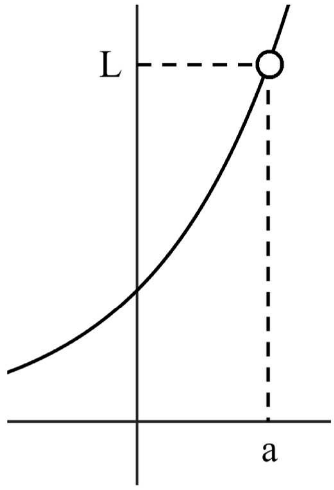
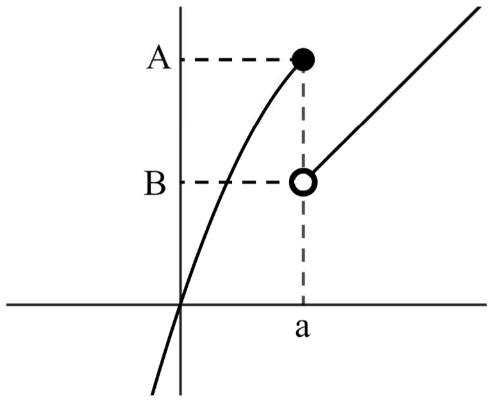
Tema 1: Límites de funciones. Continuidad.

1.1 Límite de funciones.



- Definiciones:

- $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = L}$: El límite de una función en un número real ‘a’ vale ‘L’ si, para valores cada vez más próximos al número ‘a’, tanto por la izquierda como por la derecha, las imágenes se acercan cada vez más hasta estar tan cerca como queramos del número ‘L’. Normalmente, el límite y la imagen coinciden, pero no es exactamente lo mismo. Por ejemplo, puede que no exista la imagen, pero sí el límite.



- $\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x) = A}$: El límite por la izquierda en un número real ‘a’ vale ‘A’ si, para valores cada vez más próximos y menores que el número ‘a’, las imágenes se acercan cada vez más hasta estar tan cerca como queramos del número ‘A’.

- $\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x) = B}$: El límite por la derecha en un número real ‘a’ vale ‘B’ si, para valores cada vez más próximos y mayores que el número ‘a’, las imágenes se acercan cada vez más hasta estar tan cerca como queramos del número ‘B’.

Claramente, para que haya límite en a, los límites laterales deben coincidir.

Ejemplo: dada la función $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si} \quad x \le 2 \\ 2x-4 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$, calcular $\lim_{x\to 2} f(x)$.

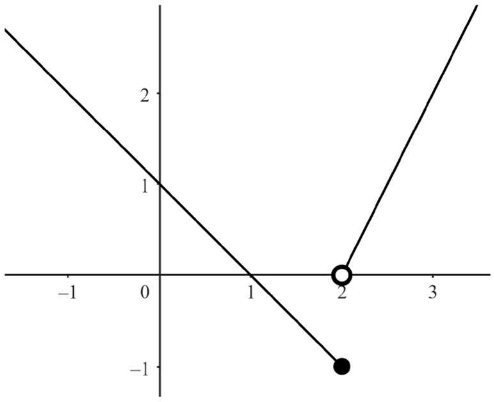
Hay dos intervalos y, en cada uno de ellos, una definición diferente:

En $(-\infty,2] \to f(x) = -x+1$

x	f(x)
0	1
1	0
2	1

En $(2,+\infty) \to f(x) = 2x-4$

x	f(x)
(2	0)
3	2
4	4

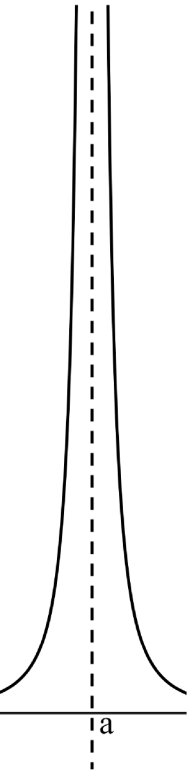


Una vez representada la función, los límites laterales pueden calcularse observando hacia qué número se acercan las imágenes al acercarnos al 2, tanto por la izquierda como por la derecha. También podemos dar valores muy cercanos a 2 por la izquierda y por la derecha y ver qué ocurre con las imágenes.

