Tema 9: Áreas y volúmenes.

9.1 Áreas de figuras planas.

- Las figuras planas se dividen en polígonos y figuras curvilíneas.
  - Un polígono es una figura plana cerrada limitada por líneas rectas (segmentos). Los polígonos se clasifican en polígonos regulares, que tienen todos sus lados iguales, y polígonos irregulares.
  - Una figura plana curvilínea está limitada por segmentos y también por alguna línea curva.

  Seguiremos el siguiente esquema:

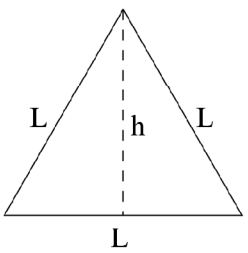
- Figuras Planas
  - Polígonos
    - Regulares
      - Triángulo equilátero
      - Cuadrado
      - Pentágono regular
      - Hexágono regular
      - Etc
    - Irregulares
      - Triángulo
      - Cuadrilátero
        - Paralelogramo
        - Trapecio
        - Cuadrilátero irregular
      - Etc
  - Figuras curvilíneas
    - Círculo
    - Corona circular
    - Sector circular
    - Trapecio circular
    - Segmento circular

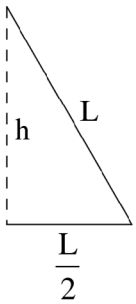
9.2 Polígonos regulares.

- El triángulo equilatero es el primer polígono regular con tres lados iguales. La altura puede obtenerse utilizando el teorema de Pitágoras:

$$L^2 = h^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow L^2 = h^2 + \frac{L^2}{4} \Rightarrow 4L^2 = 4h^2 + L^2 \Rightarrow 3L^2 = 4h^2 \Rightarrow$$

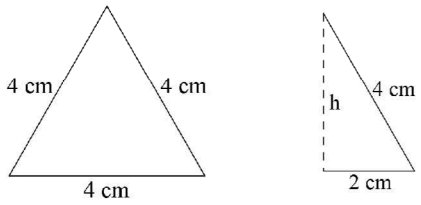
$$\Rightarrow \frac{3}{4}L^2 = h^2 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3}{4}L^2} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}L.$$





$$\boxed{\text{Área} = \frac{\text{base x altura}}{2} = \frac{L\frac{\sqrt{3}}{2}L}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}L^2}$$

Ejemplo: hallar el área del triángulo equilatero de lado 4 cm.

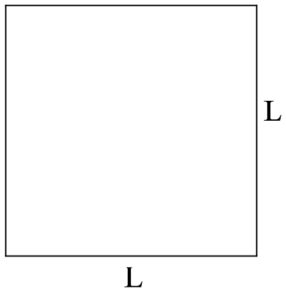


$$4^2 = h^2 + 2^2 \Rightarrow 16 = h^2 + 4 \Rightarrow 12 = h^2 \Rightarrow h = \sqrt{12}$$

$$\text{Área} = \frac{\text{base x altura}}{2} = \frac{4\sqrt{12}}{2} = 6{,}928 \text{ cm}^2.$$

Utilizando directamente la fórmula: $\text{Área} = \frac{\sqrt{3}}{4}L^2 = \frac{16\sqrt{3}}{4} = 6{,}928 \text{ cm}^2.$

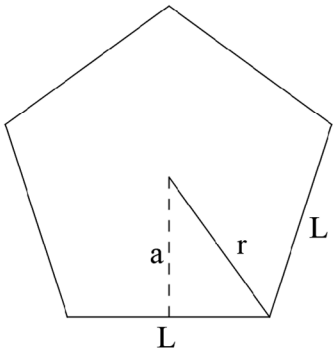
- El cuadrado tiene cuatro lados iguales y cuatro ángulos iguales de 90º.



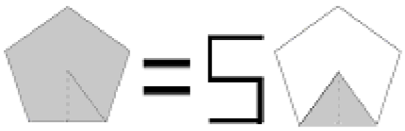
El área del cuadrado es: $\boxed{\text{Área} = (\text{lado})^2 = L^2}$

Ejemplo: el área del cuadrado de lado 4 cm vale 16 cm^2.

- El pentágono regular tiene cinco lados iguales.



El área del pentágono es: $\boxed{\text{Área} = \frac{\text{perímetro x apotema}}{2} = \frac{p \cdot a}{2}}$

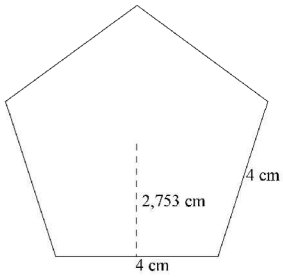


$$\left(\text{Área} = 5\frac{\text{base x altura}}{2} = 5\frac{L \cdot a}{2} = \frac{5L \cdot a}{2} = \frac{p \cdot a}{2}\right)$$

Cuando no se conoce la apotema, se puede utilizar la siguiente fórmula:

$$\boxed{\text{Área} = \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{4}L^2}.$$

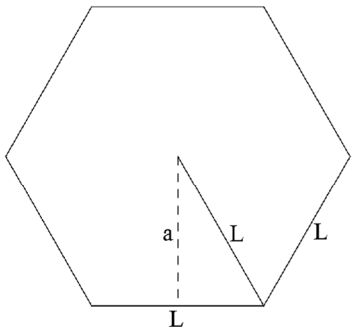
Ejemplo: halla el área del pentágono regular de lado 4 cm y apotema 2,753 cm.



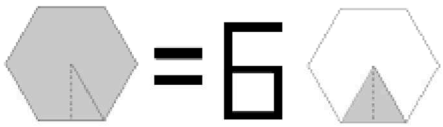
$$\text{Área} = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{20 \cdot 2{,}753}{2} = 27{,}53 \text{ cm}^2.$$

Si no hubiésemos conocido el valor de la apotema, entonces habría que utilizar la fórmula: $\text{Área} = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} L^2 = 1{,}7205 \cdot 16 = 27{,}53 \text{ cm}^2.$

- El hexágono regular tiene seis lados iguales.



