Tema 4: Representación gráfica de funciones.

4.1 Dominio.

- El dominio de definición de una función es el conjunto de números reales que tienen imagen. Es muy importante conocer el dominio de una función, porque sólo ahí puede representarse gráficamente. La determinación del dominio varía según el tipo de función:
  - Función polinómica: no presenta ninguna restricción, por lo que su dominio es todo el conjunto de los números reales: $D=\mathbb{R}$.
  - Función racional: sólo habrá problemas cuando el denominador sea 0 y esos números no estarán en el dominio. Por tanto, resolvemos la ecuación "Denominador $=0$" y las soluciones se excluyen del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Ejemplo, hallar el dominio de las siguientes funciones:

    $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x=1$ $\quad D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

    $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}\Rightarrow x^2-1=0\Rightarrow x=\pm1$ $\quad D=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

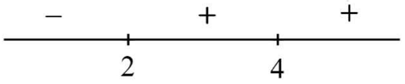
    $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-4x}\Rightarrow x^2-4x=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=4\end{cases}$ $\quad D=\mathbb{R}\setminus\{0,4\}$.
  - Función irracional: estará definida en aquellos números en los que el radicando sea mayor o igual que cero. Es decir, el dominio es el conjunto solución de la inecuación "Radicando ≥ 0".

    Ejemplo, hallar el dominio de las siguientes funciones:

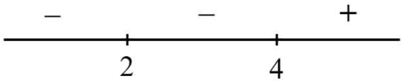
    $f(x)=\sqrt{x-3}\Rightarrow x-3\geq0\Rightarrow x\geq3$ $\quad D=[3,+\infty)$.

    $f(x)=\sqrt{x^2-6x+8}\Rightarrow x^2-6x+8\geq0\Rightarrow$ Descomponemos en factores el polinomio: $x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$ y, después, analizamos el signo de cada factor para determinar el signo del producto:

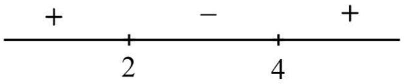
    Signo de $x-2$:



    Signo de $x-4$:



    Signo de $(x-2)(x-4)$:



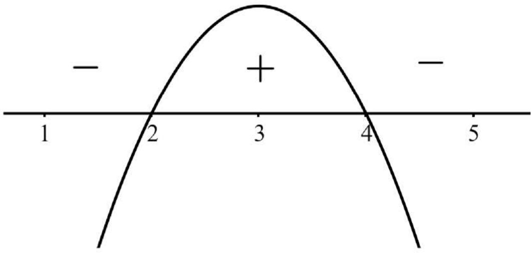
    Luego, el dominio es: $D=(-\infty,2]\cup[4,+\infty)$, que es donde el radicando o polinomio es positivo o cero.

  - Función logarítmica: el argumento del logaritmo deberá ser estrictamente positivo, con lo que habrá que hallar la solución de la inecuación "Argumento >0". Ejemplo: hallar el dominio de las siguientes funciones:

    $f(x)=\log_2(x+2)\Rightarrow x+2>0\Rightarrow x>-2$. Luego: $D=(-2,+\infty)$.

$f(x)=\ln(-x^2+6x-8)\Rightarrow -x^2+6x-8>0$

Resolveremos ahora la inecuación de forma gráfica, fijándonos en qué números la parábola es positiva. Es decir, en qué intervalos está por encima del eje de abscisas: $D=(2,4)$.



- Si la función es mixta, porque intervienen diversos tipos de los anteriores, el dominio final será la intersección de los dominios parciales.

Ejemplo: hallar el dominio de las siguientes funciones:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+3}}{x-1}\Rightarrow\begin{cases}x+3\geq 0\Rightarrow x\geq -3\\ x-1=0\Rightarrow x=1\end{cases}\qquad D=[-3,1)\cup(1,+\infty).$$

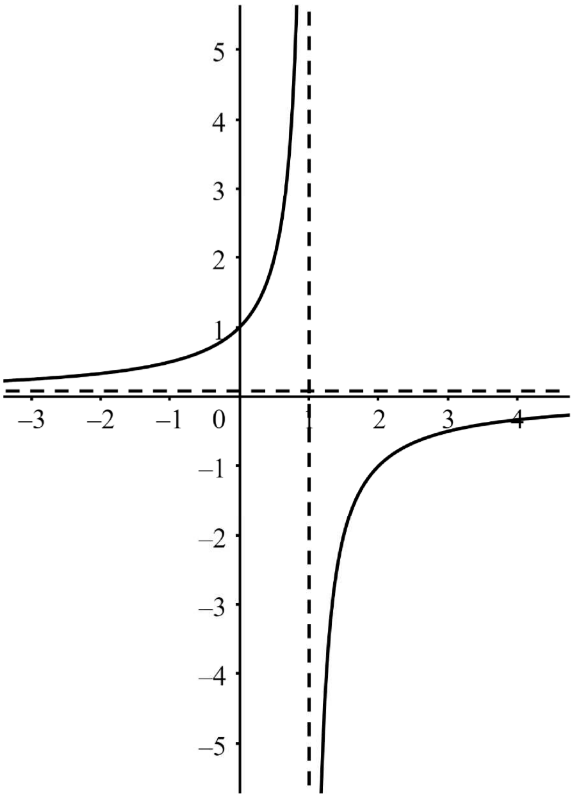
$$f(x)=\frac{\ln(-x^2+6x-8)}{x-3}\Rightarrow\begin{cases}-x^2+6x-8>0\Rightarrow \text{Sol }(2,4)\text{ anterior}\\ x-3=0\Rightarrow x=3\end{cases}.$$

Por tanto, el dominio es: $D=(2,3)\cup(3,4)$.

