

Tema 5: Integral indefinida.

5.1 Función Primitiva.

- Una función $F(x)$ es una primitiva de la función $f(x)$ cuando se cumple que: $F'(x) = f(x)$. Por ejemplo: $F(x) = x^2$ es una primitiva de $f(x) = 2x$. Otra primitiva podría ser $F(x) = x^2 + 5$ y, en general, $F(x) = x^2 + C$, donde C es una constante. Por tanto, una función $f(x)$ tiene infinitas funciones primitivas y, al conjunto de todas ellas se le llama **integral indefinida**, que se representa

$$\text{así: } \int f(x) dx. \text{ Es decir: } \boxed{\int f(x) dx = F(x) + C \text{ con } F'(x) = f(x)}.$$

$$\text{Ejemplos: } \int 3x^2 dx = x^3 + C, \int \cos x dx = \text{sen}x + C, \int \frac{1}{x} dx = Lx + C, \text{ etc.}$$

5.2 Propiedades de la integral indefinida.

- La integral de la suma es la suma de las integrales:

$$\boxed{\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx}$$

Demostración:

$$\text{Por definición: } \int f(x) dx = F(x) + C \Rightarrow \left(\int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Vamos a ver que al derivar el segundo miembro debe resultar: $f(x) + g(x)$.

$$\left(\int f(x) dx + \int g(x) dx \right)' = \left(\int f(x) dx \right)' + \left(\int g(x) dx \right)' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

$$\text{Ejemplo: } \int 2x + \cos x dx = \int 2x dx + \int \cos x dx = x^2 + \text{sen}x + C.$$

- Las constantes o números que multiplican una función pueden sacarse fuera de la integral.

$$\boxed{\int [k \cdot f(x)] dx = k \cdot \int f(x) dx}$$

Demostración: si derivamos el segundo miembro debe obtenerse: $k \cdot f(x)$.

$$\text{En efecto: } \left(k \cdot \int f(x) dx \right)' = k \cdot \left(\int f(x) dx \right)' = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x).$$

$$\text{Ejemplo: } \int 5 \cdot \frac{1}{x} dx = 5 \cdot \int \frac{1}{x} dx = 5 \cdot Lx + C.$$

$$\text{Ejemplo: } \int \text{sen}4x dx = \int \frac{4 \text{sen}4x}{4} dx = \frac{1}{4} \int 4 \text{sen}4x dx = \frac{1}{4} (-\cos 4x) + C.$$

5.3 Integrales inmediatas.

- Teniendo en cuenta la tabla de derivadas inmediatas (así como la tabla de derivadas compuestas), se obtienen de forma natural las siguientes fórmulas, llamadas integrales inmediatas (a la izquierda).
- Además, al aplicar la regla de la cadena, se obtienen las fórmulas correspondientes a funciones compuestas (a la derecha), en las que aparece siempre la derivada de la función dentro de la integral.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{para } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \text{Ln}x + C$$

$$\int \frac{1}{x} \log_a(e) \cdot dx = \log_a x + C$$

$$\int a^x \cdot \text{Lna} \cdot dx = a^x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} dx = \sqrt[n]{x} + C$$

$$\int \text{sen}x \cdot dx = -\text{cos}x + C$$

$$\int \text{cos}x \cdot dx = \text{sen}x + C$$

$$\int \frac{1}{\text{cos}^2 x} dx = \text{tg}x + C$$

$$\int \frac{-1}{\text{sen}^2 x} dx = \text{cot}gx + C$$

$$\int \frac{\text{sen}x}{\text{cos}^2 x} dx = \text{sec}x + C$$

$$\int \frac{-\text{cos}x}{\text{sen}^2 x} dx = \text{cosec}x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{arcsen}x + C$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{arccos}x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{arctg}x + C$$

$$\int f(x)^n \cdot f'(x) dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \text{Ln}[f(x)] + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \log_a(e) \cdot dx = \log_a[f(x)] + C$$