El área del hexágono es: $\boxed{\text{Área} = \frac{\text{perímetro x apotema}}{2} = \frac{p \cdot a}{2}}$

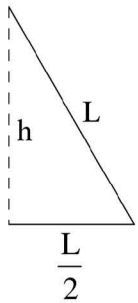


$$\left(\text{Área} = 6\frac{\text{base x altura}}{2} = 6\frac{L \cdot a}{2} = \frac{6L \cdot a}{2} = \frac{p \cdot a}{2}\right)$$

Si no se conoce la apotema, se calcula utilizando el teorema de Pitágoras:

$$L^2 = a^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow L^2 = a^2 + \frac{L^2}{4} \Rightarrow 4L^2 = 4a^2 + L^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3L^2 = 4a^2 \Rightarrow \frac{3}{4}L^2 = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{3}{4}L^2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2}L.$$

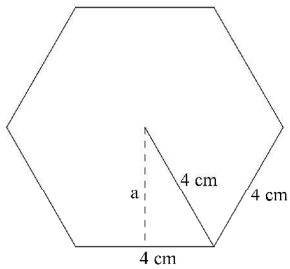


$$\text{Área} = \frac{\text{perímetro x apotema}}{2} = \frac{6L\frac{\sqrt{3}}{2}L}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}L^2.$$

Ejemplo: hallar el área del hexágono regular de lado 4 cm.
Como no conocemos la apotema, hay que calcularla en primer lugar: $4^2 = a^2 + 2^2 \Rightarrow 16 = a^2 + 4 \Rightarrow 12 = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{12}$.

$$\text{Área} = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{24 \cdot \sqrt{12}}{2} = 41{,}569 \text{ cm}^2.$$

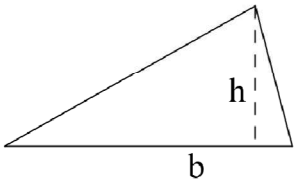
Directamente, sería: $\text{Área} = \frac{3\sqrt{3}}{2}L^2 = 2{,}598 \cdot 16 = 41{,}569 \text{ cm}^2.$



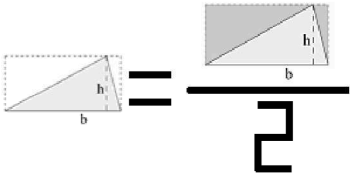
9.3 Polígonos irregulares.

- Son todos los demás polígonos en los que hay algún lado diferente:
  - Triángulos isósceles o escalenos.
  - Paralelogramos: rectángulo, rombo y romboide.
  - Trapecio.
  - Trapezoide.
  - Polígonos irregulares de más de cuatro lados.

- Triángulos isósceles o escalenos.

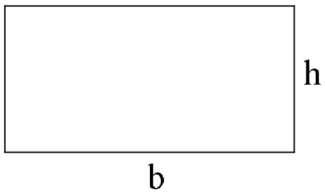


$$\text{Área} = \frac{\text{base x altura}}{2} = \frac{b \bullet h}{2}.$$



Ejemplo: Si la base es 4 cm y la altura 3 cm, $\text{Área} = \frac{4 \bullet 3}{2} = 6\ \text{cm}^2$.

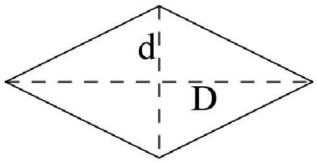
- Paralelogramos. Son cuadrilateros con lados paralelos dos a dos. Pueden ser:
  - Cuadrado (ya estudiado en los polígonos regulares).
  - Rectángulo. Cuatro lados, paralelos dos a dos, y los ángulos de 90º.



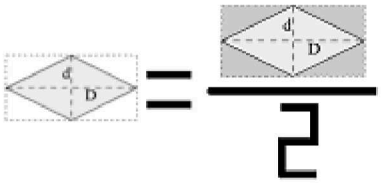
$$\text{Área} = \text{base x altura} = b \bullet h$$

Ejemplo: Si la base mide 4 cm y la altura 3 cm, $\text{Área} = 4 \bullet 3 = 12\ \text{cm}^2$.

  - Rombo. Cuatro lados iguales paralelos dos a dos, pero los ángulos no son iguales.

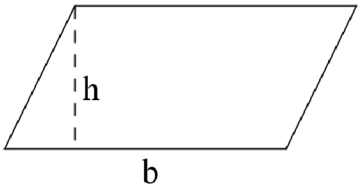


$$\text{Área} = \frac{\text{Diagonal x diagonal}}{2} = \frac{D \bullet d}{2}$$

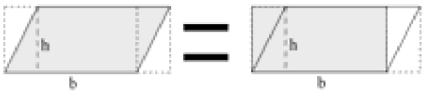


Ejemplo: Si las diagonales miden 8 cm y 6 cm, $\text{Área} = \frac{8 \bullet 6}{2} = 24\ \text{cm}^2$.

  - Romboide. Lados paralelos dos a dos.

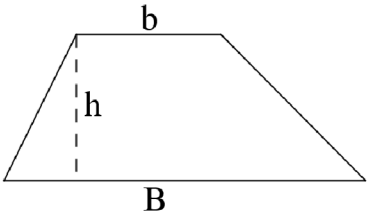


$$\text{Área} = \text{base x altura} = b \bullet h$$

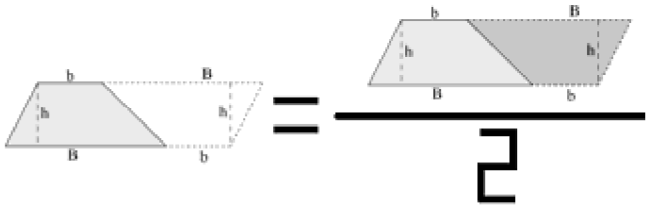


Ejemplo: Si la base es 4 cm y la altura 3 cm, $\text{Área} = 4 \bullet 3 = 12\ \text{cm}^2$.

- Trapecio. Es un cuadrilatero con dos lados paralelos.

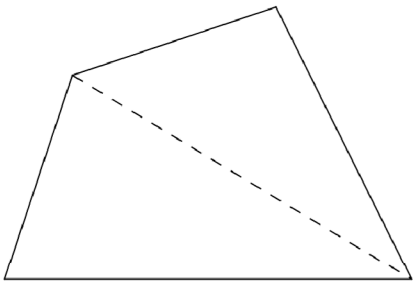


$$\text{Área} = \frac{(\text{Base} + \text{base})\ \text{x altura}}{2} = \frac{(B + b) \bullet h}{2}$$



Ejemplo: Si las bases miden 8 cm y 6 cm, y la altura 3 cm, entonces:
$\text{Área} = \dfrac{(8+6)\bullet 3}{2} = 21\ \text{cm}^2$.

- Trapezoide. Es un cuadrilátero genérico sin lados paralelos.

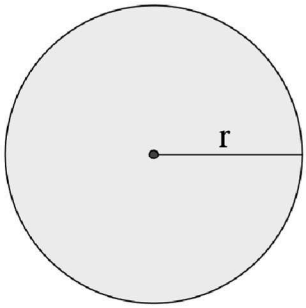


No hay una fórmula general para hallar el área de estos cuadriláteros. La mejor opción consiste en dividir el área en dos triángulos.

