

Tema 6: Integral definida.

6.1 Concepto de integral definida.

- Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$. Si dividimos este intervalo en 'n' subintervalos: $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, ..., $[x_{n-2}, x_{n-1}]$, $[x_{n-1}, b]$, podemos calcular la suma de todas las áreas de los rectángulos superiores e inferiores, obteniendo:

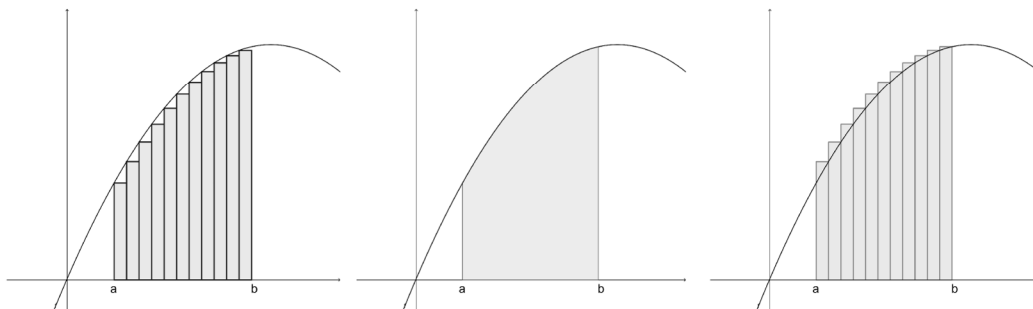
$$S_{\text{inf}}(f) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + m_3(x_3 - x_2) + \dots + m_n(x_{n-1} - x_n),$$

donde m_1, m_2 , etc., son los mínimos de $f(x)$ en cada subintervalo.

$$S_{\text{sup}}(f) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + M_3(x_3 - x_2) + \dots + M_n(x_{n-1} - x_n),$$

donde M_1, M_2 , etc., son los máximos de $f(x)$ en cada subintervalo.

Lógicamente, se cumple: $S_{\text{inf}}(f) < \text{Área bajo } f(x) < S_{\text{sup}}(f)$



Cuando 'n' tiende a infinito, es decir, cuando aumenta indefinidamente el número de subintervalos, ambas sumas tienden al mismo valor, que se define como la integral definida:

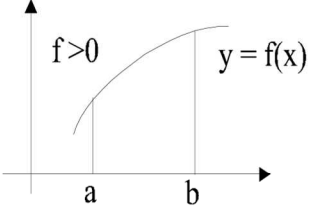
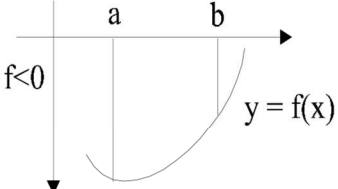
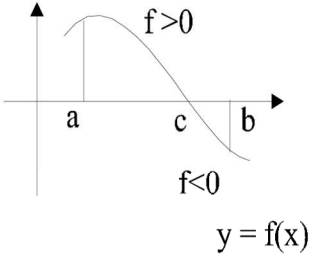
Por definición, la integral definida = $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\text{inf}} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\text{sup}}$

Si la función está por encima del eje de abscisas, el área coincide con la integral. Sin embargo, si la función está por debajo del eje 'x', los valores M_i y m_i son negativos, por lo que la integral también será negativa. En este caso, el área y la integral tienen signos opuestos; para obtener el área, es necesario tomar el valor absoluto de la integral.

En resumen, la integral definida coincide con el área, salvo por el signo cuando la función es negativa.

Cuando la función corta el eje 'x', presenta una parte positiva y otra negativa. Para hallar el área total, debemos determinar el punto de corte con el eje 'x' y calcular, por un lado, el área de la parte superior, que coincide con la integral, y, por otro, el área de la parte inferior, que es opuesta a la integral.

En cualquier caso, el área total siempre será la suma de todas las integrales en valor absoluto.