4.2 Continuidad.

- Recordemos que una función es continua en un número real 'a' si el límite y la imagen en dicho punto coinciden: $\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=f(a)}$. Los puntos que no pertenecen al dominio suelen dar lugar a discontinuidades de salto infinito, por la existencia de límites laterales infinitos; en estos casos aparece una asíntota vertical.

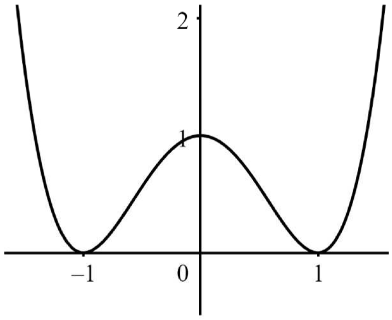
  Ejemplo: dada la función $f(x)=\frac{-1}{x+1}$, los límites laterales son: $\lim_{x\to -1^-} f(x)=+\infty$ y $\lim_{x\to -1^+} f(x)=-\infty$. Luego, no existe el límite en ese punto, ya que presenta en $x=1$ una asíntota vertical y, por tanto, una discontinuidad de salto infinito.



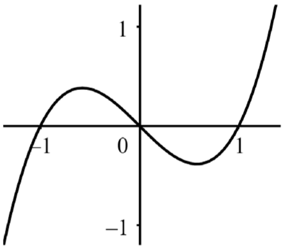
4.3 Simetrías.

- Simetría respecto al eje de ordenadas OY, también llamada simetría par. Tiene lugar cuando $\boxed{f(-x)=f(x)}$, es decir, la función es igual a la izquierda y la derecha del eje de ordenadas OY.

  Por ejemplo, la función $f(x)=x^4-2x^2+1$ es par, ya que solo contiene potencias pares de 'x'.

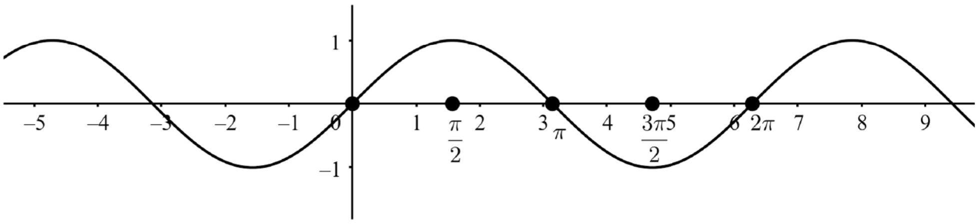


- Simetría respecto al origen O, también llamada simetría impar. Tiene lugar cuando $\boxed{f(-x) = -f(x)}$, es decir, la función es opuesta a la izquierda y la derecha del origen. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3 - x$ muestra simetría impar, ya que todos los exponentes de 'x' son impares.

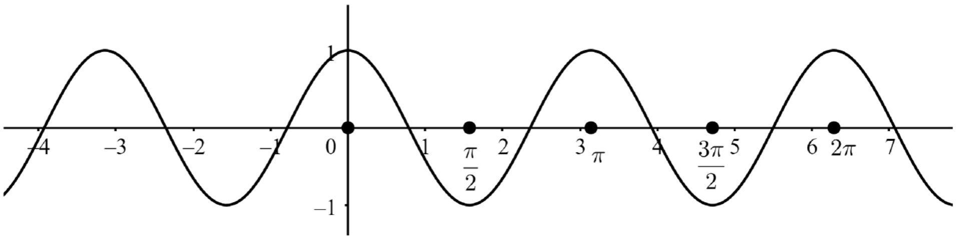


4.4 Periodicidad.

- Una función es periódica si repite sus valores de forma regular. Es decir, si existe un número T, llamado período, para el que se cumple: $\boxed{f(x+T) = f(x)}$
Esto significa que la función se repite en cada intervalo de amplitud T.
Ejemplo: $f(x) = \text{sen} x$.
Esta función es periódica de período $T = 2\pi$ (en radianes).



Ejemplo: $f(x) = \cos 2x$.
$f(x+T) = f(x) \Rightarrow \cos(2x + 2T) = \cos 2x \Rightarrow 2T = 2\pi \Rightarrow T = \pi$.



4.5 Cortes con los ejes.

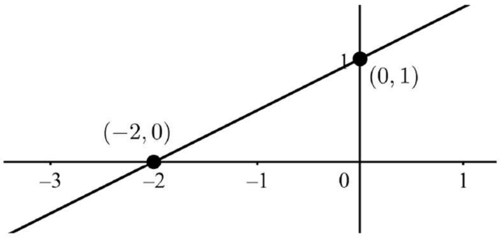
- Cortes con el eje de abscisas (OX). Los puntos situados en este eje tienen la segunda coordenada igual a 0 y, la primera, se obtiene resolviendo la ecuación $f(x) = 0$. Si las soluciones de esta ecuación son $x_1, x_2, x_3, \ldots$, etc., entonces los puntos de corte con el eje OX son: $\boxed{(x_1,0), (x_2,0), (x_3,0), \ldots}$, etc.

