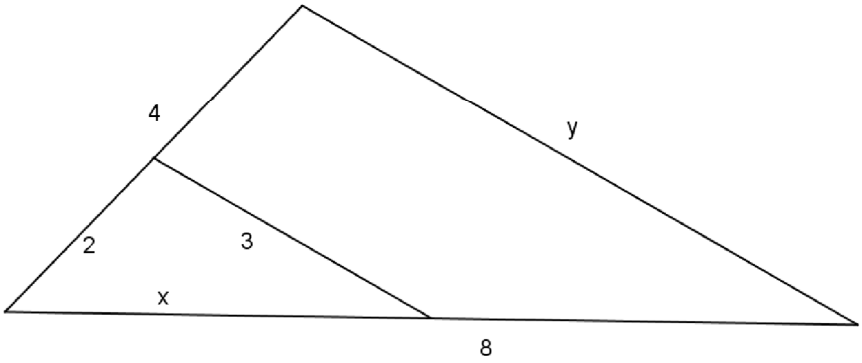


Los dos triángulos son semejantes porque tienen sus ángulos iguales ya que sus lados son paralelos.

$$\frac{6}{2}=\frac{18}{x}=\frac{y}{5}\Rightarrow\begin{cases}\frac{6}{2}=\frac{18}{x}\Rightarrow 6x=36\Rightarrow x=\frac{36}{6}\Rightarrow x=6\\ \\ \frac{6}{2}=\frac{y}{5}\Rightarrow 30=2y\Rightarrow\frac{30}{2}=y\Rightarrow y=15\end{cases}$$

La constante de proporcionalidad en este ejemplo es 3.

- Ejemplo: halla las medidas de los lados que faltan en la siguiente figura:

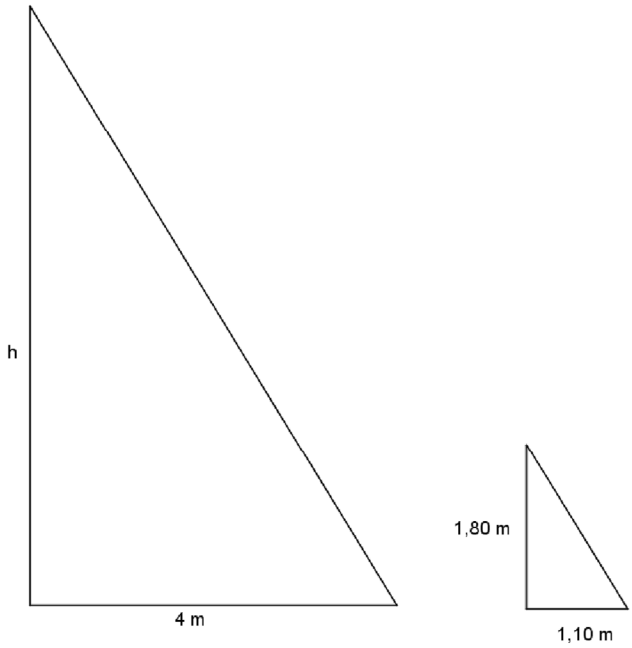


Los dos triángulos son semejantes por la construcción de la figura (ángulo común y lados paralelos).

$$\frac{4}{2}=\frac{y}{3}=\frac{8}{x}\Rightarrow\begin{cases}\frac{4}{2}=\frac{y}{3}\Rightarrow 12=2y\Rightarrow y=6\\ \\ \frac{4}{2}=\frac{8}{x}\Rightarrow 4x=16\Rightarrow x=4\end{cases}$$

La constante de proporcionalidad en este ejemplo es 2, los lados del triángulo grande son el doble que los lados del pequeño. Sin embargo las áreas no son el doble sino el cuádruple.

- Calcula la altura de una árbol sabiendo que en un determinado momento del día proyecta una sombra de 4 m y una persona que mide 1,80 m tiene, en ese mismo instante, una sombra de 1,10 m.

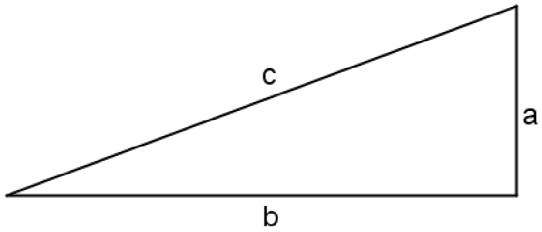


El árbol y la persona forman con su sombra un triángulo rectángulo y ambos triángulos rectángulos son semejantes porque los rayos del sol son paralelos y por tanto el ángulo de incidencia coincide.

$$\frac{h}{1{,}80}=\frac{4}{1{,}10}\Rightarrow 1{,}10\bullet h=1{,}80\bullet 4\Rightarrow h=\frac{1{,}80\bullet 4}{1{,}10}=6{,}55\text{ m.}$$