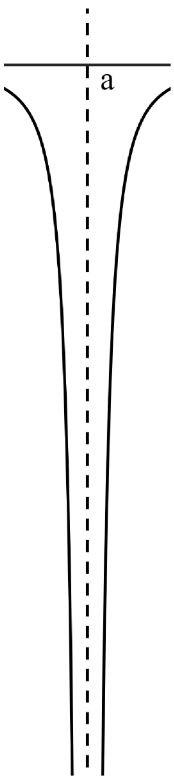
x	f(x)
1,9	– 0,9
1,99	– 0,99
1,999	– 0,999

x	f(x)
2,1	0,2
2,01	0,02
2,001	0,002

Tanto razonando sobre la gráfica como sobre los resultados de las tablas de valores anteriores, tenemos que:
El límite por la izquierda es: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} -x+1 = -2+1 = -1$.
El límite por la derecha es: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} 2x-4 = 4-4 = 0$.
Dado que los límites laterales no coinciden, no existe el límite de la función en el 2, es decir, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$ no existe.



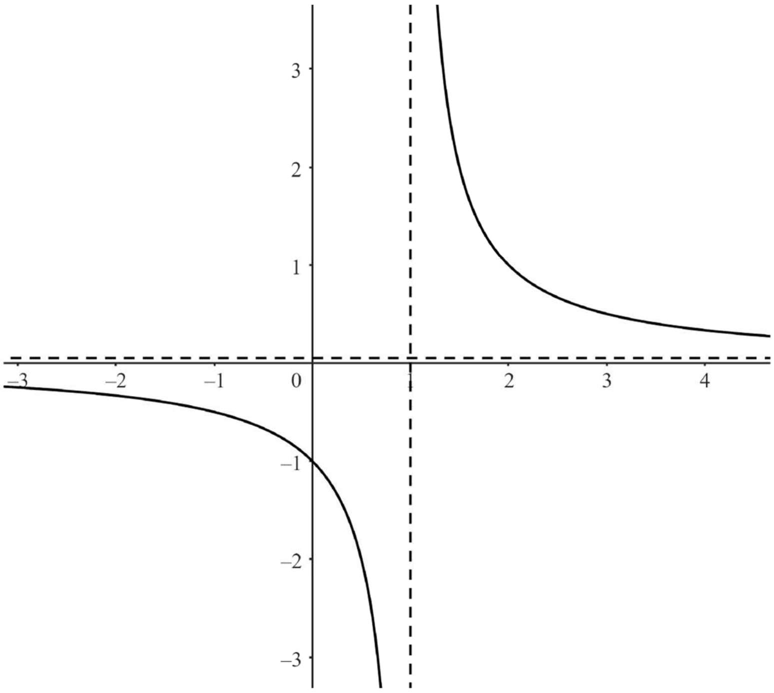
- $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty}$: El límite en un número real 'a' vale $+\infty$ si, para valores cada vez más próximos al número 'a', tanto por la izquierda como por la derecha, las imágenes son cada vez mayores de forma indefinida.



- $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty}$: El límite en un número real 'a' vale $-\infty$ si, para valores cada vez más próximos al número 'a', tanto por la izquierda como por la derecha, las imágenes son cada vez más negativas de forma indefinida.

- En la práctica, es muy habitual que los límites laterales sean uno de ellos $+\infty$ y el otro $-\infty$. Por tanto, no hay límite.

  Ejemplo: dada la función $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, calcular $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.



x	f(x)
-2	$-\frac{1}{3}$
-1	$-\frac{1}{2}$
0	-1
0.9	-10
0.99	-100
1.01	100
1.1	10
2	1
3	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{3}$

Ya sea razonando sobre la gráfica para valores muy cercanos a 1 o examinando la tabla de valores, los límites laterales son: $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$. Por lo tanto, no existe el límite en $x=1$.