9.4 Figuras curvilíneas.

- Las figuras curvilíneas o circulares más importantes son:
  - Círculo.
  - Corona circular.
  - Sector circular.
  - Trapecio circular.
  - Segmento circular.

- Círculo.

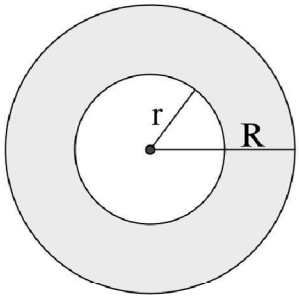


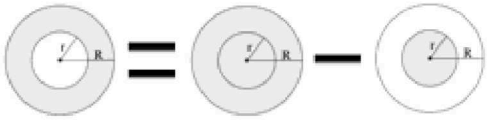
La longitud de la circunferencia es: $\boxed{\text{Longitud} = 2\pi \bullet r}$

El área del círculo es: $\boxed{\text{Área} = \pi \bullet r^2}$

Ejemplo: Si el radio es 4 cm:
$\text{Longitud} = 2\pi \bullet 4 = 25{,}13\ \text{cm}$. $\text{Área} = \pi \bullet 16 = 50{,}27\ \text{cm}^2$.

- Corona circular.



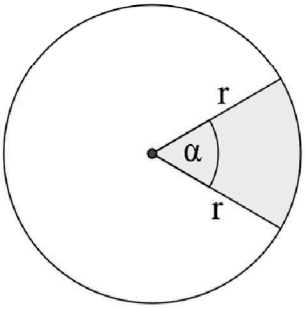


$\text{Área} = \pi \bullet R^2 - \pi \bullet r^2$

$\boxed{\text{Área} = \pi\left(R^2 - r^2\right)}$

Ejemplo: Si los radios son 4 cm y 2 cm respectivamente, entonces:
$\text{Área} = \pi\,(16-4) = 37{,}7\ \text{cm}^2$.

- Sector circular.



Ángulo y área son magnitudes directamente proporcionales, a mayor ángulo, mayor área.

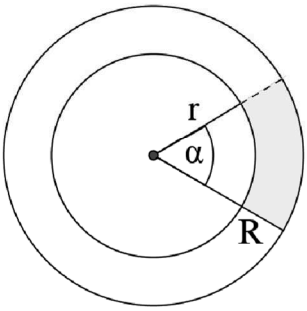
$$360° \longrightarrow \pi \cdot r^2$$

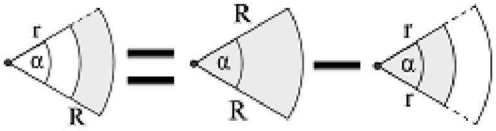
$$\alpha° \longrightarrow \text{Área} \Rightarrow \boxed{\text{Área} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha°}{360°}}$$

Ejemplo: Para un radio de 4 cm y un ángulo de 60º:

$$\text{Área} = \frac{\pi \cdot 16 \cdot 60°}{360°} = 8{,}38 \text{ cm}^2.$$

- Trapecio circular.





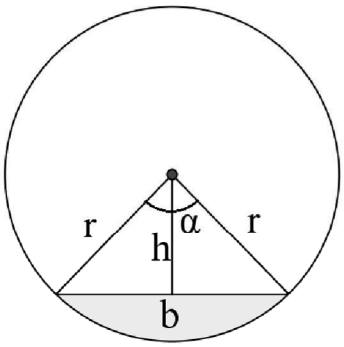
$$\text{Área} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \alpha°}{360°} - \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha°}{360°}$$

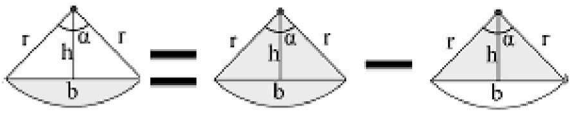
$$\boxed{\text{Área} = \frac{\pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot \alpha°}{360°}}$$

Ejemplo: Si los radios miden 4 cm y 2 cm y el ángulo es de 60º:

$$\text{Área} = \frac{\pi \cdot (16 - 4) \cdot 60°}{360°} = 6{,}28 \text{ cm}^2.$$

- Segmento circular.





$$\boxed{\text{Área} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha°}{360°} - \frac{b \cdot h}{2}}$$

Ejemplo: Si el radio mide 4 cm, el ángulo 60º, la base 3 cm y la altura 2 cm:

$$\text{Área} = \frac{\pi \cdot 16 \cdot 60°}{360°} - \frac{3 \cdot 2}{2} = 5{,}38 \text{ cm}^2.$$

9.5 Volumen de cuerpos geométricos.

- Los cuerpos geométricos en el espacio se dividen en dos grupos: poliedros y cuerpos de revolución.

- Un poliedro es un cuerpo geométrico limitado por polígonos. Los poliedros regulares están formados por polígonos regulares iguales y en cada vértice confluyen el mismo número de caras. Los poliedros irregulares más importantes son los prismas y las pirámides.
- Un cuerpo de revolución o cuerpo redondo tiene, al menos, una cara curva. Se genera al girar una línea llamada generatriz alrededor de un eje.

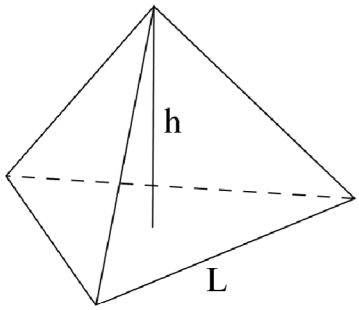
Seguiremos el siguiente esquema:

- Cuerpos geométricos
  - Poliedros
    - Regulares
      - Tetraedro
      - Cubo
      - Octaedro
      - Dodecaedro
      - Icosaedro
    - Irregulares
      - Prisma
      - Pirámide
      - Tronco de pirámide
  - Cuerpos de revolución
    - Esfera
    - Cilindro
    - Cono
    - Tronco de cono

9.6 Poliedros regulares.

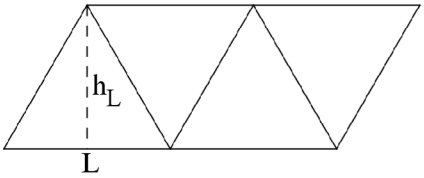
- Los poliedros regulares o sólidos platónicos son:
  - Tetraedro, formado por cuatro triángulo equiláteros.
  - Cubo o hexaedro, formado por seis cuadrados.
  - Octaedro, formado por ocho triángulos equiláteros.
  - Dodecaedro, formado por doce pentágonos regulares.
  - Icosaedro, formado por veinte triángulos equiláteros.