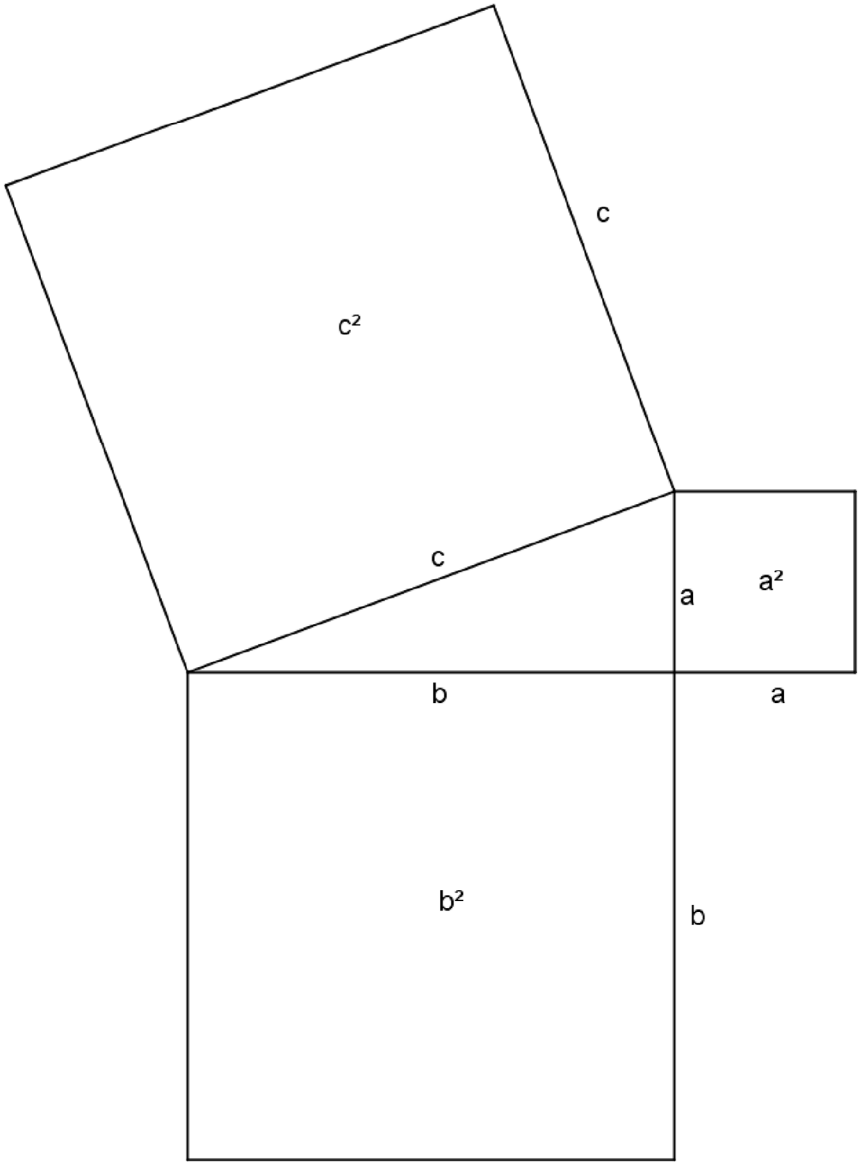
8.2 Semejanza de triángulos rectángulos.

- Repasemos en primer lugar el teorema de Pitágoras, que afirma que en un triángulo rectángulo la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

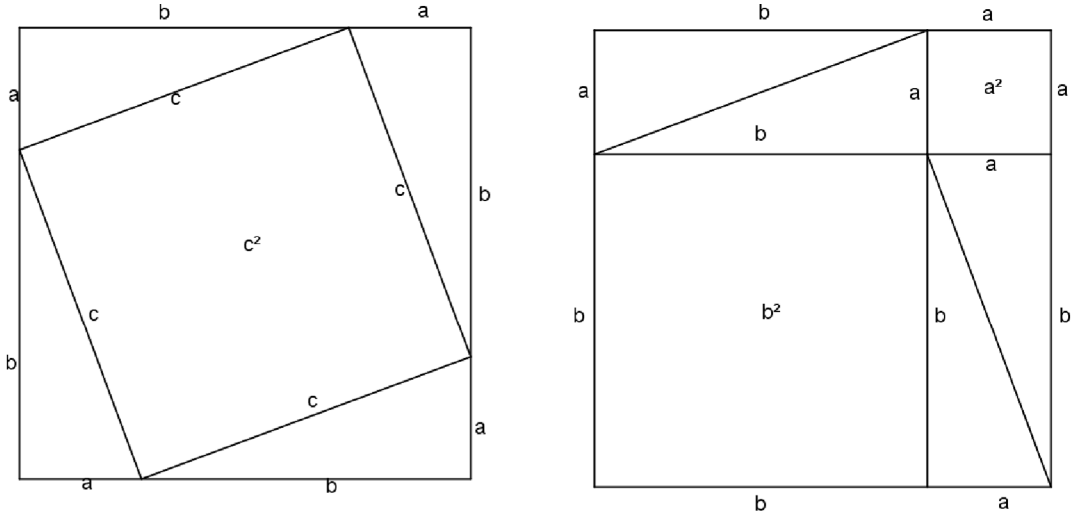


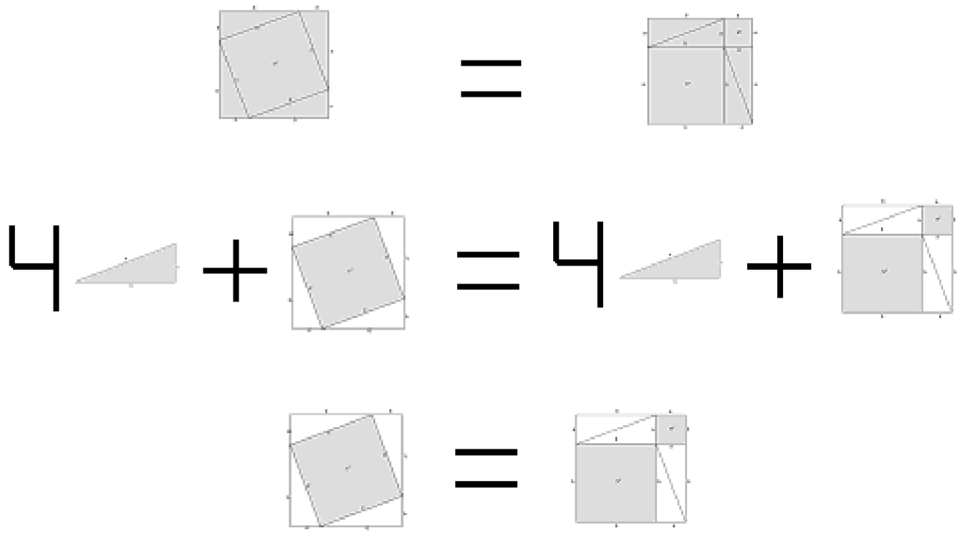
$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

