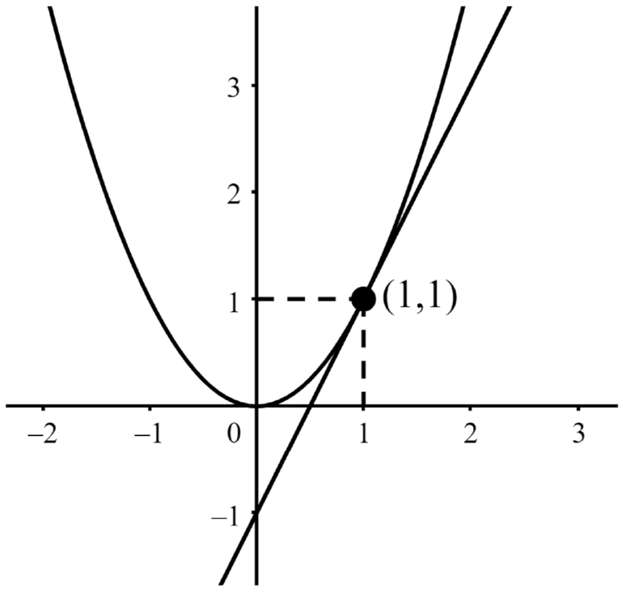
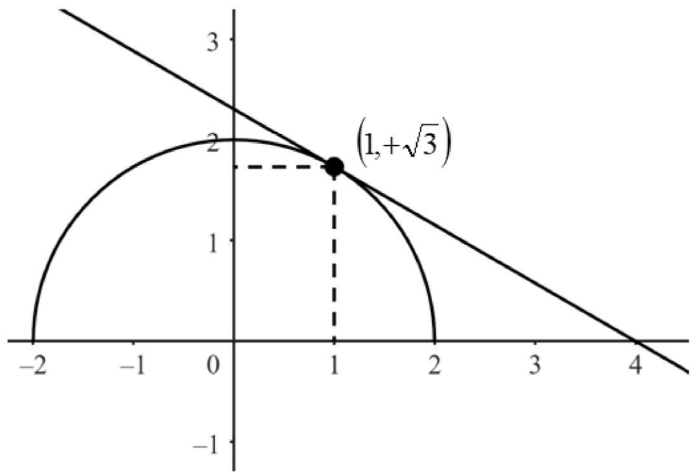
Tema 3: Aplicaciones de las derivadas.

3.1 Recta tangente a una función en un punto.

- La primera aplicación de las derivadas surge de su propia definición: la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto.
  Por ejemplo, dada la función $f(x) = x^2$ y el número real $a = 1$, claramente $f'(x) = 2x$ y, por tanto, la derivada en $a = 1$ será $f'(1) = 2$. Luego, la ecuación de la recta en forma punto-pendiente es: $\boxed{y - y_0 = m\cdot(x - x_0)}$, o bien, en términos de funciones: $\boxed{y - f(a) = f'(a)\cdot(x - a)}$. Sustituyendo por los valores de nuestro ejemplo, la recta tangente es:
  $y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1) \Rightarrow y - 1^2 = 2\cdot(x-1) \Rightarrow y - 1 = 2x - 2 \Rightarrow \underline{y = 2x - 1}$.

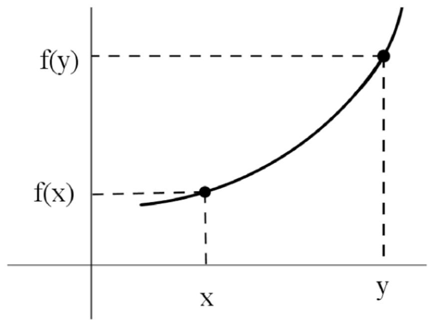


- Otro ejemplo: dada la circunferencia de centro el origen $O = (0,0)$ y radio 2: $C \equiv x^2 + y^2 = 4$, hallar la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto $\left(1, +\sqrt{3}\right)$ y representar la situación gráficamente.
  Como la circunferencia no es una función (al despejar tendríamos dos ramas por los signos positivo y negativo: $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$), trabajaremos con la semicircunferencia superior, que sí es una función: $f(x) = +\sqrt{4 - x^2}$.
  La derivada es: $f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}} \Rightarrow f'(1) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
  La ecuación de la recta tangente será $y - f(1) = f'(1)\cdot(x - 1)$, es decir:
  $r \equiv y - \sqrt{3} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x - 1) \Rightarrow r \equiv \sqrt{3}y - 3 = -x + 1 \Rightarrow r \equiv x + \sqrt{3}y - 4 = 0$.
  En forma explícita, la recta tangente es: $r \equiv y = \dfrac{4 - x}{\sqrt{3}}$.