- Tetraedro.



$$\text{Volumen} = \frac{\text{área base x altura}}{3} = \frac{\frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot h}{3}$$

$$\boxed{\text{Volumen} = \frac{\sqrt{3}}{12} L^2 \cdot h = \frac{\sqrt{2}}{12} L^3}$$



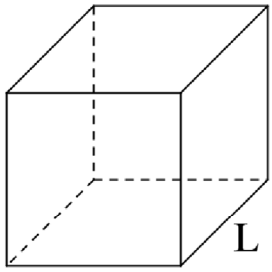
$$\text{Área} = 4\frac{\text{base x altura lateral}}{2} = 4\frac{L \cdot h_L}{2} = 4\frac{L \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} L}{2}$$

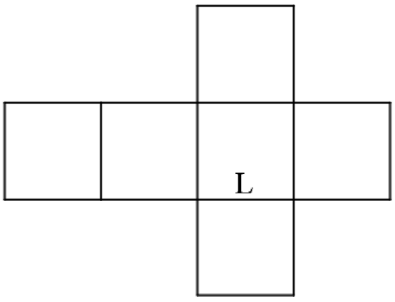
$$\boxed{\text{Área} = \sqrt{3}\, L^2}$$

Ejemplo: hallar el área y el volumen del tetraedro regular de lado 4 cm.

$\text{Área} = \sqrt{3} \bullet 16 = 27{,}71 \text{ cm}^2$. $\text{Volumen} = \dfrac{\sqrt{2} \bullet 64}{12} = 7{,}54 \text{ cm}^3$.

- Cubo.



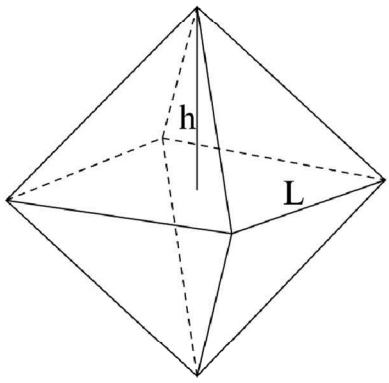


$\boxed{\text{Volumen} = L^3}$ $\boxed{\text{Área} = 6\,L^2}$

Ejemplo: hallar el área y el volumen del cubo de lado 4 cm.

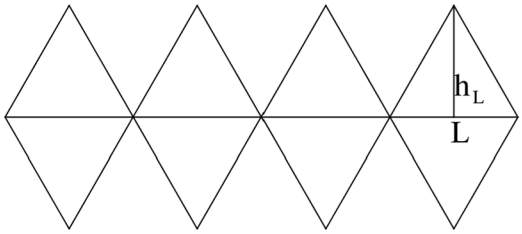
$\text{Área} = 6 \bullet 16 = 96 \text{ cm}^2$. $\text{Volumen} = 64 \text{ cm}^3$.

- Octaedro.



$$\text{Volumen} = 2\frac{\text{área base x altura}}{3} = 2\frac{L^2 \bullet h}{3}$$

$$\boxed{\text{Volumen} = \frac{2}{3}L^2 \bullet h = \frac{\sqrt{2}}{3}L^3}$$



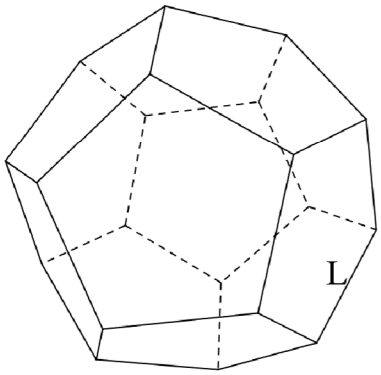
$$\text{Área} = 8\frac{\text{base x altura lateral}}{2} = 4L \bullet h_L = 4L \bullet \frac{\sqrt{3}}{2}L$$

$$\boxed{\text{Área} = 2\sqrt{3}\,L^2}$$

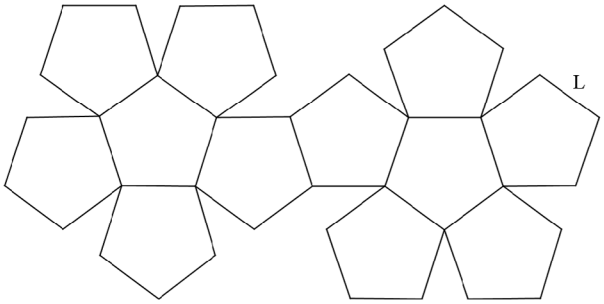
Ejemplo: hallar el área y el volumen del octaedro regular de lado 4 cm.

$\text{Área} = 2\sqrt{3} \bullet 16 = 55{,}43 \text{ cm}^2$. $\text{Volumen} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}64 = 30{,}17 \text{ cm}^3$.

- Dodecaedro.



$$\boxed{\text{Volumen} = \frac{1}{4}\left(15 + 7\sqrt{5}\right) \bullet L^3}$$



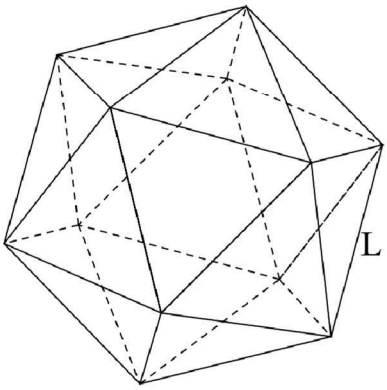
$$\boxed{\text{Área} = 3\sqrt{25+10\sqrt{5}} \cdot L^2}$$

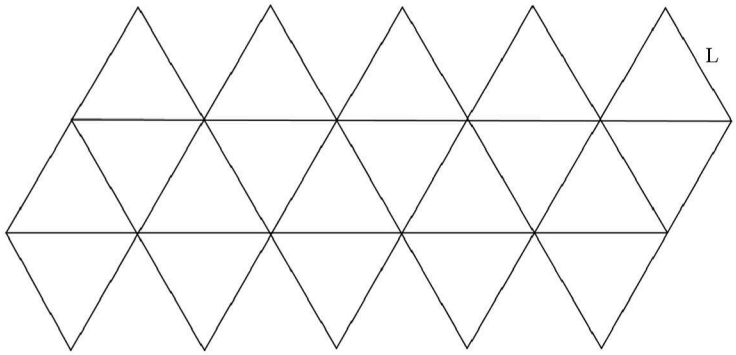
Ejemplo: hallar el área y el volumen del dodecaedro regular de lado 4 cm.

$\text{Área} = 3\sqrt{25+10\sqrt{5}} \cdot 16 = 330{,}33 \text{ cm}^2$.