- Corte con el eje de ordenadas (OY). En este eje, la primera coordenada es 0 y, la 2ª coordenada (como en toda función), será su imagen $f(0)$. Por tanto, el punto de corte con el eje OY es siempre: $\boxed{(0, f(0))}$.

Ejemplo: $f(x)=\frac{x+2}{2}$. Primero, resolvemos la ecuación: $f(x)=0$.

$\frac{x+2}{2}=0 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$. El punto de corte con OX es: $(-2,0)$.

Ahora calculamos $f(0)=\frac{0+2}{2}=1$, por lo que el corte con OY es $(0,1)$.

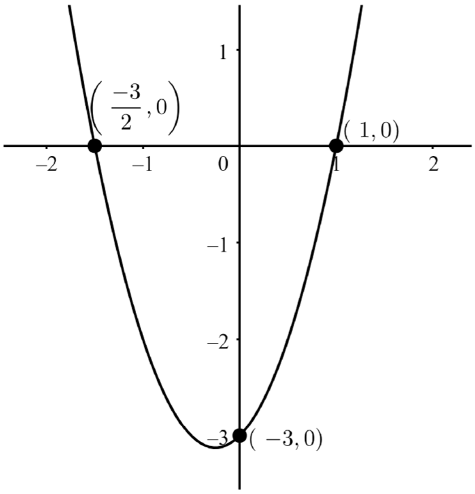


Ejemplo: $f(x)=2x^2+x-3$. $2x^2+x-3=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot2\cdot(-3)}}{2\cdot2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{-1\pm5}{4}=\begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son: $\left(-\frac{3}{2},0\right)$ y $(1,0)$.

Ahora calculamos $f(0)=2\cdot0^2+0-3=-3$, por lo que el punto de corte con el eje OY es: $(0,-3)$.



4.6 Crecimiento.

- Recordemos que:

Si $f'(a)>0 \Rightarrow$ f es creciente en un entorno de ‘a’.
Si $f'(a)<0 \Rightarrow$ f es decreciente en un entorno de ’a’.

Por tanto, tenemos que estudiar el signo de la derivada.

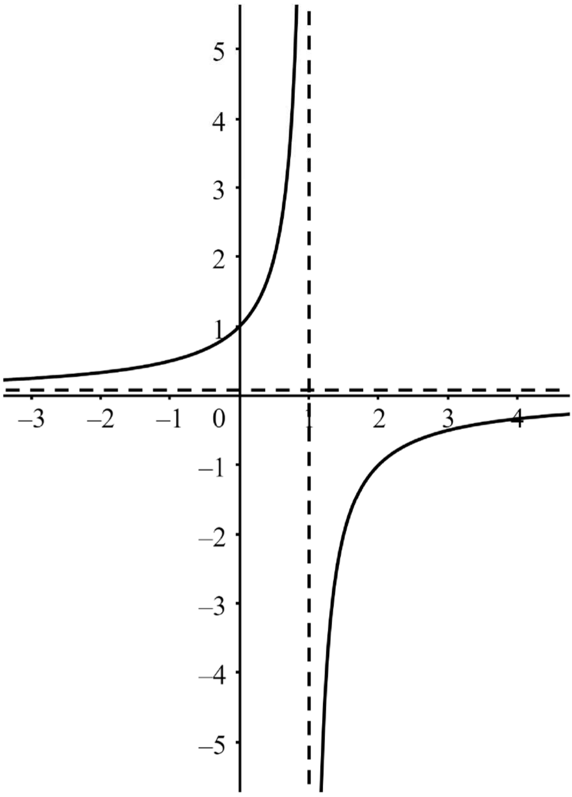
Ejemplo: estudiar el crecimiento de la función $f(x)=\dfrac{-1}{x+1}$.

La derivada es:

$$f'(x)=\frac{0\cdot(x+1)-(-1)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}.$$

En general, si la función es racional, al calcular la derivada aparece en el denominador una expresión al cuadrado, que es siempre positiva; por tanto, el signo de la derivada depende únicamente del numerador.

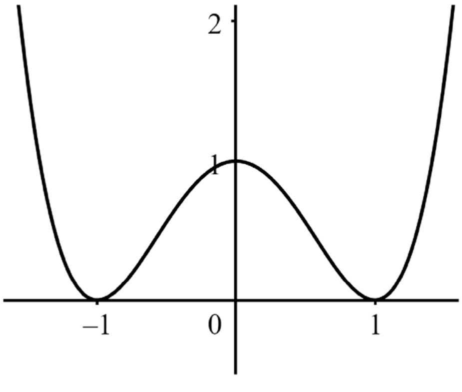
Como la derivada es siempre positiva, la función es creciente en todo su dominio.



Ejemplo: $f(x)=x^4-2x^2+1$. Resolvemos la ecuación $f'(x)=0$ que tiene tres soluciones: $4x^3-4x=0\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ x=0\\ x=1\end{cases}$.