Si $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$ Área = $\int_a^b f(x) dx$	Si $f(x) \leq 0$ en $[a, b]$ Área = $-\int_a^b f(x) dx$	En general, distintos signos: Área = $\int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$
		

6.2 Propiedades de la integral definida.

- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$. Siendo $c \in [a, b]$
- $\int_a^a f(x) dx = 0$
- $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$
- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
- $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$. Siendo k un número real

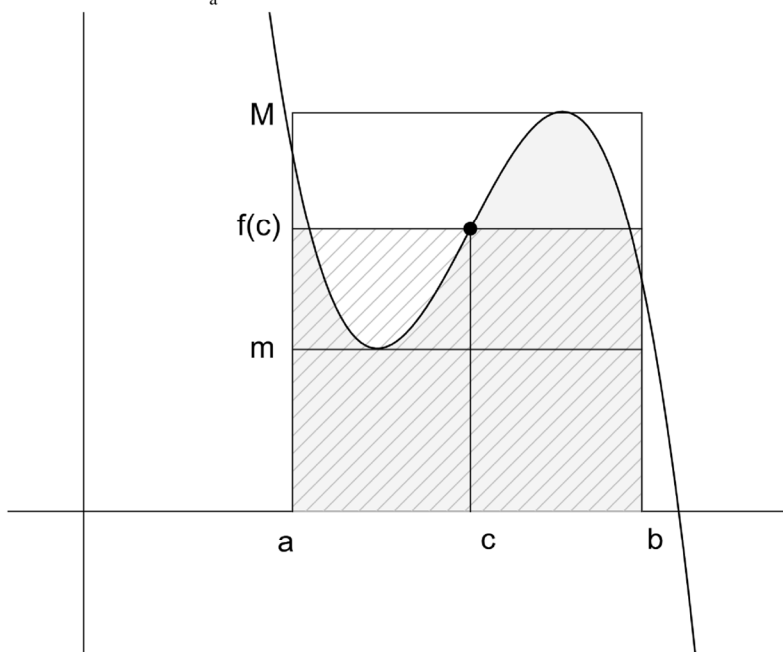
6.3 Teorema de la media integral.

- Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces existe un punto intermedio $c \in (a, b)$ en el que la integral vale: $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$.

$$f \text{ cont. en } [a, b] \Rightarrow \exists c \in (a, b): \int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

Demostración: Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ por el **Teorema de Weierstrass**, alcanza un valor máximo 'M' y, un mínimo 'm' en $[a, b]$, luego:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \Rightarrow m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M$$



Como la función f es continua, toma todos los valores comprendidos entre el máximo y el mínimo (propiedad de Darboux). Por tanto, existe un punto

$$\text{intermedio } c \in (a, b) \text{ en el que: } f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a).$$

En definitiva, el teorema de la media integral afirma que el área de la región limitada por la gráfica, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje OX, **coincide con el área de un rectángulo** que tiene:

- Como **base** $(b-a)$.
- Como **altura** un número $f(c)$, comprendido entre el máximo y el mínimo de la función.

6.4 Teorema fundamental del cálculo integral.

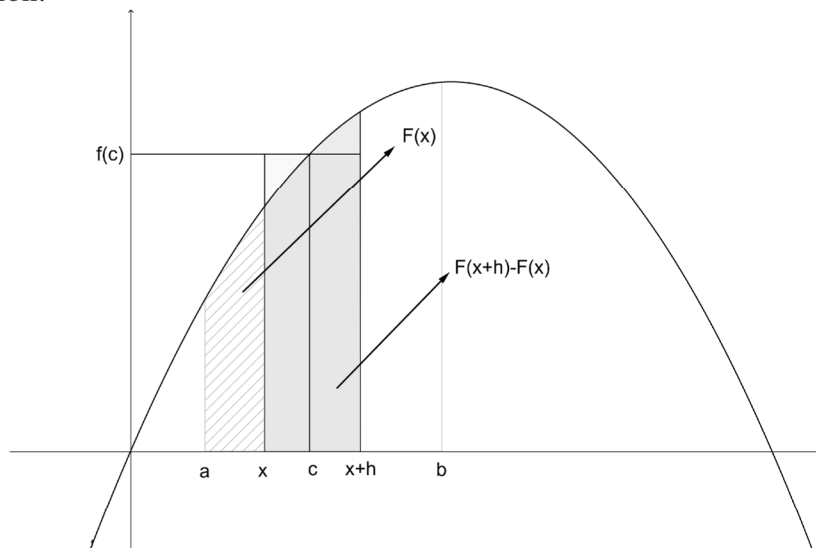
- Hasta ahora tenemos dos conceptos con nombres similares, pero que, en principio, no tienen relación: la integral indefinida sirve para hallar primitivas, y, por otra, la integral definida, que sirve para hallar el área encerrada por la gráfica de una función y el eje de abscisas.

Pero **¿existe alguna relación entre ambas?** La respuesta nos la proporciona el siguiente teorema:

- Si f es continua en $[a, b]$, entonces la función integral asociada definida por:

$F(x) = \int_a^x f(t) dt$ es una primitiva de $f(x)$ en $[a, b]$. Es decir, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Demostración:



Hemos definido la función: $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ y, por tanto, $F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t) dt$.

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h}.$$

Por el teorema de la media integral, existe $c \in (x, x+h)$ en el que $\int_x^{x+h} f(t) dt = f(c) \cdot h$.

Por tanto, $F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c) \cdot h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x)$, porque el punto intermedio 'c' depende de 'x'.

Conclusión: con este teorema hemos encontrado la relación existente entre la integral indefinida y la integral definida: acabamos de ver que la función $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$. Es decir, el área bajo la función sirve para definir una función primitiva $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ cuya derivada es $f(x)$.

6.5 Regla de Barrow.

- Consecuencia práctica para calcular una integral definida:

Sea $G(x)$ una primitiva de la función $f(x)$. Entonces: $\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$.

Demostración:

Sea $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ la primitiva definida en el teorema fundamental del cálculo integral y sea $G(x)$ otra primitiva que ha sido calculada con integral indefinida. Sabemos que si $F(x)$ y $G(x)$ son dos primitivas de $f(x)$,

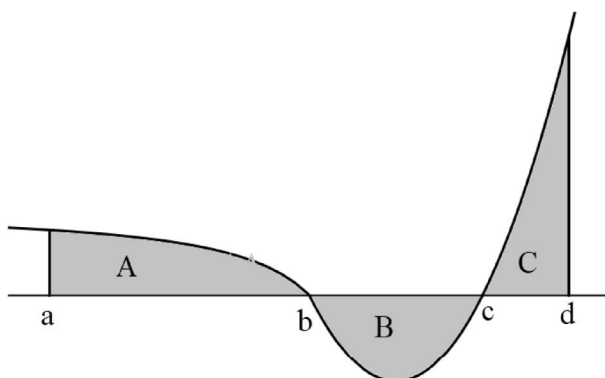
entonces se diferencian en una constante: $F(x) = \int_a^x f(t) dt = G(x) + C$.

Si $x = a$, entonces: $F(a) = \int_a^a f(t) dt = G(a) + C \Rightarrow 0 = G(a) + C \Rightarrow -C = G(a)$,

Por otro lado, si $x = b$: $F(b) = \int_a^b f(t) dt = G(b) + C = G(b) - G(a)$.

Conclusión: $\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$.

6.6 Área encerrada por una función y el eje x.



$$\text{Área} = A + B + C = \int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx$$

Ejemplo: Halla el área limitada por la función: $f(x) = x^2 - 6x + 5$ y el eje OX en el intervalo $[0,5]$.

Puntos de corte con el eje OX:

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

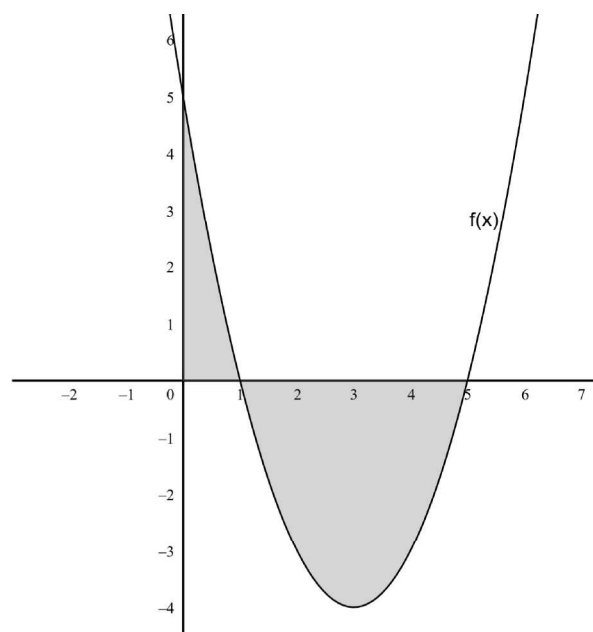
Hay dos recintos: $I = [0,1]$ y $II = [1,5]$

$$G(x) = \int (x^2 - 6x + 5) dx = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x$$

$$G(0) = 0 ; G(1) = \frac{7}{3} ; G(5) = \frac{-25}{3}$$

$$\text{Área del recinto I} = |G(1) - G(0)| = \frac{7}{3}$$

$$\text{Área del recinto II} = |G(5) - G(1)| = \frac{32}{3}$$



$$\text{Área total} = \frac{7}{3} + \frac{32}{3} = \frac{39}{3} = 13 \text{ u}^2$$

También puede calcularse de esta forma:

$$\begin{aligned} \text{Área total} &= \int_0^1 (x^2 - 6x + 5) dx - \int_1^5 (x^2 - 6x + 5) dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x \right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x \right]_1^5 = \\ &= \left(\frac{1}{3} - 3 + 5 \right) - \left(\frac{0}{3} - 0 + 0 \right) - \left[\left(\frac{125}{3} - 75 + 25 \right) - \left(\frac{1}{3} - 3 + 5 \right) \right] = \\ &= \frac{7}{3} - 0 - \left[-\frac{25}{3} - \frac{7}{3} \right] = \frac{7}{3} + \frac{25}{3} + \frac{7}{3} = \frac{39}{3} = 13 \text{ u}^2. \end{aligned}$$

Ejemplo: Halla el área limitada por la función $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$ y el eje 'x'.

Puntos de corte con el eje 'x':

$$x^3 + x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_3 = -2 \end{cases} \end{cases}$$

Hay dos recintos: 1º [-2,0] y 2º [0,1]

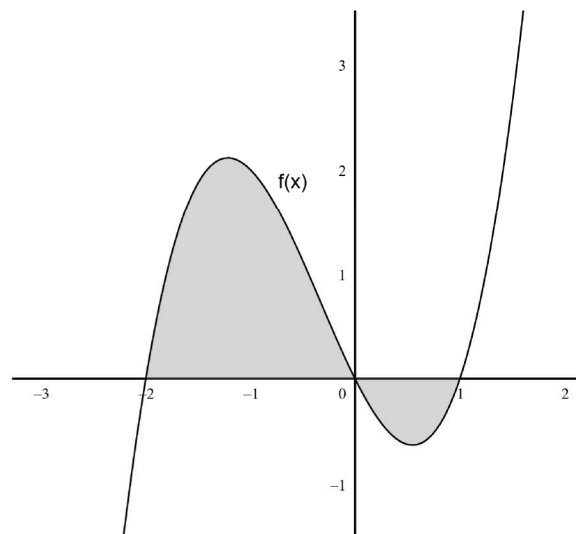
$$G(x) = \int (x^3 + x^2 - 2x) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2$$

$$G(-2) = -\frac{8}{3}; \quad G(0) = 0; \quad G(1) = \frac{-5}{12}$$

$$\text{Área del recinto 1º} = |G(0) - G(-2)| = \frac{8}{3}$$

$$\text{Área del recinto 2º} = |G(1) - G(0)| = \frac{5}{12}$$

$$\text{Área total} = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12} \text{ u}^2.$$



También puede calcularse sin valor absoluto:

$$\begin{aligned} \text{Área total} &= \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx - \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx = \\ &= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-2}^0 - \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^1 = \\ &= \left(\frac{0}{4} + \frac{0}{3} - 0 \right) - \left(\frac{16}{4} + \frac{-8}{3} - 4 \right) - \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 \right) - \left(\frac{0}{4} + \frac{0}{3} - 0 \right) \right] = \\ &= 0 - \frac{-8}{3} - \left[-\frac{5}{12} - 0 \right] = 0 + \frac{8}{3} + \frac{5}{12} + 0 = \frac{37}{12} \text{ u}^2. \end{aligned}$$

6.7 Área encerrada por dos funciones.

Sean f y g dos funciones continuas en $[a,b]$. Supongamos que sus gráficas se cortan en los puntos: $x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_n$ del intervalo $[a,b]$.

$$\text{Área} = \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)| dx + \int_{x_2}^{x_3} |f(x) - g(x)| dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} |f(x) - g(x)| dx$$

También puede calcularse sin utilizar valores absolutos, tomando en cada intervalo la diferencia entre la función superior menos la función inferior.

Ejemplo: Halla el área del recinto limitado por las funciones:

$f(x) = x + 3$ y $g(x) = x^2 - x$. Veamos que se cortan en $(-1,2)$ y $(3,6)$.

$$x + 3 = x^2 - x \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

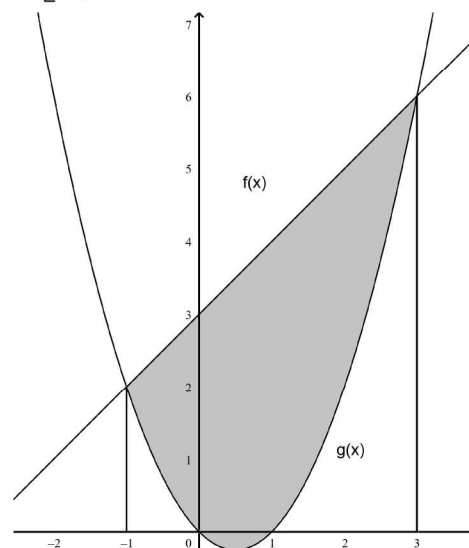
$$G(x) = \int (x^2 - 2x - 3) dx = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x.$$

$$\text{Recinto: } [-1,3] \quad G(-1) = \frac{5}{3}; \quad G(3) = -9$$

$$\text{Área} = |G(3) - G(-1)| = \left| -\frac{27}{3} - \frac{5}{3} \right| = \frac{32}{3} u^2$$

También puede hacerse así:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-1}^3 [(x+3) - (x^2-x)] dx = \\ &= \int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-1}^3 = \\ &= \left(-\frac{27}{3} + 9 + 9 \right) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3 \right) = 9 + \frac{5}{3} = \frac{32}{3} u^2 \end{aligned}$$



Ejemplo: Halla el área del recinto limitado por:

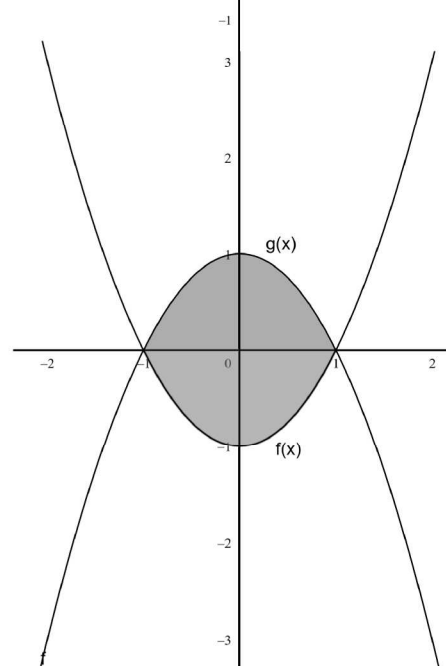
$f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 1 - x^2$.

$$\Rightarrow x^2 - 1 = 1 - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$G(x) = \int (2x^2 - 2) dx = \frac{2x^3}{3} - 2x$$

$$\text{Recinto: } [-1,1] \quad G(-1) = \frac{4}{3}; \quad G(1) = \frac{-4}{3}$$

$$\text{Área} = |G(1) - G(-1)| = \frac{8}{3} u^2.$$



Segunda forma (sin valor absoluto):

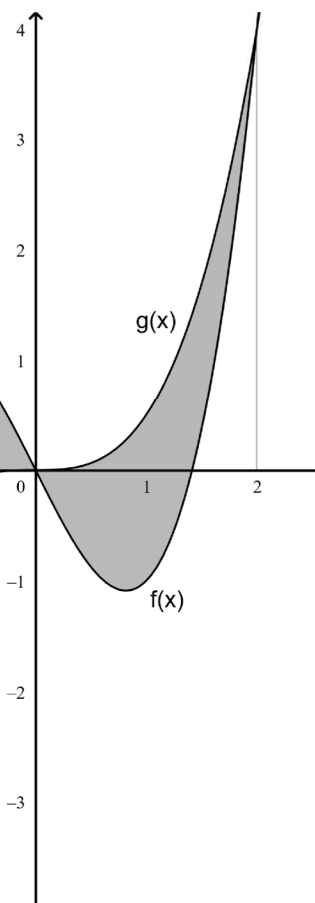
$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-1}^1 [(1-x^2)-(x^2-1)] dx = \int_{-1}^1 (-2x^2+2) dx = \\ &= \left[-\frac{2x^3}{3} + 2x \right]_{-1}^1 = \left(-\frac{2}{3} + 2 \right) - \left(\frac{2}{3} - 2 \right) = -\frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3} u^2. \end{aligned}$$

Ejemplo: Halla el área del recinto limitado por las funciones:

$$f(x) = x^3 - 2x \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{x^3}{2}.$$

$$x^3 - 2x = \frac{x^3}{2} \Rightarrow \frac{x^3}{2} - 2x = 0 \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases}.$$

Hay dos recintos: 1º $[-2,0]$ y 2º $[0,2]$



$$G(x) = \int \left(\frac{x^3}{2} - 2x \right) dx = \frac{x^4}{8} - x^2$$

$$G(-2) = -2 ; \quad G(0) = 0 ; \quad G(2) = -2$$

$$\text{Área recinto 1º} = |G(0) - G(-2)| = 2$$

$$\text{Área recinto 2º} = |G(2) - G(0)| = 2$$

$$\text{Área total} = 2 + 2 = 4 u^2.$$

Forma alternativa (sin valor absoluto):

$$\int_{-2}^0 [f(x) - g(x)] dx + \int_0^2 [g(x) - f(x)] dx =$$

$$= \int_{-2}^0 \left[(x^3 - 2x) - \left(\frac{x^3}{2} \right) \right] dx + \int_0^2 \left[\left(\frac{x^3}{2} \right) - (x^3 - 2x) \right] dx =$$

$$= \int_{-2}^0 \left(\frac{x^3}{2} - 2x \right) dx + \int_0^2 \left(-\frac{x^3}{2} + 2x \right) dx = \left[\frac{x^4}{8} - x^2 \right]_{-2}^0 + \left[-\frac{x^4}{8} + x^2 \right]_0^2 =$$

$$= \left[\left(\frac{0}{8} - 0 \right) - \left(\frac{16}{8} - 4 \right) \right] + \left[\left(-\frac{16}{8} + 4 \right) - \left(-\frac{0}{8} + 0 \right) \right] = 0 + 2 + 2 - 0 = 4 u^2$$