$$\int a^{f(x)} f'(x) \cdot \text{Lna} \cdot dx = a^{f(x)} + C$$

$$\int e^{f(x)} f'(x) \cdot dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx = \sqrt{f(x)} + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}} dx = \sqrt[n]{f(x)} + C$$

$$\int \text{sen}[f(x)] f'(x) \cdot dx = -\text{cos}[f(x)] + C$$

$$\int \text{cos}[f(x)] f'(x) \cdot dx = \text{sen}[f(x)] + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\text{cos}^2[f(x)]} dx = \text{tg}[f(x)] + C$$

$$\int \frac{-f'(x)}{\text{sen}^2[f(x)]} dx = \text{cot}g[f(x)] + C$$

$$\int \frac{\text{sen}[f(x)]}{\text{cos}^2[f(x)]} f'(x) \cdot dx = \text{sec}[f(x)] + C$$

$$\int \frac{-\text{cos}[f(x)]}{\text{sen}^2[f(x)]} f'(x) \cdot dx = \text{cosec}[f(x)] + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx = \text{arcsen}[f(x)] + C$$

$$\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx = \text{arccos}[f(x)] + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} dx = \text{arctg}[f(x)] + C$$

5.4 Integrales por descomposición.

- Este método de integración consiste en aplicar las propiedades de linealidad de la integral junto con las integrales inmediatas anteriores. Solo puede aplicarse en casos en los que no aparecen productos ni cocientes y las integrales son sencillas. Ejemplos:

$$- \int (x^3 - 2x^2 + x - 1) dx = \int x^3 dx - 2 \int x^2 dx + \int x dx - \int 1 dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} - 2 \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + C$$

$$- \int \left(-2\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x} - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} \right) dx = -2 \int x^{\frac{1}{3}} dx + 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx - 3 \int \frac{1}{x} dx + 2 \int x^{-3} dx =$$

$$= -2 \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + 3 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 3Lx + 2 \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^4} + 2\sqrt{x^3} - 3Lx - \frac{1}{x^2} + C$$

$$- \int \left(\frac{-2x^2 - 5x + 6}{x-1} \right) dx$$

En primer lugar, hacemos la división, (por ejemplo, mediante la regla de Ruffini)

Después, expresamos el numerador como:
dividendo = divisor · cociente + resto.

De esta forma, podemos descomponer la fracción en suma de polinomio (el cociente) y una fracción más sencilla (el resto entre el divisor):

$$\frac{-2x^2 - 5x + 6}{x-1} = \frac{(x-1)(-2x-7) - 1}{x-1} = \frac{(x-1)(-2x-7)}{x-1} - \frac{1}{x-1} = -2x - 7 - \frac{1}{x-1}$$

$$\int \left(\frac{-2x^2 - 5x + 6}{x-1} \right) dx = \int (-2x - 7) dx - \int \frac{1}{x-1} dx =$$

$$= -2 \int x dx - 7 \int 1 dx - \int \frac{1}{x-1} dx = -2 \frac{x^2}{2} - 7x - L|x-1| + C .$$

(se escribe valor absoluto para que el logaritmo tenga sentido).

1	-2	-5	+6
	-2	-7	-1

5.5 Integrales por sustitución o cambio de variable.

- El método de sustitución consiste en aplicar un cambio de variable cuando se han podido reconocer una función y su derivada dentro de la integral. Antes de explicar este método, veamos la relación que hay entre las derivadas y las diferenciales: son distintas formas de expresar la misma idea.

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) \Rightarrow df(x) = f'(x)dx \Rightarrow \boxed{df = f'dx}.$$

Supongamos que queremos calcular una integral $\int f(x)dx$ complicada, pero

que puede expresarse como una composición de funciones en la que aparece la derivada de una de ellas: $f(x) = g(h(x))h'(x)$.