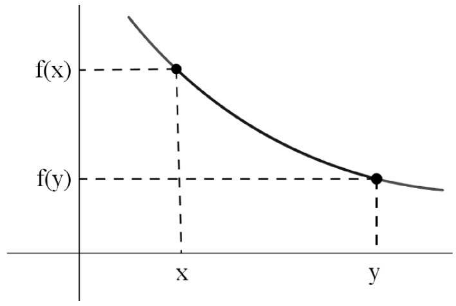


3.2 Crecimiento de una función.

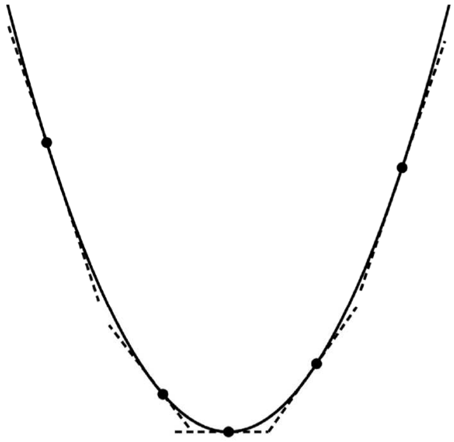
- Una función es creciente en un punto 'a', si existe un entorno $\left(a-r, a+r\right)$ de forma que, para cualquier pareja de números x, y (siendo $x < y$), las imágenes son: $f(x) < f(y)$. Es decir, los puntos situados más a la derecha tienen imágenes mayores.



- Análogamente, una función es decreciente en un punto 'a', si existe un entorno $\left(a-r, a+r\right)$ de forma que, para cualquier pareja de números de ese entorno x, y (siendo $x < y$), las imágenes son: $f(x) > f(y)$. Es decir, los puntos situados más a la derecha tienen imágenes menores:

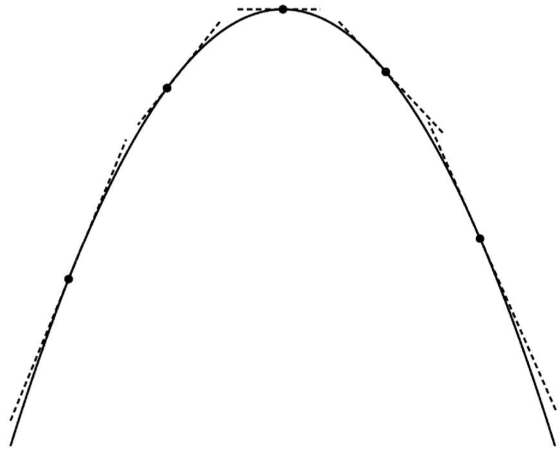


- Veamos a continuación ¿qué relación hay entre el crecimiento y la derivada?



Si observamos esta gráfica, veremos que a la izquierda, donde la función es decreciente, las rectas tangentes tienen pendiente negativa. Y a la derecha, donde la función es creciente, las rectas tangentes tienen pendiente positiva.

- Análogamente a la gráfica anterior, pero con forma contraria, observamos que a la izquierda, donde la función es creciente, las rectas tangentes tienen pendiente positiva. Y a la derecha, donde la función es decreciente, las rectas tangentes tienen pendiente negativa.



Conclusión:

$\boxed{\textbf{Si } f'(a) > 0 \Rightarrow \textbf{f es creciente (estrictamente) en a}}$

$\boxed{\textbf{Si } f'(a) < 0 \Rightarrow \textbf{f es decreciente (estrictamente) en a}}$

Observación: los recíprocos no son ciertos. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente en $x = 0$, pero ahí la derivada no es positiva, sino nula: $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$.

- Para estudiar de forma práctica el crecimiento de una función: Hacemos la derivada y hallamos las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$, para a continuación, estudiar el signo de la derivada que nos informará sobre el crecimiento de la función inicial. Hay que observar, que entre cada dos raíces o soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$, habrá un único signo, con lo que es suficiente un valor en cada intervalo para evaluar el signo.