- El enunciado de este teorema significa geométricamente que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa coincide con las suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos:

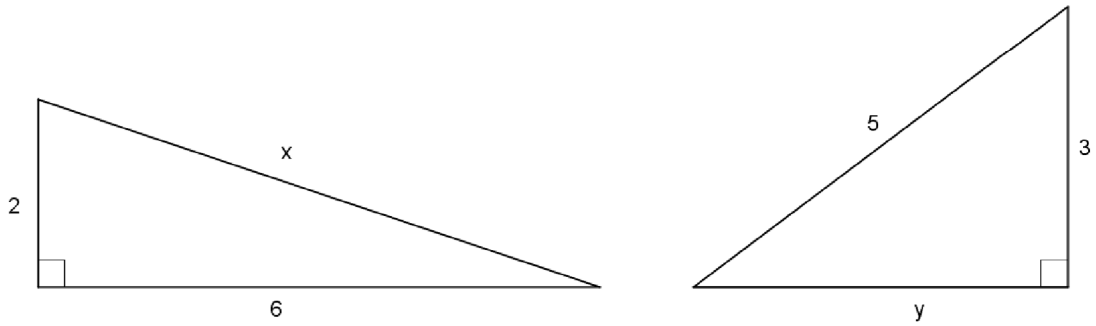


- Podemos demostrar el teorema de Pitágoras a partir de los siguientes dibujos:





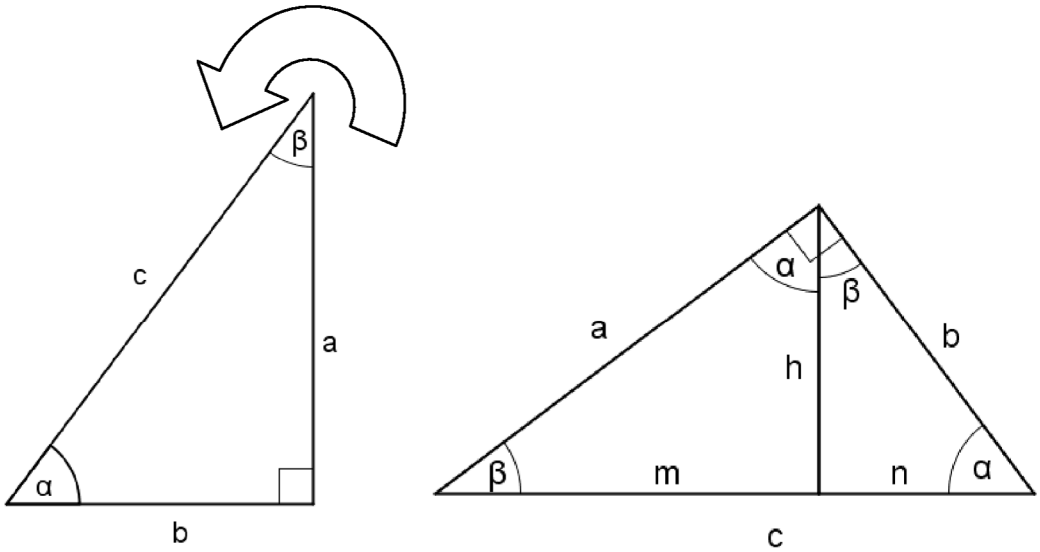
Ejemplo: hallar los lados que faltan en los siguientes triángulos:



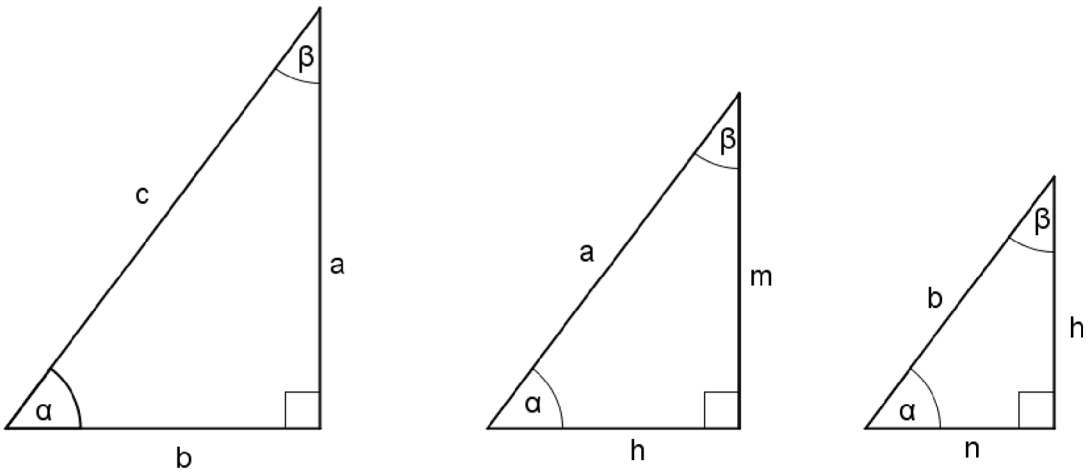
$$x^2 = 2^2 + 6^2 \Rightarrow x^2 = 4 + 36 \Rightarrow x^2 = 40 \Rightarrow x = \sqrt{40} \Rightarrow x = 6{,}325$$

$$5^2 = 3^2 + y^2 \Rightarrow 25 = 9 + y^2 \Rightarrow 25 - 9 = y^2 \Rightarrow 16 = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{16} \Rightarrow y = 4$$

- En los triángulos rectángulos se produce una semejanza especial al girar el triángulo y asentarlo sobre la hipotenusa para entonces trazar su nueva altura.



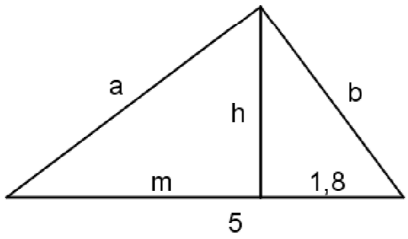
Surgen entonces de forma natural tres triángulos rectángulos semejantes: el grande inicial, el mediano de la izquierda y el pequeño de la derecha.