Hacemos el cambio de variable: $t = h(x)$, $dt = h'(x)dx$, y la integral inicial puede expresarse entonces de esta forma:

$$\int f(x) dx = \int g(h(x))h'(x) dx = \int g(t) dt .$$

Se supone que, para que el cambio funcione, la última integral es más sencilla que la integral inicial.

Ejemplo: $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx$, hacemos el cambio de variable: “ $t = \sin x$ ”;

$$dt = \cos x dx . \int \sin^3 x \cdot \cos x dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C .$$

- En otras ocasiones, puede interesar hacer el cambio de variable inverso:

$$x = g(t) \Rightarrow dx = dg(t) = g'(t) \cdot dt$$

$$\int f(x) dx = \int f(g(t))g'(t) dt$$

Ejemplo: $\int \frac{1}{x \cdot \sqrt{x-1}} dx$

Hacemos el cambio de variable: $x - 1 = t^2 \Rightarrow x = 1 + t^2 \Rightarrow 1 \cdot dx = 2t \cdot dt$.

$$\int \frac{1}{x \cdot \sqrt{x-1}} dx = \int \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{t^2}} 2t dt = \int \frac{2t}{(1+t^2)t} dt = 2 \int \frac{1}{1+t^2} dt =$$

$$= 2 \arctg(t) + C = 2 \arctg(\sqrt{x-1}) + C .$$

Ejemplo: $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} dx$. Cambio de variable: $x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$ ($t = \sqrt[6]{x}$).

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt[3]{t^6} + \sqrt{t^6}} 6t^5 dt = \int \frac{6t^5}{t^2 + t^3} dt = \int \frac{6t^3}{1+t} dt =$$

$$= 6 \left[\int t^2 - t + 1 dt - \int \frac{1}{1+t} dt \right] = 6 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|1+t| \right) + C = (\text{deshaciendo el}$$

$$\text{cambio}) = 6 \left(\frac{\sqrt[6]{x^3}}{3} - \frac{\sqrt[6]{x^2}}{2} + \sqrt[6]{x} - \ln(1 + \sqrt[6]{x}) \right) + C .$$

- Para aplicar de forma práctica este método de integración, consideramos los siguientes casos más habituales:

- 1º Tipo potencial: hay que hacer el cambio de variable “ $t = \text{base}$ ”.

Ejemplo: $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$. Cambio de variable: $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$.

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{t^2} \cdot \frac{dt}{-\sin x} = \int t^{-2} dt = \frac{t^{-1}}{-1} + C = \frac{-1}{\cos x} + C .$$

- 2º Tipo logarítmico: el cambio de variable es “ $t = \text{denominador}$ ”.

Ejemplo: $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx$. Cambio de variable: $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$.

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{\sin x}{t} \cdot \frac{dt}{-\sin x} = \int -\frac{1}{t} dt = -L|t| + C = -L|\cos x| + C .$$

- 3º Tipo exponencial: el cambio de variable correcto es: “ $t = \text{exponente}$ ”.

Ejemplo: $\int 2x \cdot e^{x^2} dx$. Cambio de variable: $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$.

$$\int 2x \cdot e^{x^2} dx = \int 2x \cdot e^t \cdot \frac{dt}{2x} = \int e^t dt = e^t + C = e^{x^2} + C .$$

- 4º Tipo trigonométrico: el cambio de variable “ $t = \text{ángulo}$ ”.

Ejemplo: $\int 2x \cdot \cos x^2 dx$. Cambio de variable: $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$.

$$\int 2x \cdot \cos x^2 dx = \int 2x \cdot \cos t \frac{dt}{2x} = \int \cos t dt = \text{sent} + C = \text{sen} x^2 + C.$$

- 5º Tipo arco tangente: “ $t = \text{la base del cuadrado del denominador}$ ”.