- $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L}$: El límite en $+\infty$ de una función vale 'L' si, para valores cada vez mayores: 10, 100, 1000, etc., las imágenes se acercan cada vez más hasta estar tan cerca como queramos del número 'L'.
- $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L}$: El límite en $-\infty$ de una función vale 'L' si, para valores cada vez más negativos: $-10, -100, -1000$, etc., las imágenes se acercan cada vez más, hasta estar tan cerca como queramos del número 'L'

Ejemplo: dada $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Como es la misma función del ejemplo anterior, daremos únicamente valores para calcular los límites.

x	f(x)
-10	$-0{,}09$
-100	$-0{,}0099$
-1000	$-0{,}00099$
…	…
10	0,111
100	0,010
1000	0,001
…	…

Tenemos entonces que: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0^-$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0^+$.

Los superíndices del resultado del límite indican si nos acercamos hacia el límite por arriba, con valores mayores (+), o por abajo, con valores menores $(-)$.

- Propiedades de los límites:
  - $\lim\limits_{x\to a,\pm\infty}[f(x)+g(x)]=\left[\lim\limits_{x\to a,\pm\infty} f(x)\right]+\left[\lim\limits_{x\to a,\pm\infty} g(x)\right]$
  - $\lim\limits_{x\to a,\pm\infty}[f(x)-g(x)]=\left[\lim\limits_{x\to a,\pm\infty} f(x)\right]-\left[\lim\limits_{x\to a,\pm\infty} g(x)\right]$
  - $\lim\limits_{x\to a,\pm\infty}[f(x)\cdot g(x)]=\left[\lim\limits_{x\to a,\pm\infty} f(x)\right]\cdot\left[\lim\limits_{x\to a,\pm\infty} g(x)\right]$
  - $\lim\limits_{x\to a,\pm\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a,\pm\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to a,\pm\infty} g(x)}$, siempre que el denominador no sea 0.
  - $\lim\limits_{x\to a,\pm\infty}(f(x))^{g(x)}=\left(\lim\limits_{x\to a,\pm\infty} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a,\pm\infty} g(x)}$
- Operaciones con ∞: al aplicar las propiedades anteriores pueden aparecer operaciones en las que interviene ∞ y sus resultados son los siguientes:
  - $\dfrac{\infty}{k}=\infty$: Al aumentar el numerador, la fracción aumenta.
  - $\dfrac{k}{\infty}=0$: Al aumentar el denominador, disminuye la fracción.
  - $\dfrac{k}{0}=\infty$: Al disminuir el denominador, aumenta la fracción.
  - $\dfrac{\infty}{0}=\infty$: Si aumenta el numerador y el denominador disminuye, la fracción aumenta por ambos motivos.
  - $\dfrac{0}{\infty}=0$: Si disminuye el numerador y aumenta el denominador, la fracción disminuye por ambos motivos.
  - $\infty\pm k=\infty \quad , \quad \infty+\infty=\infty \quad , \quad \infty\cdot\infty=\infty$
  - $0^{+\infty}=0 \quad , \quad 0^{-\infty}=+\infty \quad , \quad (+\infty)^{+\infty}=+\infty \quad , \quad (+\infty)^{-\infty}=0$
  - $k^{+\infty}=\begin{cases}+\infty & \text{si} \quad k>1\\ 0 & \text{si} \quad 0<k<1\end{cases} \quad , \quad k^{-\infty}=\begin{cases}0 & \text{si} \quad k>1\\ +\infty & \text{si} \quad 0<k<1\end{cases}$
- Hay algunas operaciones con ∞ que no pueden razonarse como antes y pueden dar lugar a cualquier resultado, son las llamadas indeterminaciones:

$$\boxed{\frac{\infty}{\infty}=? \quad , \quad \infty-\infty=? \quad , \quad \frac{0}{0}=? \quad , \quad 0\cdot\infty=? \quad , \quad 1^{\infty}=? \quad , \quad 0^0=? \quad \text{y} \quad \infty^0=?}$$