Estudiamos el signo en cada uno de los cuatro intervalos: dando valores a la izquierda, entre -1 y 0, entre 0 y 1 y a la derecha de las soluciones:

Signo de $f'(x)$:	$-$	$+$	$-$	$+$
	-1	0	1	
Crec. de $f(x)$:	DEC	CREC	DEC	CREC
	-1	0	1	



4.7 Extremos relativos.

- Recordemos en primer lugar que:

$$\boxed{\text{Si } \left.\begin{matrix} f'(a)=0 \\ f''(a)>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene en ‘a’ un mínimo relativo.}}$$

$$\boxed{\text{Si } \left.\begin{matrix} f'(a)=0 \\ f''(a)<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene en ‘a’ un máximo relativo.}}$$

En todo caso, es recomendable estudiar previamente el crecimiento y, a partir de él, determinar los extremos relativos.

Ejemplo: estudiar los extremos relativos de la función: $f(x)=\dfrac{-1}{x^2-1}$.

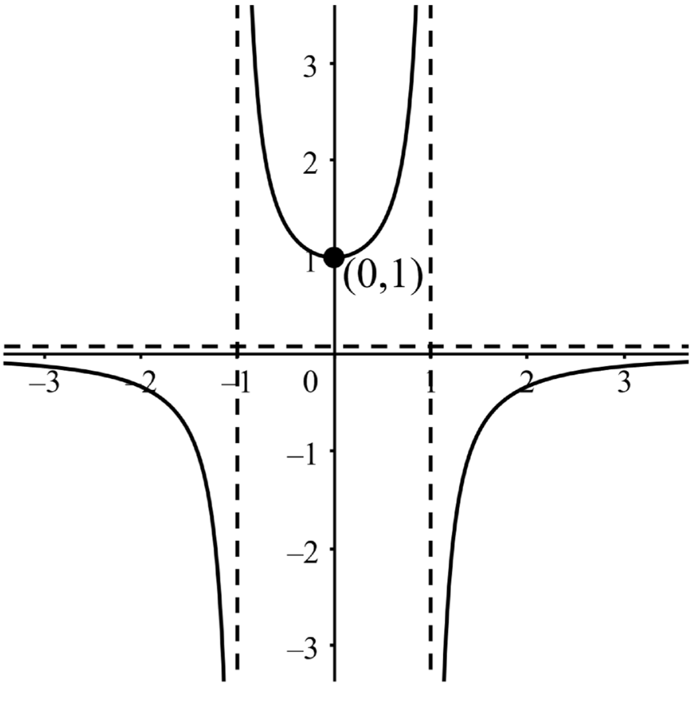
Resolvemos la ecuación $f'(x)=0$, que tiene una única solución:

$$f'(x)=\frac{0\cdot(x^2-1)-(-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{2x}{(x^2-1)^2} \quad ; \qquad \frac{2x}{(x^2-1)^2}=0 \Rightarrow x=0\,.$$

Estudiamos el signo en cada uno de los dos intervalos (a ambos lados del 0):

Signo de $f'(x)$:	−	0	+
Crecimiento de $f(x)$:	DEC	0	CREC

Luego, en $(0,f(0))=(0,1)$ la función tiene un mínimo relativo, ya que pasa de ser decreciente a ser creciente.

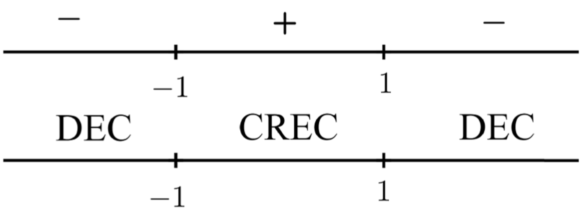


Ejemplo: $f(x) = -x^3 + 3x$. Resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$ que tiene dos soluciones: $-3x^2 + 3 = 0 \Rightarrow -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$.

Estudiamos el signo dando valores en cada uno de los tres intervalos: a la izquierda de las soluciones, entre -1 y 1 y a la derecha de las soluciones:

Signo de $f'(x)$:

Crecimiento de $f(x)$:

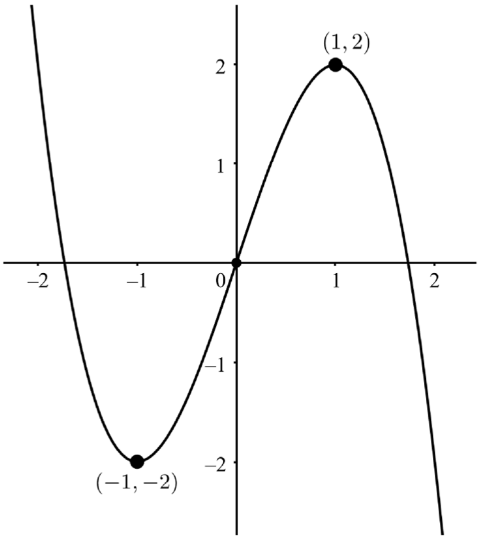


Luego, en $(-1, f(-1)) = (-1, -2)$ la función tiene un mínimo relativo, ya que pasa de ser decreciente a ser creciente. Además, esta observación se puede confirmar mediante el cálculo de la primera y la segunda derivada:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = -3x^2 + 3 \Rightarrow f'(-1) = 0 \\ f''(x) = -6x \Rightarrow f''(-1) = 6 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(-1) = 0 \text{ y } f''(-1) > 0.$$

Análogamente, en $(1, f(1)) = (1, 2)$ la función tiene un máximo relativo, ya que pasa de ser creciente a ser decreciente. Podemos comprobarlo también con el signo de la segunda derivada:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = -3x^2 + 3 \Rightarrow f'(1) = 0 \\ f''(x) = -6x \Rightarrow f''(1) = -6 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(1) = 0 \text{ y } f''(1) < 0.$$



4.8 Concavidad y convexidad.

- Es importante recordar en primer lugar que:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } f''(a) > 0 \Rightarrow f \text{ es cóncava en un entorno de ‘a’.} \\ \text{Si } f''(a) < 0 \Rightarrow f \text{ es convexa en un entorno de ‘a’.} \end{array}}$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de la segunda derivada.