Ejemplo: $\int \frac{2x}{1+x^4} dx$. Cambio de variable: $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$.

$$\int \frac{2x}{1+x^4} dx = \int \frac{2x}{1+(x^2)^2} \frac{dt}{2x} = \int \frac{1}{1+t^2} dt = \text{arctg}(t) + C = \text{arctg}(x^2) + C.$$

- 6º Otros casos en los que aparecen funciones trigonométricas:

a) Impar en seno: “ $t = \cos x$ ” $\Rightarrow x = \arccos t \Rightarrow dx = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\text{sen} x}{1+4\cos^2 x} dx &= \int \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+4t^2} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int \frac{-1}{1+(2t)^2} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{2}{1+(2t)^2} dt = \\ &= -\frac{1}{2} \text{arctg}(2t) = -\frac{1}{2} \text{arctg}(2 \cos x) + C. \end{aligned}$$

b) Impar en coseno: “ $t = \text{sen} x$ ” $\Rightarrow x = \arcsen t \Rightarrow dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

$$\int \text{sen}^2 x \cdot \cos x dx = \int t^2 \cdot \sqrt{1-t^2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\text{sen}^3 x}{3} + C.$$

c) Par en seno y coseno: “ $t = \text{tg} x$ ” $\Rightarrow x = \text{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2} dt$.

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{y} \quad \text{sen} x = \cos x \cdot \text{tg} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

$$\int \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)}{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)} \frac{1}{1+t^2} dt = \int \frac{t^2}{1+t^2} dt = \int 1 dt + \int \frac{-1}{1+t^2} dt =$$

$$= t - \text{arctg}(t) + C = \text{tg} x - \text{arctg}(\text{tg} x) + C = \text{tg} x - x + C.$$

d) Inversa de trigonométrica: por ejemplo, para el $\arcsen x$ el cambio de variable es “ $t = \arcsen x$ ” $\Rightarrow x = \text{sen} t \Rightarrow dx = \cos t \cdot dt$.

$$\text{Ejemplo: } \int \frac{\arcsen x}{\sqrt{-x^2+1}} dx = \int \frac{t}{\sqrt{-\text{sen}^2 t+1}} \cos t dt = \int \frac{t \sqrt{1-\text{sen}^2 t}}{\sqrt{1-\text{sen}^2 t}} dt =$$

$$= \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\arcsen x)^2}{2} + C.$$

e) Ninguno de los anteriores: “ $t = \text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ ”. Las razones trigonométricas

$$\text{serán: } \text{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \text{tg} x = \frac{2t}{1-t^2} \quad \text{y} \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ejemplo:

$$\int \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x + \cos x} dx = \int \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{\frac{1+t^2+2t+1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt =$$

$$= \int \frac{2}{2+2t} dt = 2 \int \frac{1}{1+t} dt = 2L|1+t| + C = 2L \left| 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

5.6 Integrales por partes.

- Puesto que: $dy = y' \cdot dx$, las propiedades de la diferencial son análogas a las ya conocidas en las derivadas, por ejemplo:

$$d(u+v) = (u+v)' dx = (u' + v') dx = u' dx + v' dx = du + dv.$$

$$d(u \cdot v) = (u \cdot v)' dx = (u' v + u v') dx = u' v dx + u v' dx = v du + u dv.$$

Para nuestro método, nos basaremos en ésta última propiedad:

$$d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv \Rightarrow u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du \Rightarrow \int u \cdot dv = \int d(u \cdot v) - \int v \cdot du.$$

$$\text{Como: } \int df(x) = \int f'(x) dx = f(x), \text{ entonces: } \int d(u \cdot v) = u \cdot v.$$

Por tanto, hemos conseguido una nueva fórmula: $\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}$.