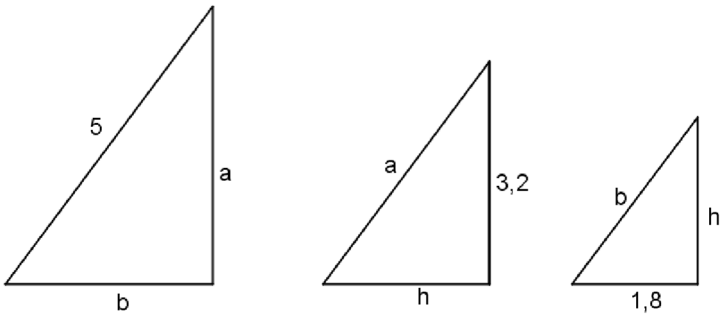
- Semejanza entre grande y mediano: $\frac{c}{a}=\frac{a}{m}=\frac{b}{h}\Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{a}{m}\Rightarrow c\cdot m=a^2$.
- Semejanza entre grande y pequeño: $\frac{c}{b}=\frac{a}{h}=\frac{b}{n}\Rightarrow\frac{c}{b}=\frac{b}{n}\Rightarrow c\cdot n=b^2$.
- Semejanza entre mediano y pequeño: $\frac{a}{b}=\frac{m}{h}=\frac{h}{n}\Rightarrow\frac{m}{h}=\frac{h}{n}\Rightarrow mn=h^2$.

Las dos primeras igualdades se conocen conjuntamente con el nombre del teorema del cateto y la tercera igualdad se llama teorema de la altura.
A partir de estas igualdades o teoremas, también se puede demostrar fácilmente el teorema de Pitágoras: $a^2+b^2=c\cdot m+c\cdot n=c(m+n)=c\cdot c=c^2$

Ejemplo: hallar las medidas que faltan en la siguiente figura:



Colocamos los tres triángulos en la misma posición y hallamos m= 3,2.



Tenemos ahora tres posibilidades para empezar los cálculos:

$\frac{5}{a}=\frac{a}{3,2}=\frac{b}{h}$ de donde podemos obtener a. O bien $\frac{5}{b}=\frac{a}{h}=\frac{b}{1,8}$ y hallar b.

Y también: $\frac{a}{b}=\frac{3,2}{h}=\frac{h}{1,8}$ y calcularíamos el valor de h.

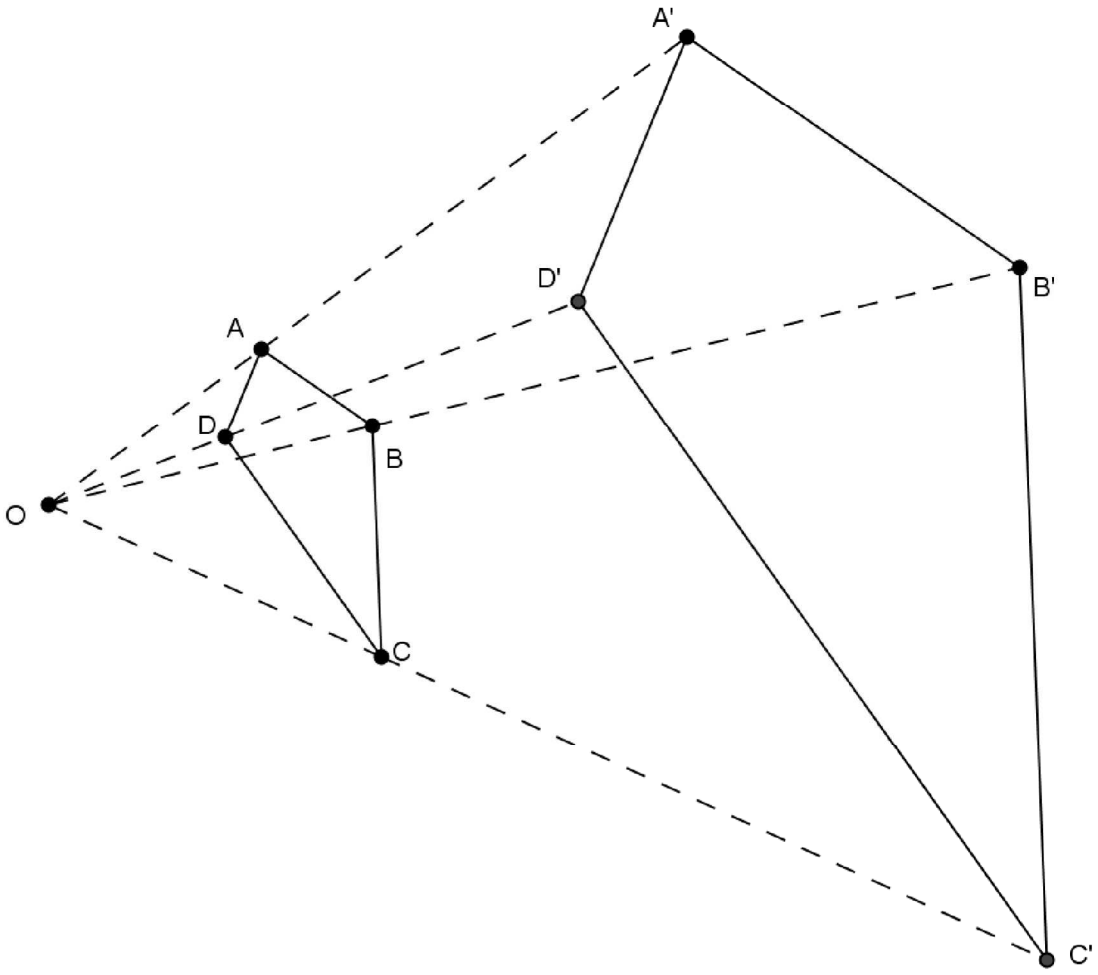
$$\frac{5}{a}=\frac{a}{3,2}=\frac{b}{h}\Rightarrow\frac{5}{a}=\frac{a}{3,2}\Rightarrow 16=a^2\Rightarrow a=\sqrt{16}=4.$$

$$\frac{5}{4}=\frac{4}{3,2}=\frac{b}{2,4}\Rightarrow\frac{5}{4}=\frac{b}{2,4}\Rightarrow 12=4b\Rightarrow b=\frac{12}{4}=3.$$