1.2 Cálculo de límites de funciones.

- Límite de una función polinómica:
  - El límite en un número real se obtiene sustituyendo. Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 2}(x^3-3x^2+4x-7)=2^3-3\cdot 2^2+4\cdot 2-7=8-12+8-7=-3$.
  - El límite en ∞ siempre es ∞, y el signo depende del coeficiente de mayor grado y de la paridad del mayor exponente. Ejemplos:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^3-3x^2+4x-7\right)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}\left(-x^3-3x^2+4x-7\right)=-\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^3-3x^2+4x-7\right)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}\left(-x^3-3x^2+4x-7\right)=+\infty$$

- Límite de una función racional o fracción polinómica:
  - El límite en un número se obtiene sustituyendo, si es posible. Ejemplo:

a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-8}=\dfrac{2^2-3\cdot2+2}{2^2-8}=\dfrac{4-6+2}{4-8}=\dfrac{0}{-4}=0$.

b) Si el denominador es 0, hay que estudiar los límites laterales porque, como ya hemos visto, normalmente no habrá límite. Ejemplo:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-3x}{x^2-4}=\frac{2^2-3\cdot2}{2^2-4}=\frac{4-6}{4-4}=\frac{-2}{0}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2-3x}{x^2-4}=\dfrac{-2}{0^-}=+\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2-3x}{x^2-4}=\dfrac{-2}{0^+}=-\infty\end{cases}$$

Luego, no hay límite porque los límites laterales no coinciden.

c) Por último, también puede aparecer la indeterminación $\dfrac{0}{0}$, que se resuelve descomponiendo en factores los polinomios y simplificando:

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-8}=\dfrac{2^2-3\cdot2+2}{2\cdot2^2-8}=\dfrac{4-6+2}{8-8}=\dfrac{0}{0}\text{Ind.}$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{2x^2-8}=\lim_{x\to2}\frac{(x-1)(x-2)}{2\cdot(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to2}\frac{x-1}{2\cdot(x+2)}=\frac{1}{8}.$$

  - El límite en ∞ da lugar normalmente a la indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty}$, que se resuelve dividiendo numerador y denominador por la mayor potencia de ‘x’ que aparezca en la expresión. Pueden darse tres posibilidades: si el grado del numerador es mayor, el resultado será ∞; si tienen igual grado, el resultado será el cociente entre los coeficientes de mayor grado; y si el grado del numerador es menor, el resultado será 0.

Ejemplos:

a) Grado del numerador mayor.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-3x+2}{2x^2-3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}-\frac{3x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{\frac{2x^2}{x^3}-\frac{3x}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}=$$

$=\dfrac{1-0+0}{0-0}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$. Observa que el primer término del denominador indica el signo, también puede obtenerse el signo del principio $\dfrac{+}{+}=+$.

b) Grado del numerador igual al grado del denominador.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-3x+1}{2x^2-3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{3}{x}}=\frac{3-0+0}{2-0}=\frac{3^+}{2}$$

c) Grado del numerador menor.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-3x+1}{2x^3-3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^3}-\frac{3x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{3x}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{2-\frac{3}{x^2}}=$$

$$=\frac{0-0+0}{2-0}=\frac{0}{2}=0^+$$

- Límite de una función irracional, indeterminación $\infty-\infty$:
  - El límite en un número real se obtiene sustituyendo, si es posible. En algunos casos puede aparecer la indeterminación $\frac{0}{0}$, que se resuelve multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada de la raíz (cambiando el signo intermedio). Ejemplo:

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2-2x+4}-2}{2x^2-8}=\frac{\sqrt{2^2-2\cdot2+4}-2}{2\cdot2^2-8}=\frac{\sqrt{4-4+4}-2}{2\cdot4-8}=\frac{\sqrt{4}-2}{8-8}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2-2x+4}-2}{2x^2-8}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x^2-2x+4}-2\right)\left(\sqrt{x^2-2x+4}+2\right)}{\left(2x^2-8\right)\left(\sqrt{x^2-2x+4}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x^2-2x+4}\right)^2-2^2}{\left(2x^2-8\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-2x+4}+2\right)}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-2x+4-4}{\left(2x^2-8\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-2x+4}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)x}{2.(x-2)(x+2)\cdot\left(\sqrt{x^2-2x+4}+2\right)}=\lim_{x\to2}\frac{x}{2.(x+2)\cdot\left(\sqrt{x^2-2x+4}+2\right)}=$$

$$=\frac{2}{2(2+2)\cdot\left(\sqrt{2^2-2\cdot2+4}+2\right)}=\frac{2}{8\cdot\left(\sqrt{4}+2\right)}=\frac{2}{32}=\frac{1}{16}$$

  - El límite en ∞ puede dar lugar a indeterminaciones $\infty-\infty$, que se resuelven igual que antes, multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada de la raíz. También puede aparecer, posteriormente, la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, que se resuelve dividiendo por la mayor potencia y, dentro de la raíz, por su cuadrado. Ejemplo:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-2x+4}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2x+4}-x\right)\left(\sqrt{x^2-2x+4}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-2x+4}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2x+4}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2-2x+4}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+4-x^2}{\sqrt{x^2-2x+4}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x+4}{\sqrt{x^2-2x+4}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-2x}{x}+\frac{4}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}+\frac{x}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2+\frac{4}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+1}=\frac{-2+0}{\sqrt{1-0+0}+1}=\frac{-2}{2}=-1^+$$

- Límite de una función exponencial, indeterminación 1^{∞}:

  - El límite en un número real se obtiene sustituyendo, si es posible. En algunos casos puede aparecer la indeterminación 1^{∞}, que se resuelve a partir de la expresión: $e=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}$, siendo f(x) una función que debe tener por límite $\pm\infty$. Para buscar esta expresión se suma y resta 1 en la base, y se opera. Luego, se divide numerador y denominador por el numerador y, finalmente, se multiplica y divide por la función f(x) resultante en el exponente. Ejemplo:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-2x}\right)^{2x}=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{x^2-2x}\right)^{\lim\limits_{x\to+\infty}2x}=1^{+\infty}\ \text{Indeterminación.}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-2x}\right)^{2x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x^2+3}{x^2-2x}-1\right)^{2x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x^2+3-x^2+2x}{x^2-2x}\right)^{2x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2x+3}{x^2-2x}\right)^{2x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\frac{2x+3}{2x+3}}{\frac{x^2-2x}{2x+3}}\right)^{2x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-2x}{2x+3}}\right)^{2x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-2x}{2x+3}}\right)^{\frac{x^2-2x}{2x+3}\frac{2x+3}{x^2-2x}2x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-2x}{2x+3}}\right)^{\frac{x^2-2x}{2x+3}}\right]^{\frac{2x+3}{x^2-2x}2x}=$$

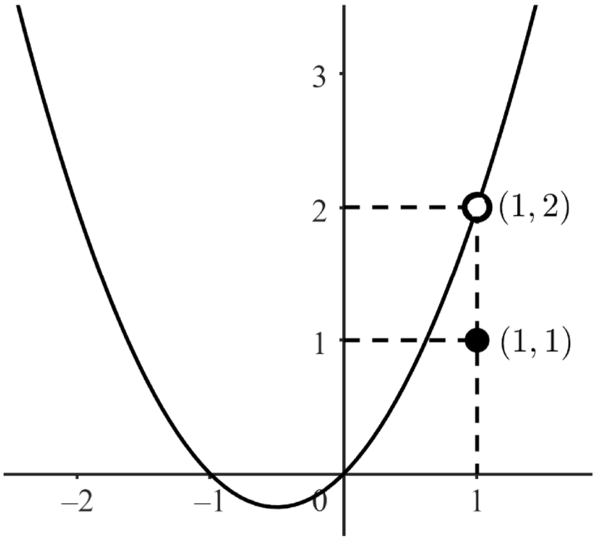
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-2x}{2x+3}}\right)^{\frac{x^2-2x}{2x+3}}\right]^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{x^2-2x}2x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-2x}{2x+3}}\right)^{\frac{x^2-2x}{2x+3}}\right]^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2+6x}{x^2-2x}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2+6x}{x^2-2x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{6x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4+\frac{6}{x}}{1-\frac{2}{x}}}=e^{\frac{4+0}{1-0}}=e^4=54{,}5981^{+}$$

1.3 Continuidad de una función.

- Una función es continua en un número real 'a' si el límite y la imagen en dicho punto coinciden: $\boxed{\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)}$. Esta definición implica que los límites laterales deben existir y coincidir; de lo contrario, el límite no existe. Podemos identificar tres tipos de discontinuidad:

- Discontinuidad puntual o evitable, que tiene lugar cuando existe el límite, pero no coincide con la imagen: Ejemplo: $f(x)=\begin{cases} x^2+x & \text{si } x\neq 1 \\ 1 & \text{si } x=1 \end{cases}$



Esta función es continua en todos sus puntos, excepto en el 1, donde el límite y la imagen no coinciden: $\lim_{x\to 1} f(x)=2$, pero $f(1)=1$.

- Discontinuidad de salto finito, que tiene lugar cuando los límites laterales existen, pero son distintos. Ejemplo: estudiar la continuidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{si} \quad x<1 \\ -x^2+3x & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$

En $(-\infty,1)\rightarrow f(x)=2x-1$

x	f(x)
-1	-3
0	-1
(1	1)

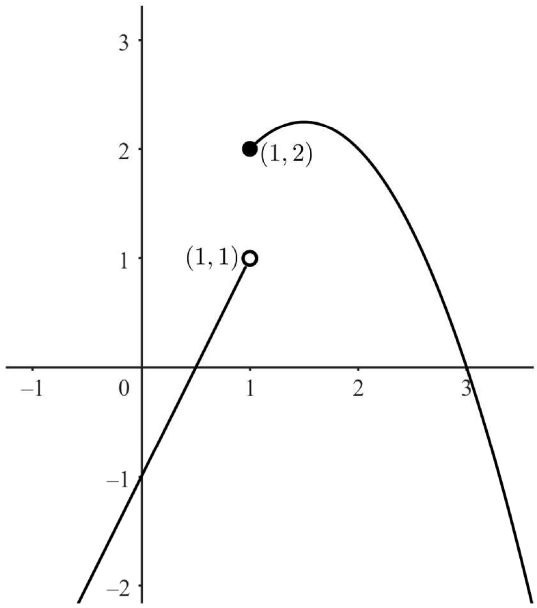
En $[1,+\infty)\rightarrow f(x)=-x^2+3x$

x	f(x)
1	2
2	2
3	0

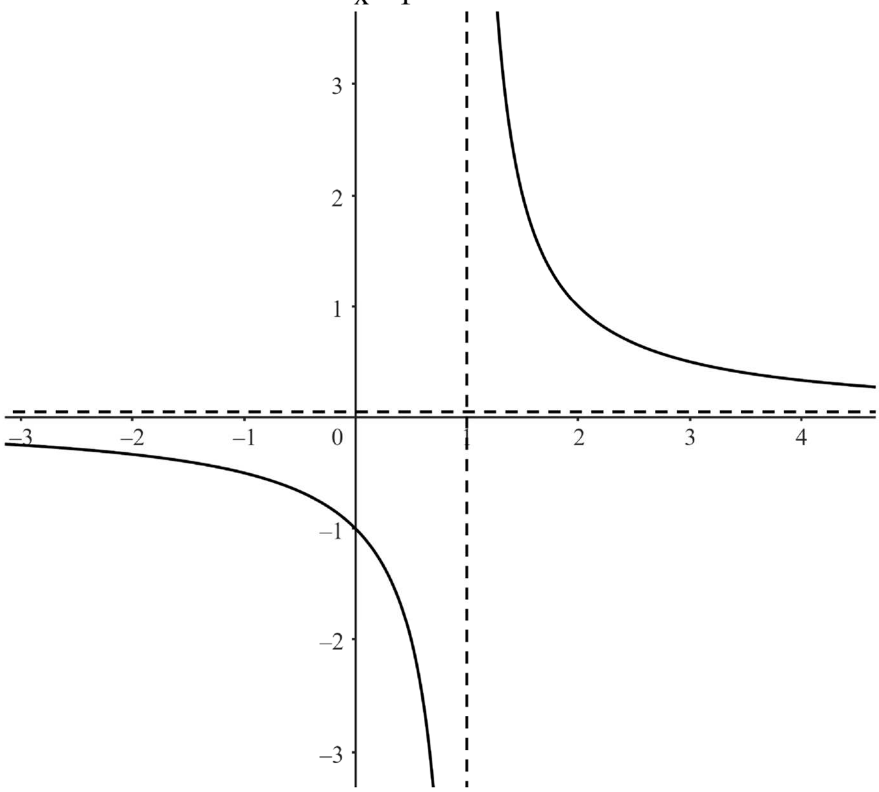
En cuanto al estudio de la parábola de forma resumida, sería el siguiente:

El vértice $V=\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$ es un máximo y los cortes son $(0,0)$ y $(3,0)$. El primer corte está fuera del rango de definición de la parábola.

Esta función es continua en todos sus puntos, excepto en el 1, porque los límites laterales $\lim_{x\to 1^-} f(x)=1$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x)=2$ son distintos, por lo que hay una discontinuidad de salto finito.



- Discontinuidad de salto infinito, que tiene lugar cuando alguno de los límites laterales vale $+\infty$ ó $-\infty$. Normalmente, uno de ellos es $+\infty$ y el otro $-\infty$. Ejemplo: $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$.



Esta función es continua en todos sus puntos, excepto en el 1, donde los límites laterales son: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$.

- Las funciones polinómicas, rectas, parábolas etc., son siempre continuas en todos los puntos. Las funciones racionales son continuas en su dominio, es decir, excepto en los números que anulan el denominador, donde encontramos asíntotas verticales que provocan discontinuidades de salto infinito. En general, todas las funciones con las que trabajamos habitualmente, funciones polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, etc., son continuas en su dominio. Por lo tanto, para estudiar la continuidad hay que hallar el dominio de definición y, además, estudiar el límite y la imagen en los puntos críticos de las funciones definidas a trozos.

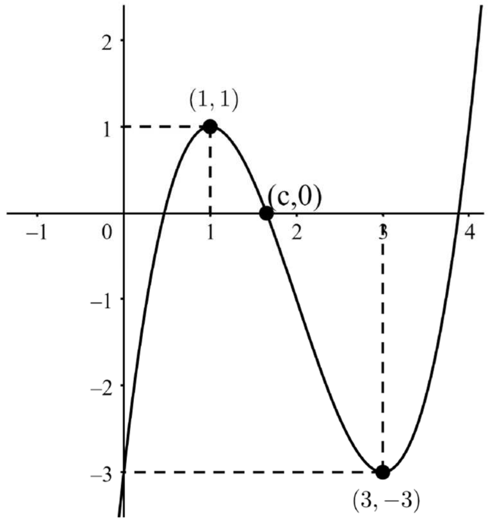
1.4 Teorema de Bolzano.

- Sea f(x) una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, de forma que las imágenes de los extremos del intervalo tienen diferente signo. Entonces, existe un punto intermedio $c \in (a,b)$ en el que la imagen es cero.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f \text{ cont. en } [a,b] \\ f(a)\cdot f(b) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (a,b) : f(c) = 0}$$

Es muy gráfico pensar que vamos a ir de una orilla a otra de un río (eje de abscisas) y que, en algún momento, pasaremos por dicho río.

Ejemplo: La siguiente función: $f(x)=x^3-6x^2+9x-3$ es continua en el intervalo $[1,3]$ y las imágenes de los extremos tienen diferente signo $f(1)=1>0$ y $f(3)=-3<0$. Luego, habrá un punto intermedio $c\in(1,3)$, en el que $f(c)=0$. Aproximadamente, sería $c\approx 1{,}65$.



- El teorema de Bolzano es muy útil para acotar o separar las raíces de un polinomio. Por ejemplo, el polinomio $P(x)=x^3-3x+1$, tiene tres raíces reales en los intervalos $(-2,-1)$, $(0,1)$ y $(1,2)$, porque al dar valores observamos que hay cambios de signo en las imágenes:

$$\left.\begin{array}{l}\text{P cont. en } [-2,-1] \\ P(-2)\cdot P(-1)<0\end{array}\right\}\Rightarrow \exists c\in(-2,-1): P(c)=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{P cont. en } [0,1] \\ P(0)\cdot P(1)<0\end{array}\right\}\Rightarrow \exists c\in(0,1): P(c)=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{P cont. en } [1,2] \\ P(1)\cdot P(2)<0\end{array}\right\}\Rightarrow \exists c\in(1,2): P(c)=0$$

x	P(x)
−2	−1
−1	1
0	1
1	−1
2	3

- El teorema de Bolzano también sirve para aproximar los puntos de corte entre dos funciones $f(x)$ y $g(x)$. Esto se consigue utilizando la función auxiliar $F(x)=f(x)-g(x)$. Ejemplo: las funciones $f(x)=e^{-x}$ y $g(x)=Lx$ tienen un punto de corte en el intervalo $(1,2)$, porque $F(x)=e^{-x}-Lx$ cumple las hipótesis de Bolzano:

$$\left.\begin{array}{l}\text{F cont. en } [1,2] \\ F(1)\cdot F(2)<0\end{array}\right\}\Rightarrow \exists c\in(1,2): F(c)=0\Rightarrow e^{-c}-Lc=0\Rightarrow e^{-c}=Lc$$

- Una consecuencia inmediata del teorema de Bolzano es la propiedad de Darboux (teorema de los valores intermedios), que dice lo siguiente: sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, y sea $f(a)\le k\le f(b)$. Entonces, existe un punto intermedio $c\in(a,b)$ en el que la imagen vale k. Es decir, se alcanzan todas las imágenes intermedias comprendidas entre las imágenes de los extremos. $\boxed{\left.\begin{array}{l}\text{f cont. en } [a,b] \\ f(a)\le k\le f(b)\end{array}\right\}\Rightarrow \exists c\in(a,b): f(c)=k}$.

1.5 Teorema de Weierstrass.

- Sea f(x) una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$. En dicho intervalo, se alcanzan tanto el máximo absoluto como el mínimo absoluto. Estos extremos pueden encontrarse en los puntos finales del intervalo o en su interior, en cuyo caso serían máximos o mínimos relativos.

  $\boxed{\text{f cont. en } [a,b] \Rightarrow \exists c,d \in [a,b] : f(c) \le f(x) \le f(d)}$.

  Por ejemplo, la función $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ es continua en el intervalo $[1,3]$. El mínimo absoluto se alcanza en los extremos, y el máximo absoluto, que también es relativo, se alcanza en el interior del intervalo, en $x = 2$.

  Es decir, todas las imágenes de la función f(x) en el intervalo $[1,3]$ se encuentran limitadas por los valores mínimo y máximo absolutos que la función alcanza en algún momento. Por tanto, todas las imágenes de la función se encuentran en un rango comprendido entre 0 y 1:

  $f(1) = f(3) = 0 \le f(x) \le f(2) = 1$