$\text{Volumen} = \frac{1}{4}\left(15+7\sqrt{5}\right) \cdot 64 = 490{,}44 \text{ cm}^3$.

- Icosaedro





$$\boxed{\text{Volumen} = \frac{5}{12}\left(3+\sqrt{5}\right) \cdot L^3}$$

$$\boxed{\text{Área} = 5\sqrt{3} \cdot L^2}$$

Ejemplo: hallar el área y el volumen del icosaedro regular de lado 4 cm.

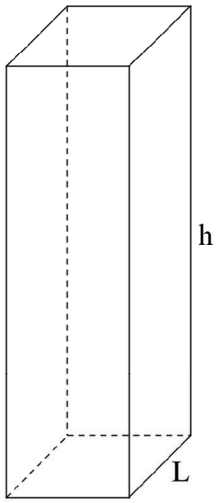
$\text{Área} = 5\sqrt{3} \cdot 16 = 138{,}56 \text{ cm}^2$.

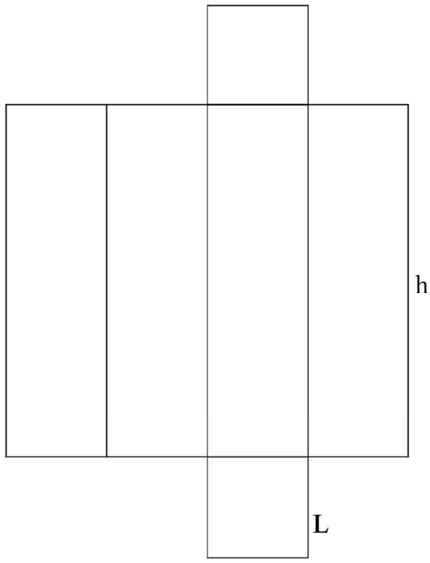
$\text{Volumen} = \frac{5}{12}\left(3+\sqrt{5}\right) \cdot 64 = 139{,}63 \text{ cm}^3$.

9.7 Prismas.

- Un prisma es un poliedro delimitado por dos bases paralelas que son dos polígonos iguales y las caras laterales son paralelogramos que unen las bases.
  - El prisma es regular o irregular según lo sea o no el polígono de las bases.
  - Si las caras laterales son rectángulos el prisma es recto y si son romboides entonces el prisma es oblicuo.
  - Además, según el número de lados del polígono de las bases, el prisma es triangular, cuadrangular, pentagonal, hexagonal, etc …

- Ejemplo: prisma cuadrangular regular.





Volumen = área base x altura

$$\boxed{\text{Volumen} = L^2 \cdot h}$$

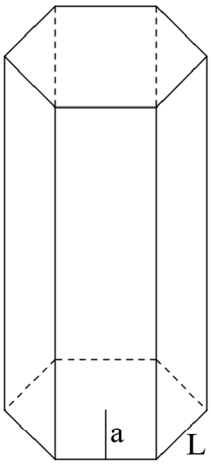
Area = 2 Area base + Area lateral

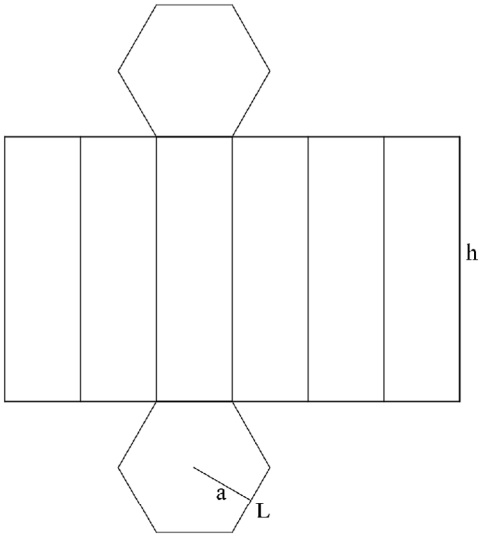
$$\boxed{\text{Área} = 2 \cdot L^2 + 4 \cdot L \cdot h}$$

Ejemplo: hallar el área y el volumen del prisma cuadrangular regular de lado de la base 2 cm y altura 7 cm.

$\text{Área} = 2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 \cdot 7 = 64 \text{ cm}^2$. Volumen= $4 \cdot 7 = 28 \text{ cm}^3$.

- Ejemplo: prisma hexagonal regular.





Volumen = área base x altura $= \dfrac{p \cdot a}{2} \cdot h$

$$\boxed{\text{Volumen} = \frac{3\sqrt{3}}{2} L^2 \cdot h}$$

Área = 2 Área base + Área lateral

$$\text{Área} = 2\,\frac{p \cdot a}{2} + 6 \cdot L \cdot h$$

$$\boxed{\text{Área} = 3\sqrt{3} \cdot L^2 + 6 \cdot L \cdot h}$$

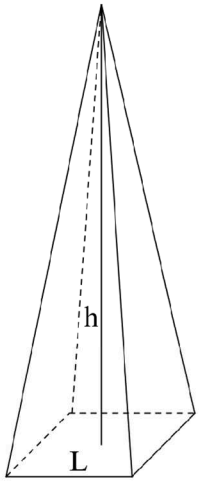
Ejemplo: hallar el área y el volumen del prisma hexagonal regular de lado de la base 2 cm y altura 7 cm.

$\text{Área} = 3\sqrt{3} \cdot 4 + 6 \cdot 2 \cdot 7 = 104{,}78 \text{ cm}^2$. Volumen $= \dfrac{3\sqrt{3}}{2} 4 \cdot 7 = 72{,}75 \text{ cm}^3$.

9.8 Pirámides.

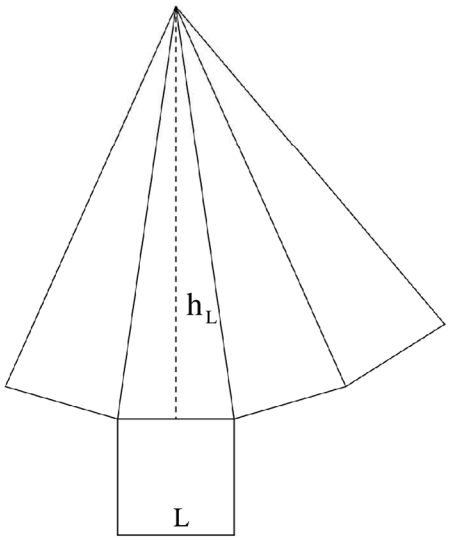
- Una pirámide es un poliedro delimitado por una base que es un polígono y las caras laterales son triángulos que parten de la base y confluyen en un vértice.
  - La pirámide es regular o irregular según lo sea o no el polígono de la base.
  - La pirámide también puede ser recta u oblicua según el vértice o cúspide.
  - Además, según el número de lados del polígono de la base, la pirámide es triangular, cuadrangular, pentagonal, hexagonal, etc …