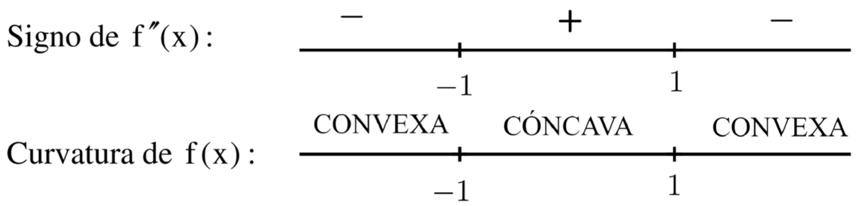
Ejemplo: estudiar la curvatura de la función: $f(x)=\dfrac{-1}{x^2-1}$.

$$f'(x)=\frac{0\cdot(x^2-1)-(-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{2x}{(x^2-1)^2}.$$

$$f''(x)=\frac{2\cdot(x^2-1)^2-2x\cdot 2\cdot(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^4-4x^2+2-8x^4+8x^2}{(x^2-1)^2}.$$

$$\frac{-6x^4+4x^2+2}{(x^2-1)^2}=0\Rightarrow -6x^4+4x^2+2=0\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ x=1\end{cases}\quad\text{(bicuadrada).}$$

Estudiamos el signo dando valores en cada uno de los tres intervalos: a la izquierda de las soluciones, entre -1 y 1 y a la derecha de las soluciones:



En general, en funciones racionales, la segunda derivada puede ser muy complicada. Por ello, en muchos casos no se estudia la concavidad, ya que aporta poca información en relación con el esfuerzo y trabajo necesario.

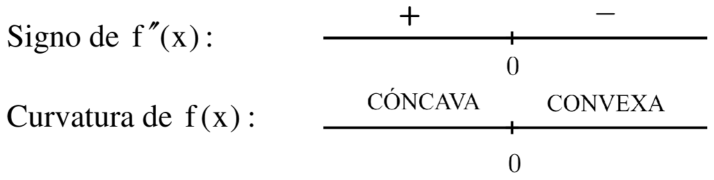
Ejemplo: estudiar la curvatura de la función: $f(x)=-x^3+3x$.

Hallamos la segunda derivada: $f'(x)=-3x^2+3=0\Rightarrow f''(x)=-6x$.

Resolvemos la ecuación: $f''(x)=0$, cuya única solución es $x=0$.

Estudiamos el signo de la segunda derivada dando valores a cada lado.

$f''(-2)=-6\cdot(-2)=12\ (+)$ y $f''(3)=-6\cdot 3=-18\ (-)$



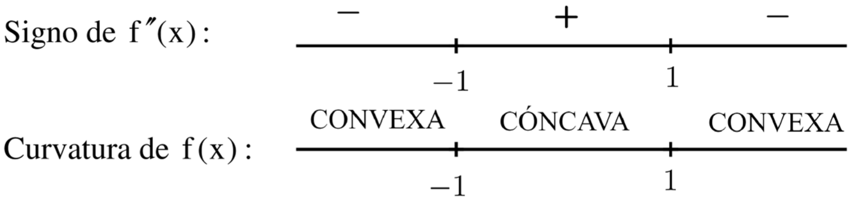
Pueden comprobarse los resultados observando las gráficas en el apartado anterior: extremos relativos.

4.9 Puntos de inflexión.

- Los puntos de inflexión son los puntos en los que cambia la curvatura de la función. En estos puntos, la segunda derivada debe ser 0.
  - Un punto de inflexión es convexo-cóncavo si la función pasa ahí de ser convexa a ser cóncava.
  - Un punto de inflexión es cóncavo-convexo si la función pasa ahí de ser cóncava a ser convexa.

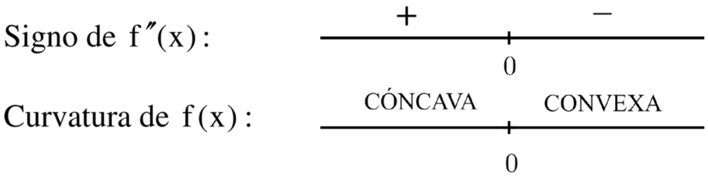
En todo caso, es recomendable estudiar previamente la concavidad y convexidad y, a partir de este estudio, determinar los puntos de inflexión.

Ejemplo: estudiar los puntos de inflexión de la función $f(x)=\dfrac{-1}{x^2-1}$. En el apartado anterior teníamos el siguiente resultado:



Aunque aparentemente hay dos posibles puntos de inflexión, en $x=-1$ y $x=1$, la función no está definida. Por tanto, no hay puntos de inflexión.