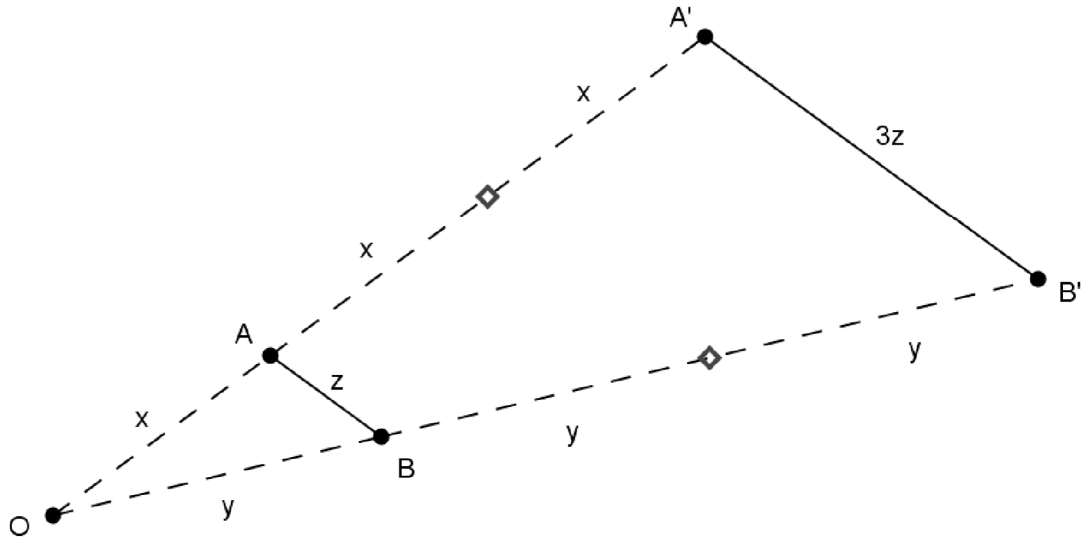
$$\frac{a}{b}=\frac{3,2}{h}=\frac{h}{1,8}\Rightarrow\frac{4}{3}=\frac{3,2}{h}\Rightarrow 4h=9,6\Rightarrow h=\frac{9,6}{4}=2,4.$$

8.3 Figuras semejantes. Construcción.

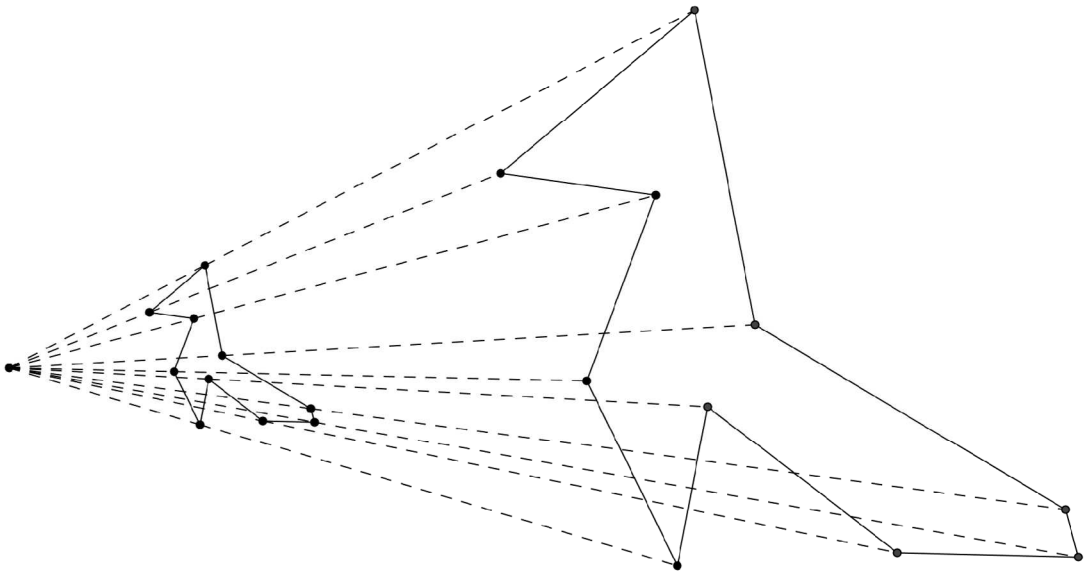
- Igual que con los triángulos, de forma general dos figuras son semejantes si tienen la misma forma, es decir, los mismos ángulos. Aunque hay alguna excepción como por ejemplo los rectángulos.
  Para pasar de una figura a otra semejante, fijamos un punto cualquiera O y trazamos los segmentos que unen dicho punto con cada vértice de la figura inicial. Los nuevos vértices se obtienen multiplicando las medidas de los segmentos anteriores por una razón de proporcionalidad prefijada.
  En el siguiente ejemplo vemos como se consigue una figura en la que sus lados son el triple de los lados iniciales:



¿Y porqué funciona este proceso? Pues muy sencillo: para cada pareja de puntos A y B, el segmento $\overline{AB}$ se convierte en el segmento $\overline{A'B'}$ con longitud triple porque en el proceso se han construido dos triángulos semejantes de vértice O común y con razón de semejanza 3.