Esta fórmula proporciona un método de integración, ya que permite transformar la integral inicial en otra integral, normalmente, más fácil.

$$\text{Ejemplo: } \int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{dv} dx \quad u = x \Rightarrow du = dx.$$

$$dv = e^{2x} dx \Rightarrow v = \int dv = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}.$$

$$\int x e^{2x} dx = x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \int 2 e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C.$$

$$\text{Ejemplo: } \int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\cos x}_{dv} dx \quad u = x \Rightarrow du = dx.$$

$$dv = \cos x \cdot dx \Rightarrow v = \int dv = \int \cos x dx = \operatorname{sen} x.$$

$$\int x \cos x dx = x \cdot \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x dx = x \cdot \operatorname{sen} x + \cos x + C$$

La clave del método está en elegir correctamente u y dv :

- Es habitual: $u = x^n$, por ejemplo: $\int x^n \operatorname{sen} x dx$, $\int x^n e^x dx$, $\int x^n \ln x dx$.
- En algún caso, $dv = dx$, por ejemplo: $\int \operatorname{Ln} x dx$, $\int \operatorname{arctg} x dx$.
- Ejemplos un poco más complejos: $\int x^n \operatorname{arctg} x dx$, $\int e^x \operatorname{sen} x dx$.

5.7 Integrales de funciones racionales.

- Cuando el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador, lo primero que se debe hacer es realizar la división polinómica:

$$\begin{array}{r} P(x) \quad | \quad Q(x) \\ R(x) \quad C(x) \end{array}$$

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x) \Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \Rightarrow \boxed{\int \frac{P(x)}{Q(x)} = \int C(x) + \int \frac{R(x)}{Q(x)}}.$$

Siendo: $C(x)$ el cociente (con integral inmediata, al ser un polinomio) y $R(x)$ el resto, que tiene siempre menor grado que el divisor $Q(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Ejemplo: } \int \frac{x^3 - 5x^2 + 6x + 2}{x-1} dx &= \int (x^2 - 4x + 2) dx + \int \frac{4}{x-1} dx = \\ &= \frac{x^3}{3} - 4 \frac{x^2}{2} + 2x + 4L|x-1| + C \end{aligned}$$

En lo sucesivo, supondremos que el grado del numerador es menor que el grado del denominador. El siguiente paso consiste en factorizar el denominador y se presentan los siguientes casos:

- 1º Que el denominador tenga raíces reales simples:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)} = \frac{A \cdot (x-x_2) + B \cdot (x-x_1)}{(x-x_1)(x-x_2)}$$

Si igualamos $P(x) = A \cdot (x-x_2) + B \cdot (x-x_1)$, se calculan A y B comparando coeficientes, o bien dando valores a la variable x .

Al final tendremos:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} = \int \frac{A}{(x-x_1)} dx + \int \frac{B}{(x-x_2)} dx = A \cdot L|x-x_1| + B \cdot L|x-x_2| + C.$$

$$\begin{aligned} \text{Ejemplo: } \int \frac{-x^2 + 7x + 9}{x^3 + 2x^2 - x - 2} dx \\ \frac{-x^2 + 7x + 9}{x^3 + 2x^2 - x - 2} &= \frac{-x^2 + 7x + 9}{(x+1)(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} = \\ &= \frac{A(x-1)(x+2) + B(x+1)(x+2) + C(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x+2)} \end{aligned}$$

Primera forma: igualando numeradores y dando como valores las raíces:

$$x = -1 \Rightarrow 1 = -2A \Rightarrow A = \frac{-1}{2}; \quad x = 1 \Rightarrow 15 = 6B \Rightarrow B = \frac{5}{2}; \quad x = -2 \Rightarrow -9 = 3C \Rightarrow C = -3.$$

Segunda forma: seguimos operando e igualamos coeficientes del polinomio.

$$= \frac{A(x^2 + x - 2) + B(x^2 + 3x + 2) + C(x^2 - 1)}{(x+1)(x-1)(x+2)} = \frac{(A+B+C)x^2 + (A+3B)x + (-2A+2B-C)}{(x+1)(x-1)(x+2)}.$$

$$\left. \begin{aligned} A + B + C &= -1 \\ A + 3B &= 7 \\ -2A + 2B - C &= 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \frac{-1}{2}, B = \frac{5}{2} \text{ y } C = -3.$$