- Ejemplo: pirámide cuadrangular regular.



$$\text{Volumen} = \frac{\text{área base x altura}}{3}$$

$$\boxed{\text{Volumen} = \frac{L^2 \cdot h}{3}}$$



$$\text{Área} = \text{Área base} + \text{Área lateral}$$

$$\text{Área} = L^2 + 4\,\frac{L \cdot h_L}{2}$$

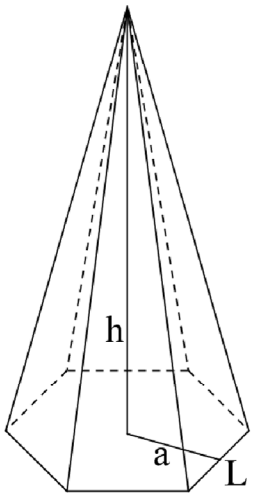
$$\boxed{\text{Área} = L^2 + 2\,L \cdot h_L}$$

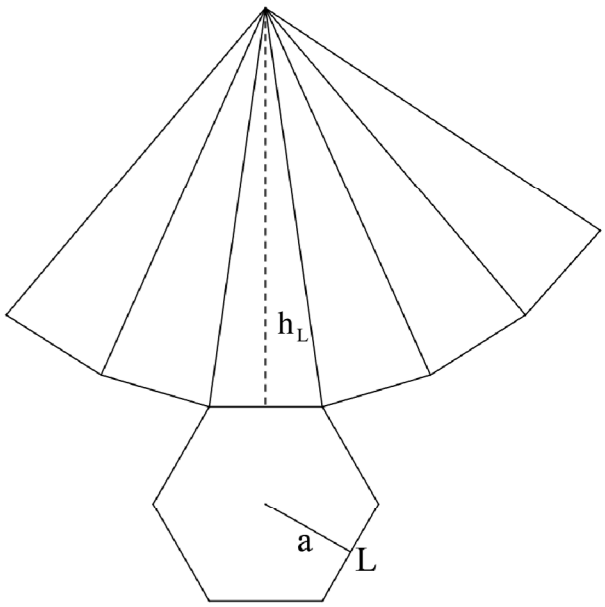
Ejemplo: hallar el área y el volumen de la pirámide cuadrangular regular de lado de la base 2 cm y altura 7 cm.
Utilizando el teorema de Pitágoras, tenemos la relación entre la altura y la altura lateral: $h_L^2 = h^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2$.

$h_L^2 = 7^2 + 1^2 \Rightarrow h_L^2 = 49 + 1 \Rightarrow h_L^2 = 50 \Rightarrow h_L = \sqrt{50}$.

$\text{Área} = 4 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{50} = 32{,}28\ \text{cm}^2$. Volumen$= \frac{4 \cdot 7}{3} = 9{,}33\ \text{cm}^3$.

- Ejemplo: pirámide hexagonal regular.





$$\text{Volumen} = \frac{\text{área base x altura}}{3} = \frac{\frac{p \cdot a}{2} \cdot h}{3}$$

$$\boxed{\text{Volumen} = \frac{\sqrt{3}}{2} L^2 \cdot h}$$

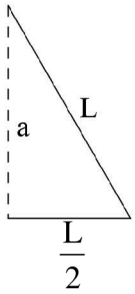
$$\text{Área} = \text{Área base} + \text{Área lateral}$$

$$\text{Área} = \frac{p \cdot a}{2} + 6\,\frac{L \cdot h_L}{2}$$

$$\boxed{\text{Área} = \frac{3\sqrt{3}}{2} L^2 + 3\,L \cdot h_L}$$

Ejemplo: hallar el área y el volumen de la pirámide hexagonal regular de lado de la base 2 cm y altura 7 cm.

Utilizando el teorema de Pitágoras, hallamos en primer lugar la apotema:



$$L^2 = a^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow 2^2 = a^2 + 1^2 \Rightarrow 4 = a^2 + 1 \Rightarrow a = \sqrt{3}.$$

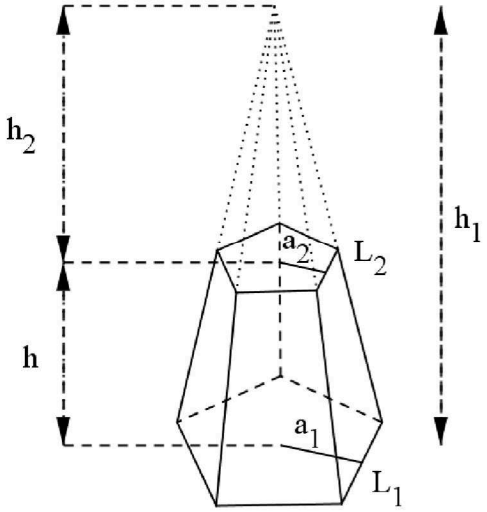
Además, la relación entre la altura y la altura lateral es: $h_L^2 = h^2 + a^2$.

$$h_L^2 = 7^2 + \sqrt{3}^2 \Rightarrow h_L^2 = 49 + 3 \Rightarrow h_L^2 = 52 \Rightarrow h_L = \sqrt{52}\,.$$

$$\text{Área} = \frac{3\sqrt{3}}{2} 4 + 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{52} = 53{,}66\ \text{cm}^2.\ \text{Volumen} = \frac{\sqrt{3}}{2} 4 \cdot 7 = 24{,}25\ \text{cm}^3.$$

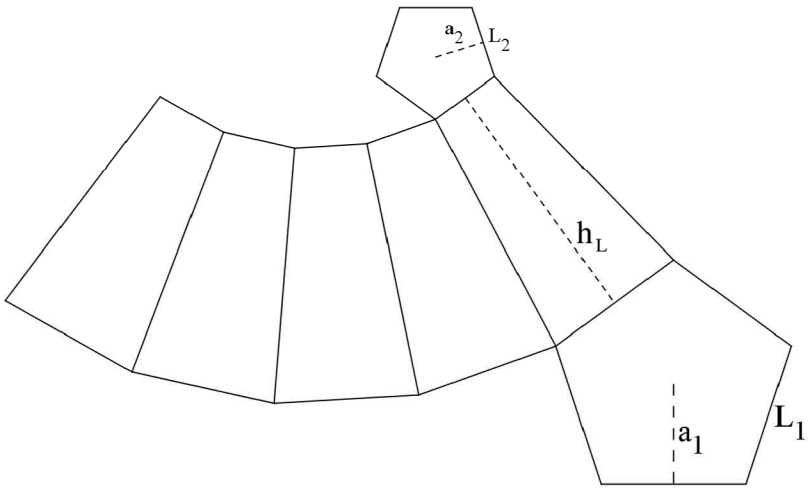
9.9 Tronco de pirámide.