Ejemplo: estudiar los puntos de inflexión de la función $f(x)=-x^3+3x$.
En el apartado anterior teníamos el siguiente resultado, que indica que hay un cambio en la curvatura en $x=0$:

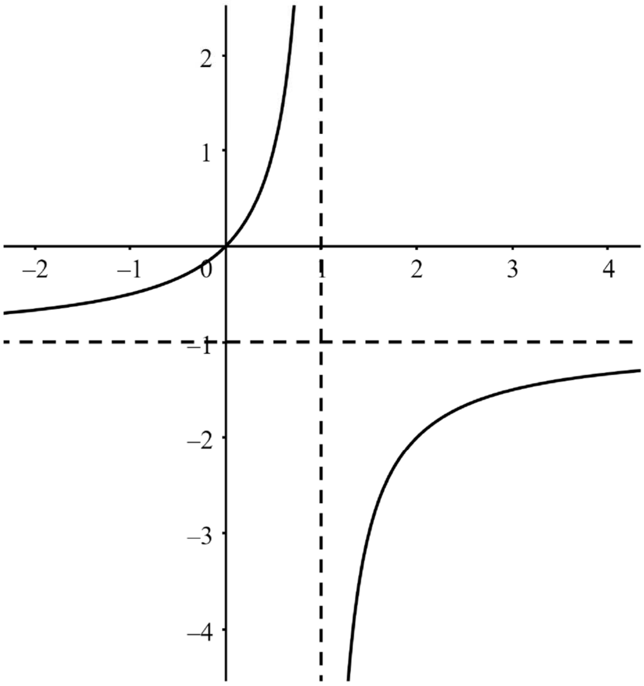


Por tanto, en el punto $\big(0,f(0)\big)=(0,0)$ tenemos un punto de inflexión cóncavo-convexo. Podemos comprobarlo visualizando la representación gráfica que vimos en el apartado: extremos relativos.

4.10 Asíntotas.

- Asíntotas verticales:
  La recta $x=a$ es una asíntota vertical si alguno de los límites laterales en el número 'a' vale infinito; es decir, $\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty}$ o $\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty}$.
  Las asíntotas verticales suelen encontrarse en los números que anulan el denominador de las funciones racionales, aunque también pueden aparecer en las funciones logarítmicas. En cualquier caso, siempre se encuentran en valores que no pertenecen al dominio de la función.
  Ejemplo: la función $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ tiene como dominio $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ y los límites laterales son: $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{x}{1-x}=+\infty$ y $\lim_{x\to 1^+}\dfrac{x}{1-x}=-\infty$. Por tanto, la recta $x=1$ es una asíntota vertical.

- Asíntotas horizontales:
  La recta $y=b$ es una asíntota horizontal si alguno de los límites en el infinito vale 'b', es decir: $\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=b}$. Ejemplo: la función $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ tiene por límites en el infinito: $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x}{1-x}=-1^+$ y $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1-x}=-1^-$. Por tanto, la recta $y=-1$ es una asíntota horizontal.



- Asíntotas oblicuas:

La recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua si coinciden los límites en el infinito de la función y de la recta; es decir, $\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (mx+n)}$. Este tipo de asíntotas pueden encontrarse en las funciones racionales cuando el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador. Además, es importante señalar que una función no puede tener una asíntota oblicua en el mismo extremo en el que presenta una asíntota horizontal.

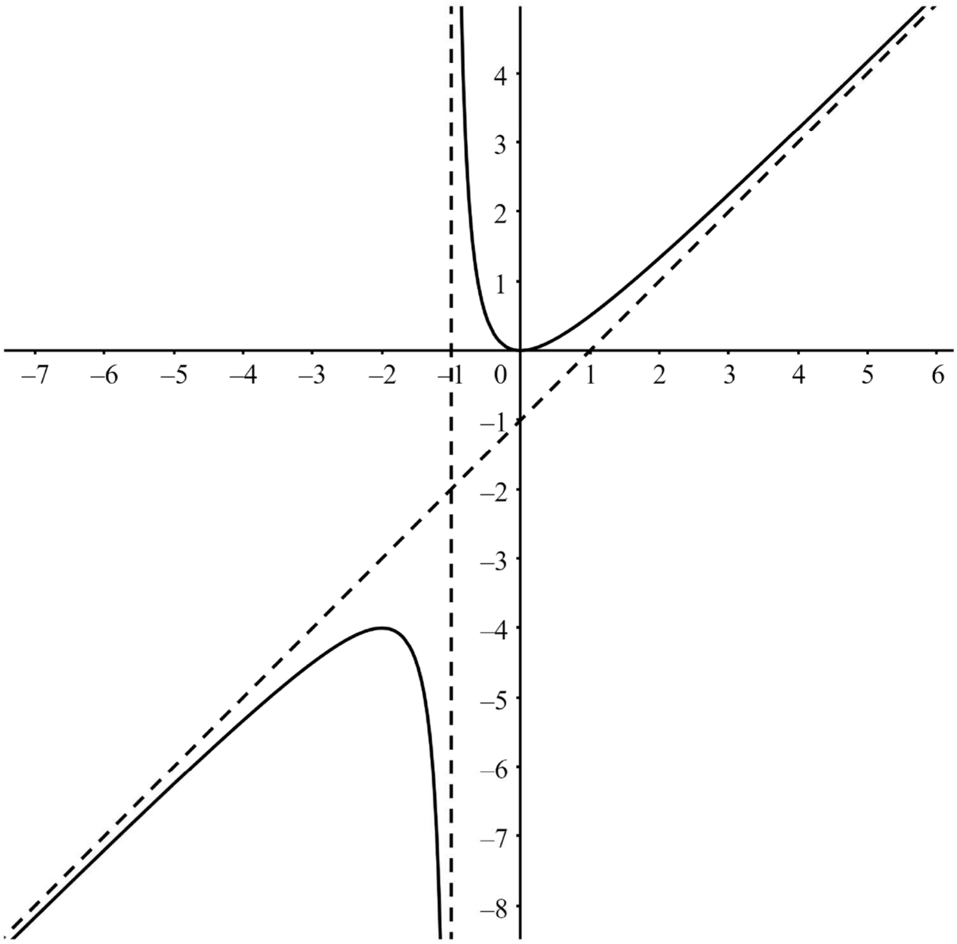
- Dividiendo entre ‘x’ en la expresión anterior, se obtiene el valor de la pendiente de la recta ‘m’: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{mx+n}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} m + \frac{n}{x} = m + 0 = m$. Luego, la pendiente es: $\boxed{m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}}$.