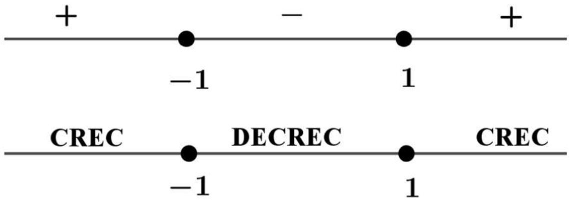
Ejemplo: estudiar el crecimiento de la función $f(x) = x^3 - 3x + 2$.
La derivada es $f'(x) = 3x^2 - 3$. La ecuación $f'(x) = 0$ tiene dos soluciones:

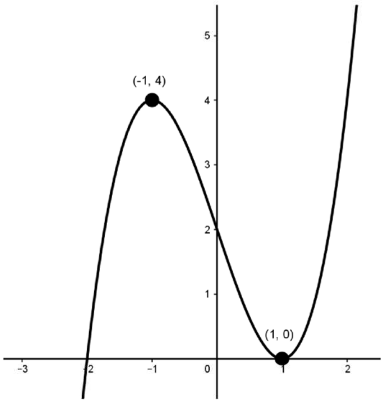
$$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array} \right. .$$

Dando valores a la izquierda, en medio y a la derecha de las soluciones, obtenemos el signo de la derivada. Por ejemplo:

$f'(-2) = 3\cdot(-2)^2 - 3 = 12 - 3 = 9\ (+)$
$f'(0) = 3\cdot(0)^2 - 3 = 0 - 3 = -3\ \ (-)$
$f'(3) = 3\cdot(3)^2 - 3 = 27 - 3 = 24\ (+)$

El crecimiento de f(x) será, pues:

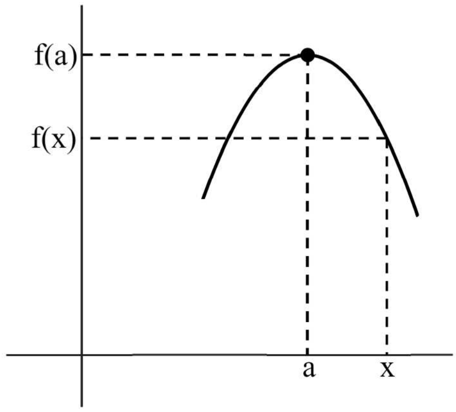




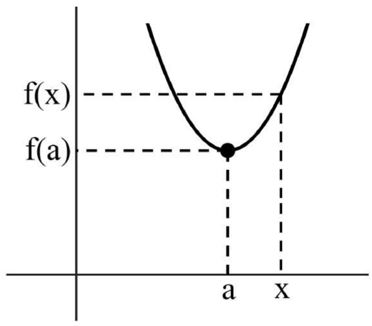
Como podemos observar en la gráfica, esta función tiene un máximo relativo en el punto $(-1, f(-1)) = (-1, 4)$ y un mínimo relativo en el punto $(1, f(1)) = (1, 0)$. Lo comprobaremos en el siguiente apartado:

3.3 Extremos relativos: máximos y mínimos.

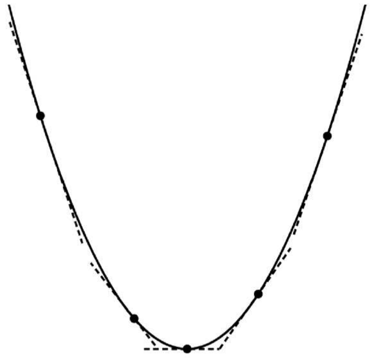
- Una función presenta un máximo relativo en el punto ‘a’ si existe un entorno $(a-r, a+r)$ en el que todas las imágenes son menores que la imagen de ‘a’. Es decir, cualquier número ‘x’ del entorno tendrá una imagen: $f(x) < f(a)$.



Análogamente, una función presenta un mínimo relativo en el punto ‘a’ si existe un entorno $(a-r, a+r)$ en el que todas las imágenes son mayores que la imagen de ‘a’. Es decir, cualquier número ‘x’ del entorno tendrá una imagen: $f(x) > f(a)$.