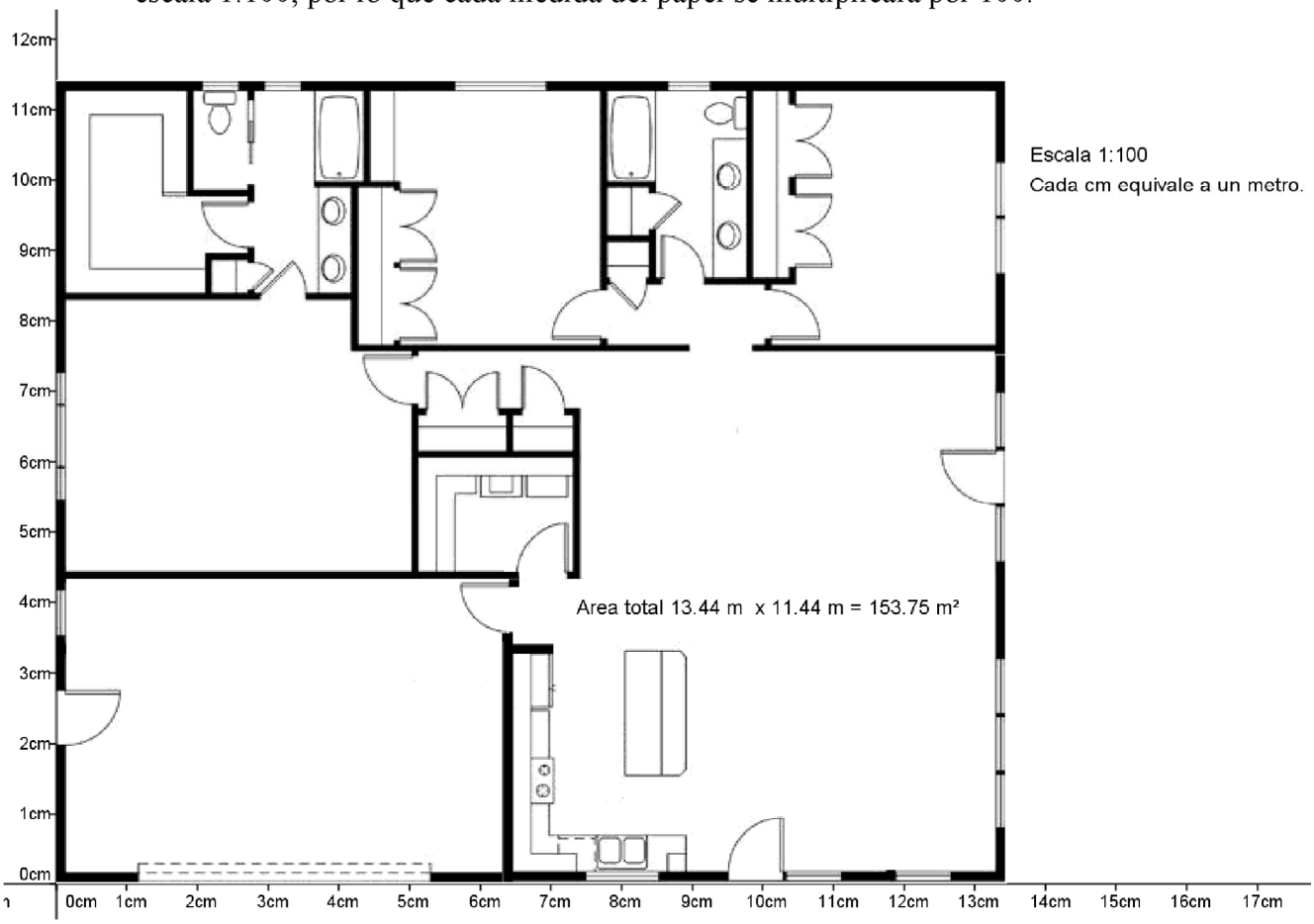


- Veamos otro ejemplo con una razón de proporcionalidad de 3,5:

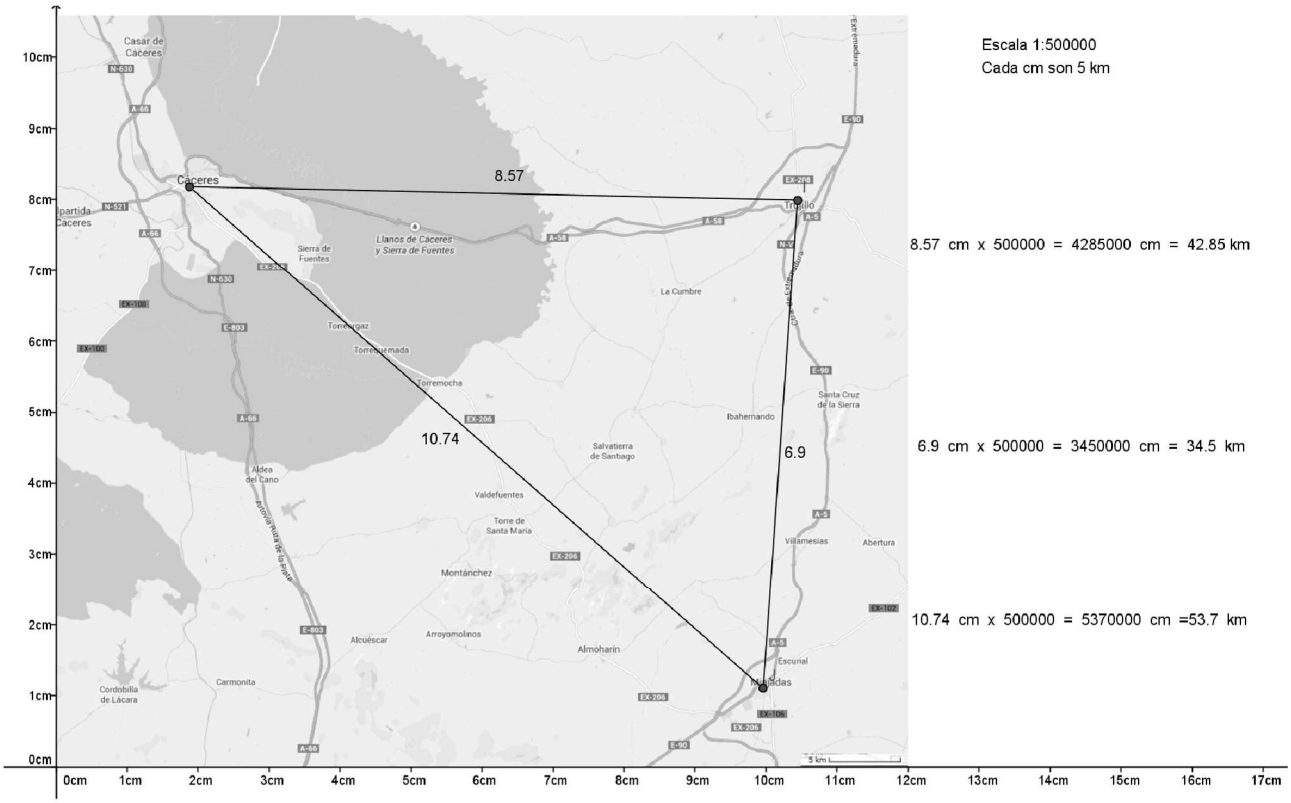


8.4 Planos y mapas. Escala.

- Una figuras semejantes muy útiles son los planos y mapas, que sirven para representar la realidad sobre el papel. La escala utilizada es la razón de semejanza, por ejemplo la escala 1:10 significa que cada cm del papel equivale a 10 cm de la realidad. En el siguiente plano tenemos una vivienda a escala 1:100, por lo que cada medida del papel se multiplicará por 100.

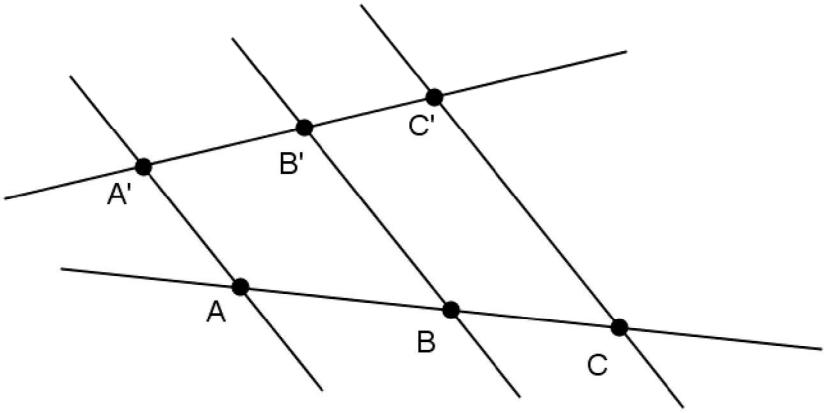


En el siguiente ejemplo, tenemos un mapa a escala 1:500000, y podemos calcular las distancias en línea recta entre tres ciudades, para ello medimos sobre el plano y multiplicamos por 500000.
1 cm→500000 cm=5000 m=5 km.



8.5 Teorema de Tales.

- Si dos rectas cualesquiera se cortan por rectas paralelas, los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra.

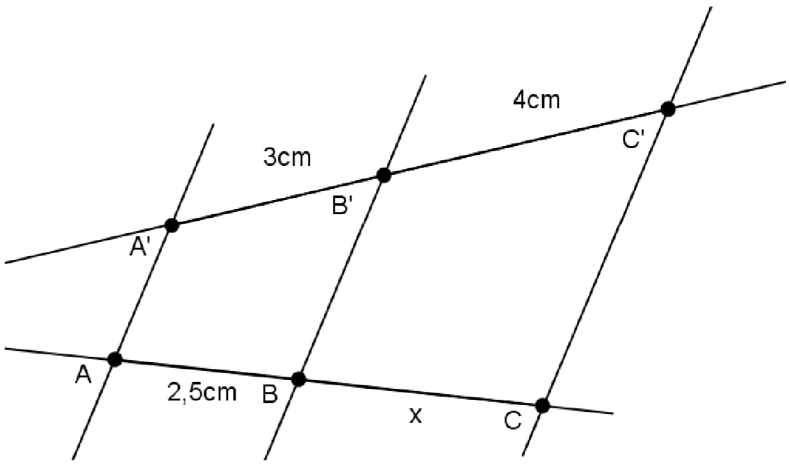


$$\boxed{\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}}$$

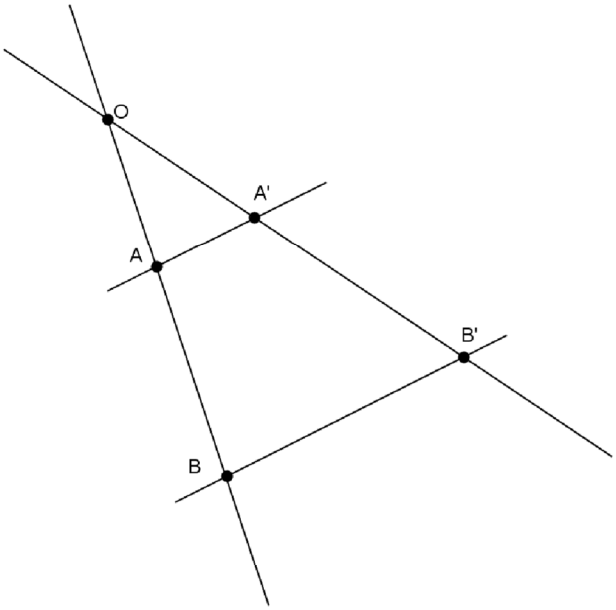
Ejemplo: calcular el valor de x en la siguiente figura:

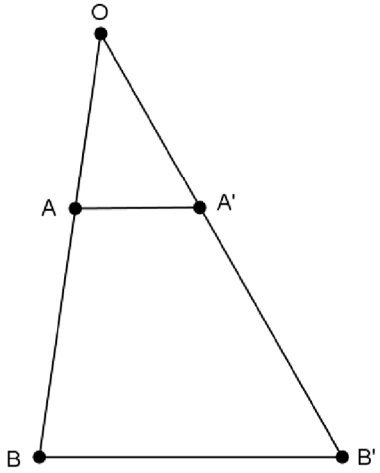
$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{3}{2,5} = \frac{4}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$$

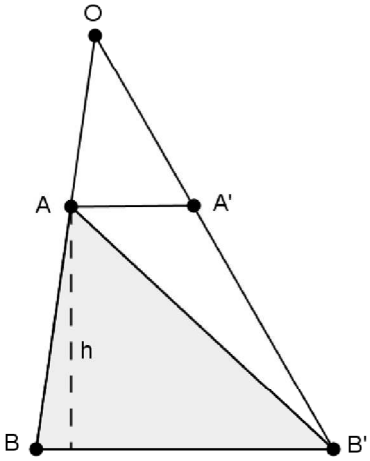


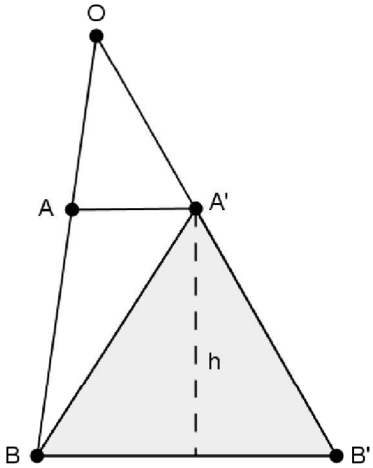
- Veamos por curiosidad la demostración de este importante teorema. Debe tenerse en cuenta que no puede utilizarse en el razonamiento la semejanza de triángulos, porque históricamente el teorema de Tales fue anterior.



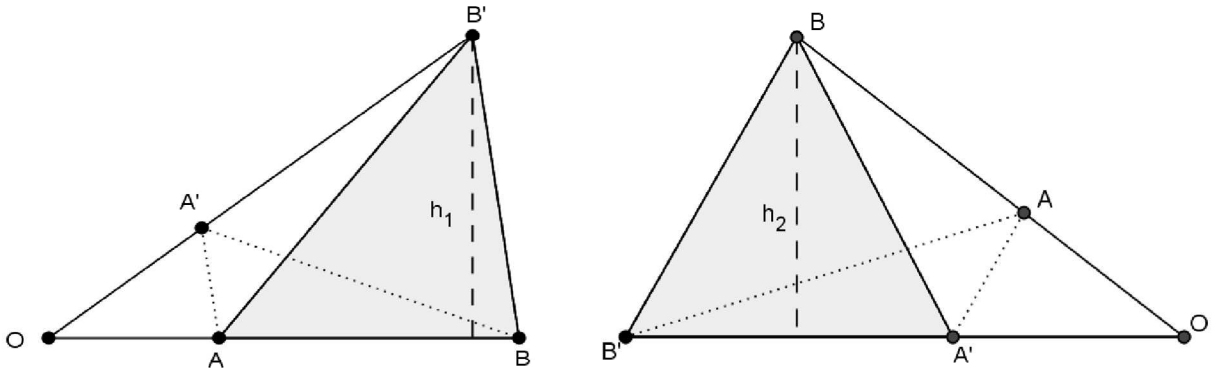


Esta figura se conoce con el nombre de triángulos en posición de Tales. Además se ha girado hasta tener las rectas paralelas en la horizontal. Observamos entonces que los triángulos $A'B'B$ y ABB' tienen igual área porque tienen la misma base y también la misma altura. De la misma forma, también tendrán el mismo área los triángulos $OA'B$ y OAB'.





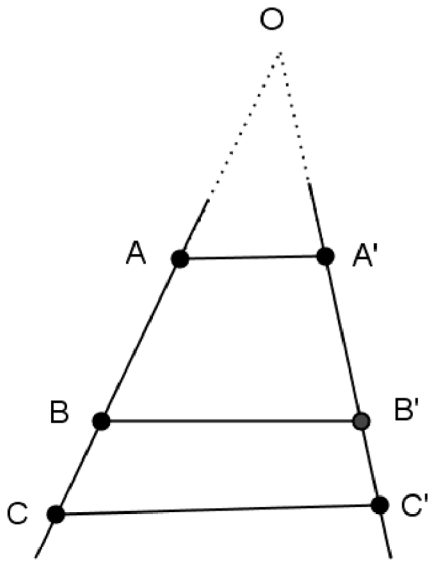
Si ahora colocamos el triángulo asentado en las otras dos posiciones posibles:



$$\text{Área}\Delta(AB'B) = \text{Área}\Delta(A'BB') \Rightarrow \frac{\overline{AB}\cdot h_1}{2} = \frac{\overline{A'B'}\cdot h_2}{2}$$

$$\text{Área}\Delta(OB'A) = \text{Área}\Delta(OBA') \Rightarrow \frac{\overline{OA}\cdot h_1}{2} = \frac{\overline{OA'}\cdot h_2}{2} \text{ (las alturas son exteriores)}$$

Dividiendo entre sí las igualdades anteriores, tenemos: $\boxed{\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OA'}}}$.



Ahora podemos demostrar el caso general porque siempre es posible prolongar las rectas secantes hasta que tengan un origen común y aplicar lo demostrado para triángulos en posición de Tales.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{OA'}} \\ \\ \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OA'}} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{(dividiendo)} \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}$$

$$\frac{\overline{AB}+\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}+\overline{B'C'}}{\overline{A'B'}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'B'}} + \frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'B'}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = 1 + \frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'B'}} \Rightarrow \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'B'}} \Rightarrow \boxed{\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}}$$