- Una vez conocida la pendiente ‘m’, el término independiente ‘n’ se obtiene despejando en la expresión inicial: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (mx+n) = (\lim_{x\to\pm\infty} mx) \quad + n$, de donde: $\boxed{n = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - mx\right)}$.

Ejemplo: la función $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$: $\qquad m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2+x} = 1$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x+1} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - x^2 - x}{x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$$

Por tanto, la recta $y = x - 1$ es una asíntota oblicua (y además también hay una asíntota vertical en $x = -1$).



4.11 Representación de funciones polinómicas.

- Todas las funciones polinómicas tienen por dominio $D=\mathbb{R}$, son siempre continuas, es fácil ver si son simétricas observando la paridad de los exponente, no son funciones periódicas y, lo más importante, no tienen asíntotas de ningún tipo. Por tanto, para representar estas funciones basta con estudiar: $\boxed{\text{puntos de corte, crecimiento (y extremos) y curvatura}}$.

  Ejemplo: $f(x)=-x^4+2x^2-1$.

  - Puntos de corte con los ejes: para obtener los cortes con el eje OX resolvemos la ecuación $-x^4+2x^2-1=0$. Como se trata de una ecuación bicuadrada, se resuelve haciendo el cambio de variable $z=x^2$, con lo que la ecuación pasa a ser de segundo grado. Se resuelve en 'z' y, posteriormente, se obtienen los valores de $x=\pm\sqrt{z}$.

    $-x^4+2x^2-1=0$, si $z=x^2$, tendremos: $-z^2+2z-1=0$.

    $$z=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot(-1)\cdot(-1)}}{2\cdot(-1)}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{-2}=\frac{-2\pm\sqrt{0}}{-2}=\frac{-2}{-2}=1$$

    Si $z=1\Rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\begin{cases}-1\\1\end{cases}$. Luego, hay dos puntos de corte con OX: $(-1,0)$ y $(1,0)$.

A continuación, calculamos $f(0)=-0^4+2\cdot 0^2-1=-1$. Por tanto, el punto de corte con el eje de ordenadas (OY) es $(0,-1)$.

- Crecimiento y extremos: resolvemos la ecuación $f'(x)=0$ que tiene tres soluciones: $-4x^3+4x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \end{cases}$.

Signo de $f'(x)$:

$+$		$-$		$+$		$-$
	-1		0		1	

Crec. de $f(x)$:

CREC		DEC		CREC		DEC
	-1		0		1	

En $(-1,f(-1))=(-1,0)$ la función tiene un máximo relativo.
En $(0,f(0))=(0,-1)$ tiene un mínimo relativo.
Y, finalmente, en $(1,f(1))=(1,0)$ tiene otro máximo relativo.

- Curvatura: $f'(x)=-4x^3+4x \Rightarrow f''(x)=-12x^2+4$.

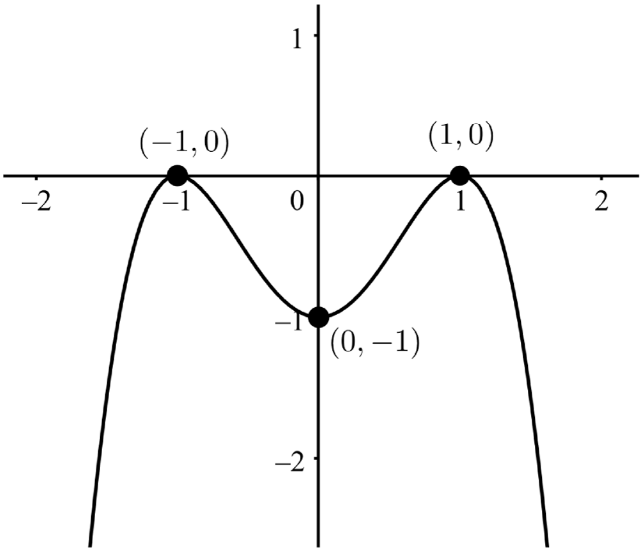
$-12x^2+4=0 \Rightarrow 3x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Signo de $f''(x)$:

$-$		$+$		$-$
	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$		$\sqrt{\frac{1}{3}}$	

Curvatura de $f(x)$:

CONVEXA		CÓNCAVA		CONVEXA
	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$		$\sqrt{\frac{1}{3}}$	



4.12 Representación de funciones racionales.

- En estas funciones estudiaremos principalmente dominio, cortes con los ejes, crecimiento (y extremos) y asíntotas.