- Es el poliedro que resulta al cortar una pirámide por un plano paralelo a la base y separar la parte de arriba que contiene al vértice o cúspide de la pirámide. Ejemplo: tronco de pirámide pentagonal regular.



$$\text{Volumen} = \frac{\text{área base 1 x altura 1}}{3} - \frac{\text{área base 2 x altura 2}}{3}$$

$$\text{Volumen} = \frac{\frac{5L_1 \cdot a_1}{2} \cdot h_1}{3} - \frac{\frac{5L_2 \cdot a_2}{2} \cdot h_2}{3}$$



Área = Área BASE + Área lateral + Área base

$$\text{Área} = \frac{5L_1 \cdot a_1}{2} + 5\frac{L_1 + L_2}{2} \cdot h_L + \frac{5L_2 \cdot a_2}{2}$$

Ejemplo: hallar el área y el volumen del tronco pirámide pentagonal regular de base mayor 4 cm, apotema de la base mayor 2,753 cm, base menor 2 cm, apotema de la base menor 1,376 cm , altura 8 cm y altura lateral 8,118 cm.

$$\text{Área} = \frac{20 \cdot 2{,}753}{2} + 5\frac{4+2}{2} \cdot 8{,}118 + \frac{10 \cdot 1{,}376}{2} = 156{,}18 \text{ cm}^2$$

Por semejanza de triángulos:

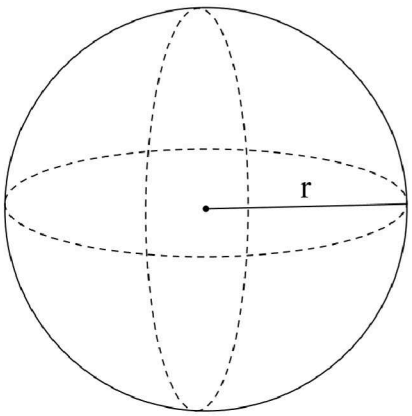
$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{a_1}{a_2} \Rightarrow \frac{h_2 + h}{h_2} = 2 \Rightarrow h_2 + 8 = 2h_2 \Rightarrow h_2 = 8 \text{ cm.}$$

Además $h_1 = h_2 + h = 8 + 8 = 16$ cm. Luego:

$$\text{Volumen} = \frac{\frac{20 \cdot 2{,}753}{2} \cdot 16}{3} - \frac{\frac{10 \cdot 1{,}376}{2} \cdot 8}{3} = 128{,}48 \text{ cm}^3.$$

9.10 Cuerpos redondos.

- Esfera.



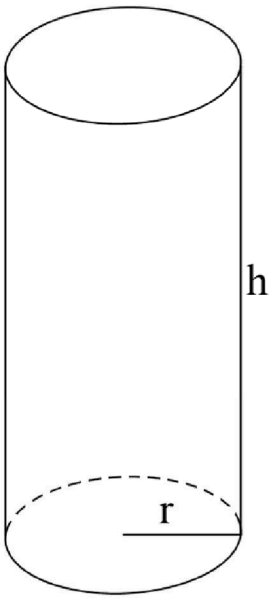
$$\boxed{\text{Área} = 4\pi \cdot r^2}$$

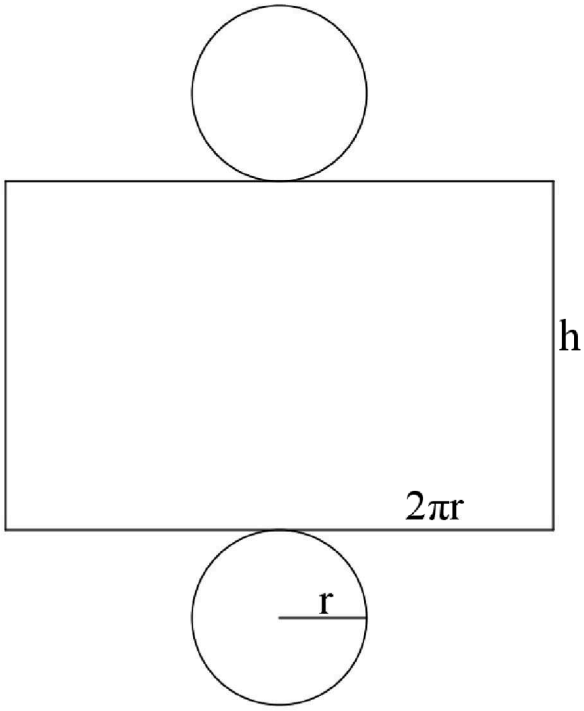
$$\boxed{\text{Volumen} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3}$$

Ejemplo: hallar el área y el volumen de la esfera de radio 4 cm.

$$\text{Área} = 4\pi \cdot 16 = 201{,}06 \text{ cm}^2. \text{ Volumen} = \frac{4}{3}\pi \cdot 64 = 268{,}08 \text{ cm}^3.$$

- Cilindro.





Volumen = área base x altura

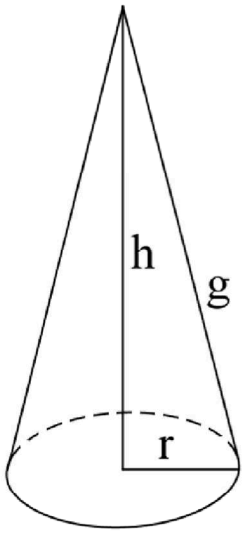
$$\boxed{\text{Volumen} = \pi \cdot r^2 \cdot h}$$

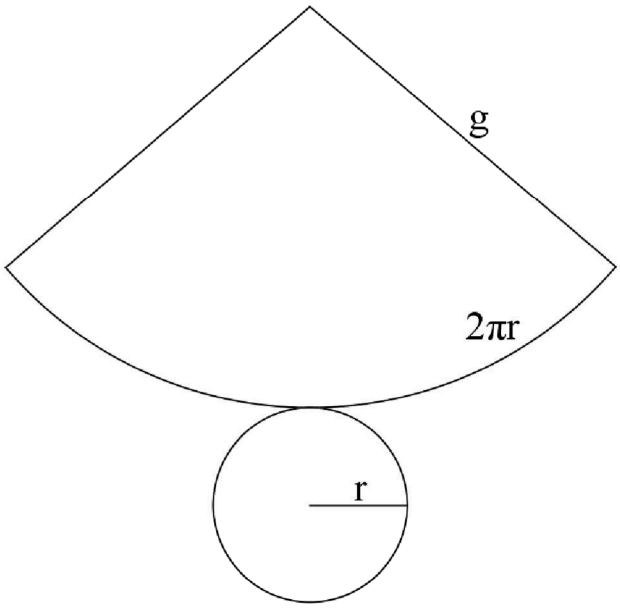
Área = 2 Área Base + Área lateral

$$\boxed{\text{Área} = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h}$$

Ejemplo: hallar el área y el volumen del cilindro de radio 2 cm y altura 7cm.
Área $= 2\pi \cdot 4 + 2\pi \cdot 14 = 113{,}1\ cm^2$. Volumen= $\pi \cdot 4 \cdot 7 = 87{,}96\ cm^3$.