La integral inicial ha quedado descompuesta en tres integrales inmediatas de

$$\begin{aligned} \text{tipo logarítmico: } \int \frac{-x^2 + 7x + 9}{x^3 + 2x^2 - x - 2} dx &= \int \frac{-1/2}{x+1} dx + \int \frac{5/2}{x-1} dx + \int \frac{-3}{x+2} dx = \\ &= -\frac{1}{2}L|x+1| + \frac{5}{2}L|x-1| - 3L|x+2| + C \end{aligned}$$

- 2º Que el denominador tenga raíces reales múltiples: (ejemplo genérico)

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{P(x)}{(x-x_1) \cdot (x-x_2)^3} = \frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)} + \frac{C}{(x-x_2)^2} + \frac{D}{(x-x_2)^3} = \\ &= \frac{A \cdot (x-x_2)^3 + B \cdot (x-x_1)(x-x_2)^2 + C \cdot (x-x_1)(x-x_2) + D \cdot (x-x_1)}{(x-x_1) \cdot (x-x_2)^3}\end{aligned}$$

Igualando los numeradores del principio y final:

$$P(x) = A \cdot (x-x_2)^3 + B \cdot (x-x_1)(x-x_2)^2 + C \cdot (x-x_1)(x-x_2) + D \cdot (x-x_1)$$

En este caso, es conveniente calcular los coeficientes A, B, C y D igualando los términos de igual grado x^3 , x^2 , x y los términos independientes.

Una vez obtenidos los coeficientes, las integrales resultantes son inmediatas.

$$\begin{aligned}\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx &= \int \frac{A}{(x-x_1)} dx + \int \frac{B}{(x-x_2)} dx + \int \frac{C}{(x-x_2)^2} dx + \int \frac{D}{(x-x_2)^3} dx = \\ &= A \cdot L|x-x_1| + B \cdot L|x-x_2| + C \frac{(x-x_2)^{-2+1}}{-2+1} + D \frac{(x-x_2)^{-3+1}}{-3+1} = \\ &= A \cdot L|x-x_1| + B \cdot L|x-x_2| + C \frac{1}{-(x-x_2)} + D \frac{1}{-2(x-x_2)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Ejemplo: } \int \frac{3x+12}{(x-2)(x+1)^2} dx &\Rightarrow \frac{3x+12}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{A(x+1)^2 + B(x-2)(x+1) + C(x-2)}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (2A-B+C)x + (A-2B-2C)}{(x-2)(x+1)^2}.\end{aligned}$$

$$3x+12 = (A+B)x^2 + (2A-B+C)x + (A-2B-2C)$$

$$\left. \begin{array}{l} A+B = 0 \\ 2A-B+C = 3 \\ A-2B-2C = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow A=2, B=-2, C=-3$$

$$\int \frac{3x+12}{(x-2)(x+1)^2} dx = \int \frac{2}{x-2} dx + \int \frac{-2}{x+1} dx + \int \frac{-3}{(x+1)^2} dx =$$

$$= 2 \cdot L|x-2| - 2 \cdot L|x+1| - 3 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + C = 2 \cdot L|x-2| - 2 \cdot L|x+1| + \frac{3}{x+1} + C$$

- 3º Que el denominador tenga raíces complejas:

Si en una ecuación de segundo grado aparece una raíz negativa, no habrá soluciones reales, pero sí dos raíces complejas conjugadas: $x = a \pm b \cdot i$.

En este caso, el denominador puede descomponerse y expresarse así:

$$\begin{aligned}Q(x) &= [x - (a + b \cdot i)] \cdot [x - (a - b \cdot i)] = [x - a - b \cdot i] \cdot [x - a + b \cdot i] = \\ &= [(x-a) - b \cdot i] \cdot [(x-a) + b \cdot i] = (x-a)^2 - (b \cdot i)^2 = (x-a)^2 + b^2.\end{aligned}$$

Una vez transformado el denominador: $\int \frac{P(x)}{Q(x)} = \int \frac{Ax+B}{(x-a)^2 + b^2}$ y la integral

se puede descomponer en suma de dos integrales inmediatas: una del tipo logarítmica y otra del tipo arco tangente.