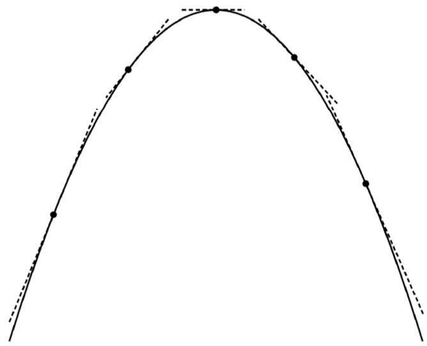


- Claramente, en los extremos relativos la derivada debe ser cero, ya que en esos puntos la función no puede tener derivada positiva (pues sería creciente) ni derivada negativa (pues sería decreciente). Sin embargo, esta condición no es suficiente por sí sola: es necesario, además, añadir otra condición.



- En los mínimos relativos, la función pasa de ser decreciente a ser creciente y las pendientes son negativas a la izquierda, luego cero y finalmente positivas. Es decir, la derivada es creciente y, por tanto, la segunda derivada será positiva. Conclusión:

$$\boxed{\text{Si } \left.\begin{array}{l} f'(a)=0 \\ f''(a)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene en 'a' un mínimo relativo.}}$$

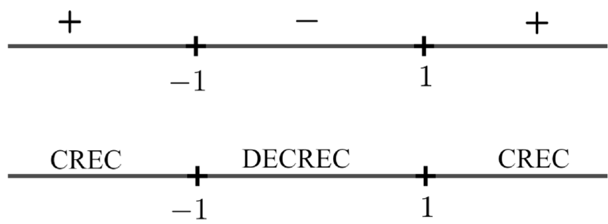


- En los máximos relativos, la función pasa de ser creciente a ser decreciente y las pendientes son positivas a la izquierda, luego cero y finalmente negativas. Es decir, la derivada es decreciente y, por tanto, la segunda derivada será negativa. Conclusión:

$$\boxed{\text{Si } \left.\begin{array}{l} f'(a)=0 \\ f''(a)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene en 'a' un máximo relativo.}}$$

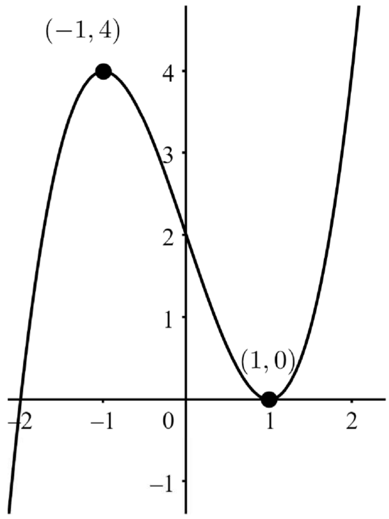
- Para estudiar de forma práctica los extremos relativos de una función, lo más recomendable es estudiar previamente el crecimiento y, después, concluir dónde se encuentran dichos extremos.

Ejemplo: estudiar los extremos relativos de la función $f(x)=x^3-3x+2$. El crecimiento ya fue estudiado en el apartado anterior:



Luego, en el punto $(-1, f(-1)) = (-1,4)$, la función tiene un máximo relativo, ya que pasa de ser creciente a ser decreciente. Además, esta observación se puede confirmar mediante el cálculo de la primera y la segunda derivada, que dan como resultado:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2-3 \Rightarrow f'(-1)=0 \\ f''(x)=6x \Rightarrow f''(-1)=-6<0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(-1)=0 \text{ y } f''(-1)<0.$$

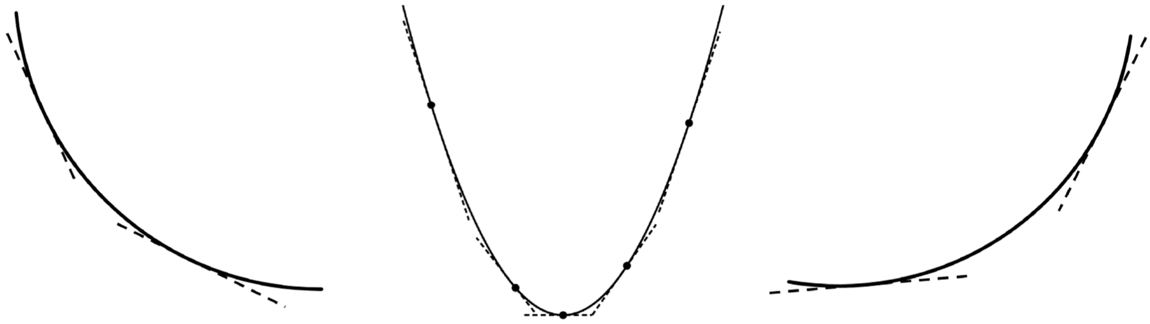


Análogamente, en el punto $(1, f(1)) = (1,0)$, la función tiene un mínimo relativo, ya que pasa de ser decreciente a ser creciente. Además, esta observación se puede confirmar mediante el cálculo de la primera y la segunda derivada, que dan como resultado:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2-3 \Rightarrow f'(1)=0 \\ f''(x)=6x \Rightarrow f''(1)=6>0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(1)=0 \text{ y } f''(1)>0.$$

3.4 Concavidad y convexidad.

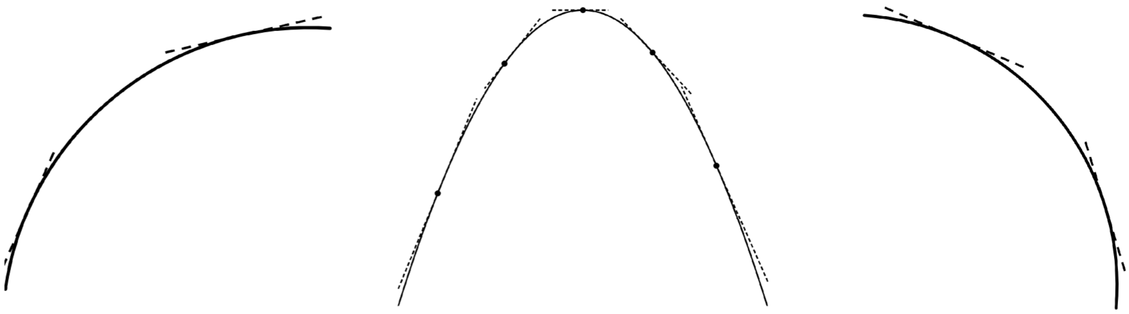
- La concavidad y convexidad de una función proporcionan información sobre su curvatura; es decir, sobre su forma y orientación.
  Una función es cóncava en un punto ‘a’ si, en un entorno del punto, la recta tangente está por debajo de la gráfica de la función.
  Los siguientes ejemplos corresponden a gráficas de funciones cóncavas:



Claramente, si la función alcanza un mínimo relativo, será cóncava. Sin embargo, una función puede ser cóncava sin tener un mínimo, como los ejemplos de la izquierda y la derecha.
Donde la función es cóncava, las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica son cada vez menos negativas o, en otros casos, más positivas. Es decir, la derivada es creciente y, por tanto, la segunda derivada será positiva.

Conclusión: $\boxed{\textbf{Si } f''(a) > 0 \Rightarrow f \textbf{ es cóncava en } a}$

- Análogamente, una función es convexa en un punto ‘a’ si, en un entorno del punto, la recta tangente está por encima de la gráfica de la función.
  Los siguientes ejemplos corresponden a gráficas de funciones convexas:



Igual que antes, si la función alcanza un máximo relativo, será convexa. Pero también puede darse la situación de ser convexa sin tener máximo relativo, como sucede en las gráficas de la izquierda y de la derecha.
Donde la función es convexa, las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica son cada vez menos positivas, o en otros casos, más negativas. Es decir, la derivada es decreciente y, por tanto, la segunda derivada es negativa.

Conclusión: $\boxed{\textbf{Si } f''(a) < 0 \Rightarrow f \textbf{ es convexa en } a}$

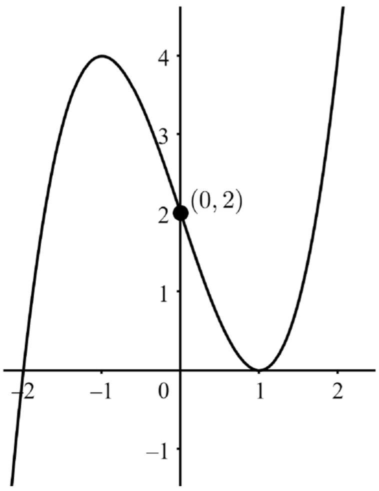
- Para estudiar de forma práctica la curvatura (concavidad y convexidad) de una función, se realiza un proceso muy similar al estudio del crecimiento, con la diferencia de que ahora se trabaja con la segunda derivada. En primer lugar, resolvemos la ecuación: $f''(x)=0$, para encontrar los puntos críticos de cambio de curvatura. A continuación, estudiamos el signo de la segunda derivada, lo que permite determinar la curvatura de la función.
  Ejemplo: estudiar la curvatura de la función: $f(x)=x^3-3x+2$.
  La derivada es $f'(x)=3x^2-3$ y la segunda derivada es $f''(x)=6x$. La ecuación $f''(x)=0$ tiene como única solución $x=0$. Dando valores a cada lado de esta solución, tendremos el signo de la segunda derivada:

  $f''(-2)=6\cdot(-2)=-12 \quad (-)$
  $f''(3)=6\cdot 3=18 \quad (+)$

  − | +
  0

  La curvatura de f(x) será pues:

  CONVEXA | CÓNCAVA
  0



- Los puntos en los que cambia la curvatura de la función se llaman puntos de inflexión. En estos puntos, la segunda derivada debe ser cero, ya que ahí no puede ser la segunda derivada negativa (pues sería convexa) ni segunda derivada positiva (porque sería cóncava).
  - Un punto de inflexión es convexo-cóncavo si la función pasa ahí de ser convexa a ser cóncava. Como sucede en el ejemplo anterior el punto $(0,2)$.
  - Un punto de inflexión es cóncavo-convexo si la función pasa ahí de ser cóncava a ser convexa.

  Para estudiar de forma práctica los puntos de inflexión, lo mejor es estudiar previamente la concavidad y convexidad y, a partir de ahí, concluir.

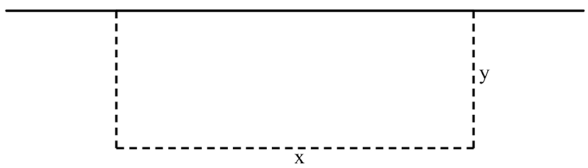
3.5 Optimización.

- La optimización es una aplicación de la derivada que está directamente relacionada con el estudio del crecimiento y los extremos relativos. Optimizar una función consiste en analizar sus extremos relativos para encontrar valores óptimos.

En los problemas de optimización es fundamental, a partir del enunciado, definir una función de una sola variable. Una vez obtenida dicha función, el proceso es sencillo: derivar, igualar a cero, resolver y estudiar el signo para conocer el crecimiento y determinar los extremos relativos.

Ejemplo: un ganadero dispone de 200 m. de valla para construir un corral de de forma rectangular y adosado a una pared, así que sólo se necesitan tres lados de valla (en la pared no hace falta).

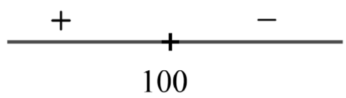
a) ¿Cuál es la relación entre la base y la altura?
b) ¿Cuál es la función área?
c) ¿Cuáles deben ser las dimensiones para obtener el mayor área posible?



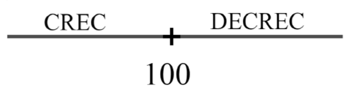
a) ¿Cuál es la relación entre la base y la altura? La relación entre la base y la altura es: $x + 2y = 200$, porque disponemos de 200 m de valla.

b) El área es: $\text{Área} = x \cdot y$, que es una función de dos variables. Para trabajar con una función de una sola variable, despejamos 'y' en la expresión: $x + 2y = 200 \Rightarrow \boxed{y = \frac{200 - x}{2}}$. La función Área a maximizar será: $f(x) = x \cdot \frac{200 - x}{2} = \frac{200x - x^2}{2}$.

c) $f'(x) = \frac{200 - 2x}{2} = 100 - x$



El crecimiento de f(x) será pues:



Claramente, tendremos en el punto 100 un máximo relativo. Por tanto, las dimensiones serán 100 m de base y 50 m de altura, con lo que se conseguirá un área máxima de 5000 m^2.

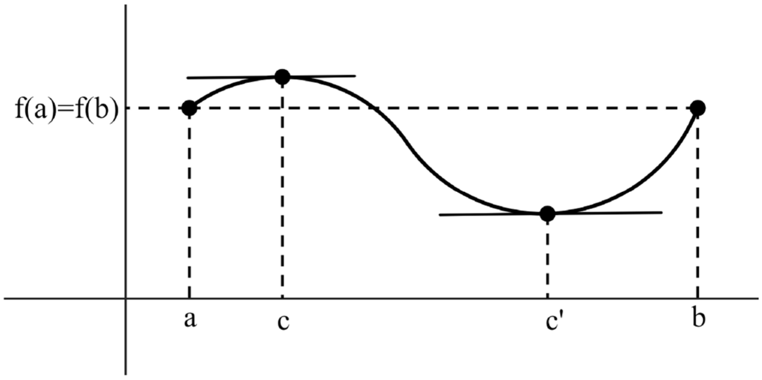
3.6 Teorema de Rolle.

- Sea f(x) una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), de forma que las imágenes de los extremos coinciden $f(a) = f(b)$. Entonces existe al menos un punto intermedio $c \in (a, b)$, en el que la derivada vale cero $\left(f'(c) = 0\right)$.

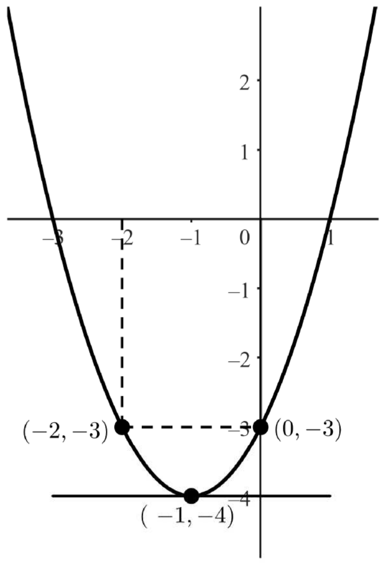
$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f \text{ cont. en } [a,b] \\ f \text{ deriv. en } (a,b) \\ \quad f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (a,b) : f'(c) = 0}$$

Es decir, si se cumplen las hipótesis, al menos existirá un punto ‘c’ en el que la derivada se anula; por tanto, la recta tangente en ese punto es horizontal.

En el siguiente gráfico se observa que hay dos puntos (c y c’) en los que se cumple la conclusión o tesis del teorema de Rolle.



Ejemplo: aplicar el teorema de Rolle a la función:
$f(x)=x^2+2x-3$ en el intervalo $[-2,0]$.
Observamos que se cumplen las condiciones del teorema: las funciones polinómicas son continuas y derivables en cualquier intervalo, y comprobamos también que las imágenes en los extremos coinciden: $f(-2)=f(0)=-3$.



$$\left.\begin{array}{r} f \text{ cont. en } [-2,0] \\ f \text{ deriv. en } (-2,0) \\ f(-2)=f(0) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (-2,0): f'(c)=0$$

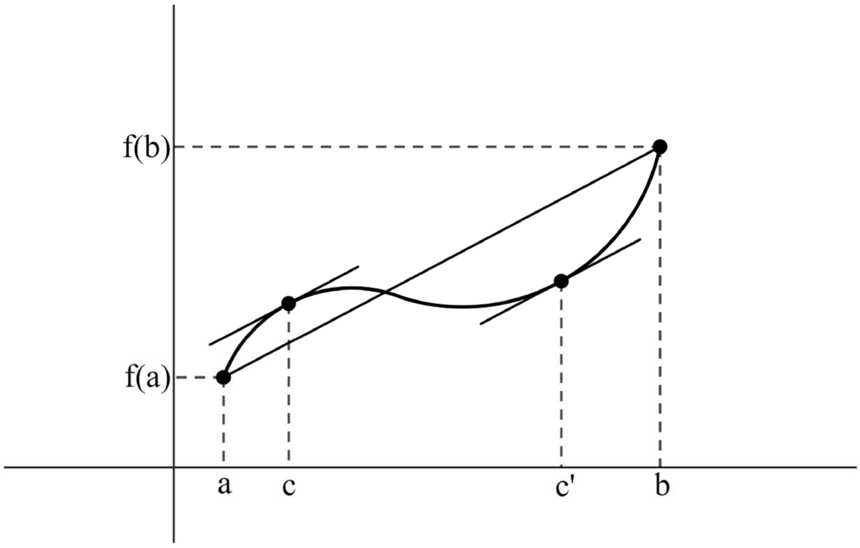
En este ejemplo, la tesis se cumple en el único extremo relativo de la función, que se obtiene resolviendo la ecuación $f'(c)=0 \Rightarrow 2c+2=0 \Rightarrow c=-1$.

3.7 Teorema del valor medio de Lagrange.

- Sea f(x) una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto (a,b). Entonces existe un punto intermedio $c \in (a,b)$, en el que la recta tangente tiene la misma pendiente que la recta secante que une los puntos extremos del intervalo $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$: O sea: $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f \text{ cont. en } [a,b] \\ f \text{ deriv. en } (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (a,b):\ f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

En el siguiente gráfico se observa que hay dos puntos (c y c'), en los que se cumple la conclusión o tesis del teorema de Lagrange.

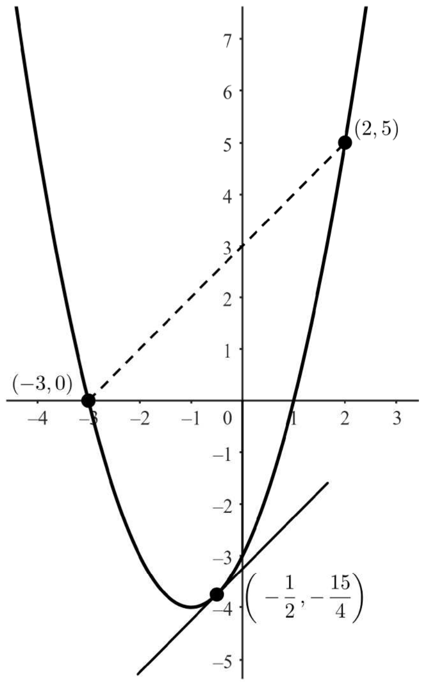


Ejemplo: aplicar el teorema de Lagrange a la función: $f(x) = x^2 + 2x - 3$ en el intervalo $[-3,2]$. Claramente, se cumplen las hipótesis del teorema porque las funciones polinómicas son continuas y derivables en cualquier intervalo.

$$\left.\begin{array}{l} \text{f cont. en } [-3,2] \\ \text{f deriv. en } (-3,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (-3,2) : f'(c) = \frac{f(2)-f(-3)}{2-(-3)}$$

$$f'(c) = \frac{5-0}{2+3} = \frac{5}{5} = 1 \Rightarrow f'(c) = 1 \Rightarrow 2c + 2 = 1 \Rightarrow c = \frac{-1}{2}$$

En este ejemplo, la tesis se cumple en el punto $c = \frac{-1}{2}$, que es el punto en el que la recta tangente tiene la misma pendiente que la cuerda que une los puntos: $(-3, f(-3))$ y $(2, f(2))$. Ambas rectas tienen pendiente 1.



3.8 Regla de L'Hôpital.

- La regla de L'Hôpital es una consecuencia de los teoremas anteriores y nos da una fórmula para resolver límites en los que aparecen indeterminaciones. Sean f(x) y g(x) dos funciones continuas en un intervalo cerrado $[a,b]$ y derivables en el intervalo abierto (a,b). Supongamos que estamos interesados en calcular $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ (límite del cociente), en un punto $c \in (a,b)$ y aparece una indeterminación del tipo $\left(0/0 \text{ ó } \infty/\infty\right)$. Por último, supongamos también que existe el límite $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Entonces, el límite del cociente original se puede calcular a partir del límite del cociente de las derivadas. Es decir: $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f\ \text{cont. en } [a,b] \\ f\ \text{deriv. en } (a,b) \\ \lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0} \end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

En definitiva, bajo ciertas condiciones (que en la práctica siempre se cumplen), el límite de un cociente que presenta una indeterminación es igual al límite del cociente de sus derivadas.
Además, la regla de L'Hôpital también se puede aplicar para resolver el resto de indeterminaciones, transformando la función inicial en un cociente.

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-6x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x-5}{6x-6}=\frac{-1}{6}$

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x^2-5x+6}{3x^2-3x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{4x-5}{6x-3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{\cos x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\operatorname{sen}x-1}{\cos x-\operatorname{sen}x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}=\begin{cases}\dfrac{-2}{0^+}=-\infty \text{ si } x\to\dfrac{\pi}{2}^- \\ \dfrac{-2}{0^-}=+\infty \text{ si } x\to\dfrac{\pi}{2}^+\end{cases}$$

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 0^+}x\cdot Lx=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{Lx}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}-x=0$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{x}}=(1^\infty)\Rightarrow L\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{x}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3}{x}\cdot L(1+x)=\lim_{x\to 0}\frac{3L(1+x)}{x}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{1+x}}{1}=3\Rightarrow \text{Luego}: \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{x}}=e^3$$