- Cono.





$$\text{Volumen} = \frac{\text{área base x altura}}{3}$$

$$\boxed{\text{Volumen} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}}$$

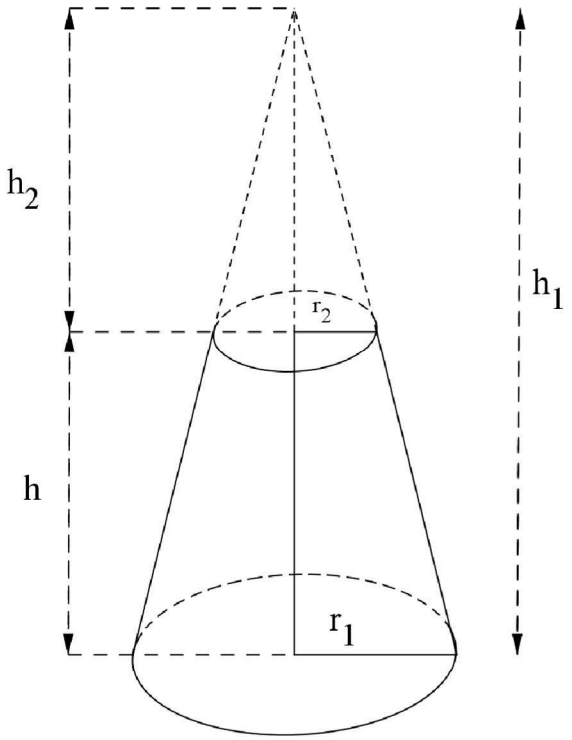
Área = Área Base + Área lateral

$$\boxed{\text{Área} = \pi r^2 + \pi r g}$$

Ejemplo: hallar el área y el volumen del cono de radio 2 cm y altura 7cm.
Utilizando el teorema de Pitágoras, hallamos en primer lugar la generatriz:
$g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow g^2 = 4 + 49 \Rightarrow g = \sqrt{53}$. Luego:

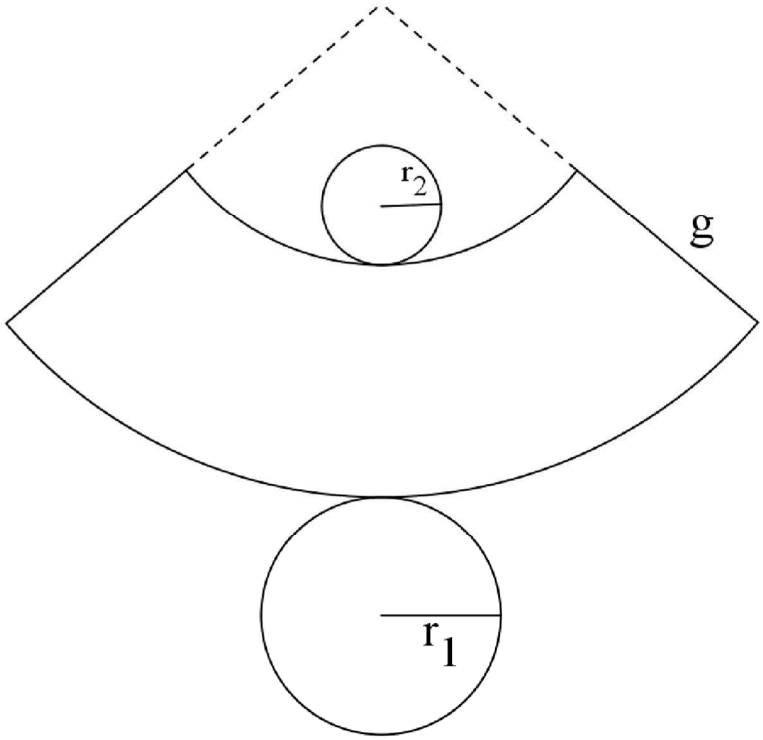
Área $= \pi \cdot 4 + \pi \cdot 2 \cdot \sqrt{53} = 58{,}31\ cm^2$. Volumen= $\frac{\pi \cdot 4 \cdot 7}{3} = 29{,}32\ cm^3$.

- Tronco de cono.



$$\text{Volumen} = \frac{\text{área base 1 x altura 1}}{3} - \frac{\text{área base 2 x altura 2}}{3}$$

$$\text{Volumen} = \frac{\pi r_1^2 \cdot h_1}{3} - \frac{\pi r_2^2 \cdot h_2}{3}$$



Área = Área BASE + Área lateral + Área base

$$\text{Área} = \pi \cdot r_1^2 + \pi\,(r_1 + r_2)g + \pi \cdot r_2^2$$

Ejemplo: hallar el área y el volumen del tronco de cono de radio de la base mayor 4 cm, radio de la base menor 2 cm y altura 8 cm.
Utilizando el teorema de Pitágoras, hallamos en primer lugar la generatriz:
$g^2 = (r_1 - r_2)^2 + h^2 \Rightarrow g^2 = 4 + 64 \Rightarrow g = \sqrt{68}$. Luego:
$\text{Área} = \pi \cdot 16 + \pi \cdot 6 \cdot \sqrt{68} + \pi \cdot 4 = 218{,}27\ \text{cm}^2$.
Por semejanza de triángulos:
$\frac{h_1}{h_2} = \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \frac{h_2 + h}{h_2} = 2 \Rightarrow h_2 + 8 = 2h_2 \Rightarrow h_2 = 8$ cm.
Además $h_1 = h_2 + h = 8 + 8 = 16$ cm. Luego:
$\text{Volumen} = \frac{\pi \cdot 16 \cdot 16}{3} - \frac{\pi \cdot 4 \cdot 8}{3} = 234{,}57\ \text{cm}^3$.