Ejemplo: $\int \frac{x+3}{x^2+2x+4} dx$.

El denominador tiene dos raíces complejas: $x^2+2x+4=0 \begin{cases} x=-1-\sqrt{3}\cdot i \\ x=-1+\sqrt{3}\cdot i \end{cases}$.

Podemos aplicar la fórmula: $\boxed{x=a \pm b \cdot i \Rightarrow (x-a)^2 + b^2}$, o bien, obtener los números 'a' y 'b' igualando y razonando en la siguiente expresión:

$$x^2+2x+4=(x-a)^2+b^2 \Rightarrow x^2+2x+4=x^2-2ax+a^2+b^2 \Rightarrow a=-1, b=\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{x^2+2x+4} dx &= \int \frac{x+3}{(x+1)^2+3} dx = \int \frac{x}{(x+1)^2+3} dx + \int \frac{3}{(x+1)^2+3} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2-2}{(x+1)^2+3} dx + \int \frac{3}{(x+1)^2+3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+4} dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{-2}{(x+1)^2+3} dx + \int \frac{3}{(x+1)^2+3} dx = \frac{1}{2} [\text{Ln}(x+1)^2+3] + \int \frac{2}{(x+1)^2+3} dx \end{aligned}$$

Esta última integral es del tipo arco tangente:

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{(x+1)^2+3} dx &= \int \frac{\frac{2}{3}}{\frac{(x+1)^2}{3} + \frac{3}{3}} dx = \int \frac{\frac{2}{3}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{3} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx = \frac{2}{3} \sqrt{3} \cdot \text{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + C \end{aligned}$$

Luego, el resultado final es: $\frac{1}{2} [\text{Ln}(x+1)^2+3] + \frac{2}{3} \sqrt{3} \cdot \text{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$.

Ejemplo resumen: $\int \frac{3x^4-2x^3+3x^2+x-3}{x^2(x-1)(x^2+1)} dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+1} \right) dx$.

Ahora, tenemos que calcular A, B, C, D y E y, después, resolver cada una de las integrales inmediatas.

$$\begin{aligned} \frac{3x^4-2x^3+3x^2+x-3}{x^2(x-1)(x^2+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+1} = \\ &= \frac{A \cdot x(x-1)(x^2+1) + B \cdot (x-1)(x^2+1) + C \cdot x^2(x^2+1) + (Dx+E) \cdot x^2(x-1)}{x^2(x-1)(x^2+1)} \end{aligned}$$

$$3x^4-2x^3+3x^2+x-3 = A \cdot x(x-1)(x^2+1) + B \cdot (x-1)(x^2+1) + C \cdot x^2(x^2+1) + (Dx+E) \cdot x^2(x-1)$$

Si $x=0 \Rightarrow -3 = -B \Rightarrow B=3$; Si $x=1 \Rightarrow 2 = 2C \Rightarrow C=1$; Coef. de $x: 1 = -A+B \Rightarrow A=B-1=2$;

Coef. de $x^4: 3 = A+C+D \Rightarrow D=0$; Si $x=-1: 4 = 4A-4B+2C-2E \Rightarrow E=-3$.

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^4-2x^3+3x^2+x-3}{x^2(x-1)(x^2+1)} dx &= \int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{-3}{x^2+1} \right) dx = 2 \int \frac{1}{x} dx + 3 \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{x-1} dx - 3 \int \frac{1}{x^2+1} dx = \\ &= 2L|x| - \frac{3}{x} + L|x-1| - 3\text{arctg} x + C. \end{aligned}$$