  Ejemplo: $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$.

  - $D=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, ya que estos valores anulan el denominador.
  - Puntos de corte con los ejes: la ecuación $\dfrac{1}{x^2-1}=0$ no tiene solución, por lo que la función no tendrá cortes con el eje OX. Ahora, calculamos $f(0)=\dfrac{1}{0^2-1}=-1$. Así que el punto de corte con OY es $(0,1)$.
  - Crecimiento y extremos: $f'(x)=\dfrac{0\cdot(x^2-1)-1\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$;

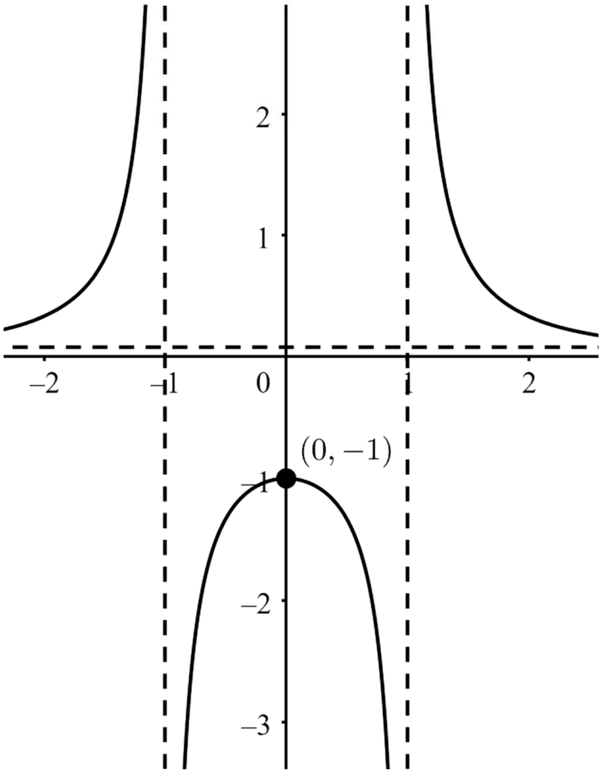
    $\dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}=0 \Rightarrow x=0$.

		0	
Signo de $f'(x)$:	$+$		$-$
Crecimiento de $f(x)$:	CREC		DEC

    Luego, en $(0,f(0))=(0,-1)$ la función tiene un máximo relativo.
  - Asíntotas: la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ tiene en los puntos que no están en el dominio los siguientes límites laterales: $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{x^2-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1}{x^2-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x^2-1}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x^2-1}=+\infty$. Luego, tenemos dos asíntotas verticales en $x=-1$ y $x=1$.

    Para las asíntotas horizontales tenemos los siguientes límites en el infinito: $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x^2-1}=0^+$ y $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x^2-1}=0^+$. Luego tenemos una asíntota horizontal $y=0$ (en ambos lados).

    En cuanto a las asíntotas oblicuas: si existen asíntotas horizontales, no se consideran las asíntotas oblicuas, ya que una función no puede tener simultáneamente ambos tipos de asíntotas en el mismo extremo.



4.13 Representación de otras funciones.

- Nos estamos refiriendo principalmente a funciones en cuya definición intervienen logaritmos o exponenciales. Para representar este tipo de funciones se estudian esencialmente: $\boxed{\text{crecimiento (y extremos) y asíntotas}}$. Posteriormente, continuamos con dominio, cortes con los ejes, entre otros aspectos, dependiendo de las características particulares de cada función.

  Ejemplo $f(x)=\dfrac{1}{1-e^x}$.

  - Crecimiento y extremos: $f'(x)=\dfrac{0\cdot(1-e^x)-1\cdot e^x\cdot(-1)}{(1-e^x)^2}=\dfrac{e^x}{(1-e^x)^2}$. Como la derivada es siempre positiva, la función será creciente siempre y, por tanto, no presenta extremos relativos.
  - Asíntotas: estudiamos los límites laterales en $x=0$, que es el único número que no pertenece al dominio de la función: $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1-e^x}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1-e^x}=-\infty$. Por tanto, existe una asíntota vertical en $x=0$.

    Los límites en el infinito son: $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{1-e^x}=\dfrac{1}{1-0^+}=1^+$ y $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{1-e^x}=\dfrac{1}{-\infty}=0^-$. Como los límites son distintos en cada extremo, se concluye que existen dos asíntotas horizontales: $y=1$ es asíntota por la izquierda e $y=0$ es asíntota por la derecha.

- Dominio: $D=\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
- Cortes con los ejes: la ecuación $\frac{1}{1-e^{x}}=0$ no tiene solución y, además, $x=0$ no tiene imagen, por lo que no hay cortes con los ejes.

Con los datos obtenidos, disponemos de suficiente información para representar gráficamente la función: