# Tema 7: Sistemas de Ecuaciones. Matrices y Determinantes.

## 7.1 Introducción a los sistemas de ecuaciones.

- Una ecuación lineal es una expresión de la forma: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + .... + a_nx_n = b$, donde $a_i, b \in \mathbb{R}$ (coeficientes y término independiente, respectivamente) y '$x_i$' son las incógnitas. Es decir, sólo está permitido multiplicar a las incógnitas por números o coeficientes y sumarlas. Ejemplo: $2x - y + z = -1$.
- Un sistema de m-ecuaciones lineales con n-incógnitas es una expresión de la forma: $\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ........... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$, donde:
  - $a_{ij}$ son los coeficientes, el primer subíndice $(i = 1,2,...,m)$ hace referencia a la fila o ecuación en que está el elemento y el segundo subíndice $(j = 1,2,...,n)$, indica la columna o incógnita que se está multiplicando.
  - $x_j$ son las incógnitas, $(j = 1,2,...,n)$.
  - $b_i$ son las términos independientes $(i = 1,2,...,m)$.

  Ejemplo: $\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = -1 \\ -x + y - z = 2 \\ x - y + 2z = -3 \end{array}\right\}$ Es un sist. lineal de 3 ecuaciones y 3 incógnitas.
- Una solución de un sistema es un conjunto de números, uno para cada incógnita, que cumplen simultáneamente todas las ecuaciones. Es decir, son números: $x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2, ...,\ x_n = \alpha_n$ que al sustituir por ellos resultan igualdades numéricas ciertas. Ejemplo: el sistema anterior tiene como única solución: $\boxed{\begin{array}{c} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{array}}$, porque al sustituir resulta: $\left.\begin{array}{r} 2 - 2 - 1 = -1 \\ -1 + 2 + 1 = 2 \\ 1 - 2 - 2 = -3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -1 = -1 \\ 2 = 2 \\ -3 = -3 \end{array}\right\}$.
- Dos sistemas de ecuaciones se dice que son equivalentes si tienen las mismas soluciones. Se puede pasar de un sistema a otro equivalente realizando transformaciones elementales que no alteran la solución o soluciones:
  - Intercambiar de lugar las ecuaciones.
  - Multiplicar en ambos miembros de una ecuación por un número.
  - Sumar a una ecuación otra del sistema.
  - Sumar a una ecuación otra multiplicada por un número.
  - Sumar a una ecuación una combinación lineal de las otras.
- Atendiendo al número de soluciones que tiene un sistema, podemos clasificar los sistemas de ecuaciones de la siguiente forma:

$$\text{Sistemas}\begin{cases} \text{Compatible (tiene solución)}\begin{cases}\text{Determinado (una única solución)} \\ \text{Indeterminado (infinitas soluciones)}\end{cases} \\ \text{Incompatible (no tiene solución)} \end{cases}$$

- Un caso particular de sistema es el sistema homogéneo, en el que todos los términos independientes valen 0. Estos sistemas son siempre compatibles, ya que al menos tienen la solución trivial (todas las incógnitas iguales a cero).

## 7.2 Matrices. Tipos.

- Una matriz de orden o dimensión $(m,n)$ es una forma de organizar números en una tabla de m-filas y n-columnas de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

El primer subíndice 'i' indica la fila y el segundo 'j', la columna. Así, el elemento $a_{32}$ es el que está en la tercera fila y la segunda columna. La matriz se representa por $A=(a_{ij})$.

- Dado un sistema de ecuaciones se llama matriz asociada A a la matriz de coeficientes del sistema y matriz ampliada $\overline{A}$ a la matriz que se obtiene al añadir la columna de términos independientes.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} & b_2 \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

La primera utilidad de las matrices es la expresión simplificada de los sistemas de ecuaciones:

Sea $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix}$ la matriz de incógnitas y $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_m \end{pmatrix}$ de términos independientes.

El sistema entonces se expresa matricialmente así: $\boxed{A \cdot X = B}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Ejemplo: en el sistema: $\left.\begin{array}{r} 2x-y+z=-1 \\ -x+y-z=2 \\ x-y+2z=-3 \end{array}\right\}$ las matrices asociada y ampliada

son: $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right)$. Y la expresión matricial

del sistema es: $A \cdot X = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

- Tipos de matrices:
  - Matriz fila: es la que sólo tiene una fila. Su dimensión es $(1,n)$.
    Ejemplo: $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & -3 & 0 & 1\end{pmatrix}$ tiene dimensión $(1,5)$.
  - Matriz columna: es la que sólo tiene una columna. Su dimensión es $(m,1)$.
    Ejemplo: $A=\begin{pmatrix}7\\-5\\4\end{pmatrix}$ tiene dimensión $(3,1)$.
  - Matriz nula: todos sus elementos son nulos. Ejemplo: $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.
  - Matriz cuadrada: tiene igual número de filas que de columnas, es decir, dimensión $(n,n)$. Los elementos donde $i=j$ forman la llamada diagonal principal. Ejemplo: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{pmatrix}$ es de dimensión $(3,3)$. También se dice que es una matriz cuadrada de orden 3.
  - Matriz diagonal: es aquella matriz cuadrada con elementos nulos fuera de la diagonal principal. Ejemplo: $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 5 & 0\\0 & 0 & 9\end{pmatrix}$.
  - Matriz identidad: es la matriz cuadrada cuyos elementos de la diagonal principal valen 1 y el resto de elementos son 0.
    Ejemplo: $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ es la matriz identidad de orden 3.
  - Matriz triangular superior: es una matriz en la que todos los elementos situados por debajo de la diagonal principal son nulos.
    Ejemplo: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 7 & 5\\0 & 0 & 4\end{pmatrix}$.
  - Matriz triangular inferior: es una matriz en la que todos los elementos situados por encima de la diagonal principal son nulos.
    Ejemplo: $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 7 & 0\\3 & 5 & 4\end{pmatrix}$.
    Las matrices triangulares hacen referencia a matrices cuadradas, pero también se puede hablar de matrices triangulares en un sentido general. También son conocidas por el nombre de matrices escalonadas.
  - Matriz traspuesta $A^t$ de otra matriz A, es la que se obtiene al intercambiar las filas por columnas sin alterar su orden de colocación. Si $A=(a_{ij})$, entonces $A^t=(a_{ji})$. Si A tiene dimensión $(m,n)$, entonces $A^t$ será $(n,m)$.

- Ejemplo: si $A=\begin{pmatrix}3&4&5\\6&7&8\end{pmatrix}$, entonces $A^t=\begin{pmatrix}3&6\\4&7\\5&8\end{pmatrix}$. A es de dimensión $(2,3)$ y $A^t$ es de dimensión $(3,2)$.

- Matriz opuesta: $-A$ de otra matriz A, es la que tiene por elementos los opuestos de los elementos de A. Si $A=(a_{ij})$, $-A=(-a_{ij})$.

  Ejemplo: $A=\begin{pmatrix}3&-1&0\\-5&6&7\end{pmatrix}$ $\quad -A=\begin{pmatrix}-3&1&0\\5&-6&-7\end{pmatrix}$.

- Matriz simétrica: es aquella matriz cuadrada que verifica: $A=A^t$.

  Ejemplo: $A=\begin{pmatrix}1&3&5\\3&5&-3\\5&-3&9\end{pmatrix}$.

- Matriz antisimétrica: es aquella matriz cuadrada que verifica: $A=-A^t$.

  Ejemplo: $A=\begin{pmatrix}0&-3&5\\3&0&-3\\-5&3&0\end{pmatrix}$.

## 7.3 Operaciones con matrices.

- Suma o resta de matrices: para que dos matrices se puedan sumar o restar, deben tener la misma dimensión y la nueva matriz se obtiene sumando o restando los elementos que ocupan el mismo lugar. $A\pm B=(a_{ij}\pm b_{ij})$.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b_{m1}&b_{m2}&\cdots&b_{mn}\end{pmatrix}.$$

$$A\pm B=\begin{pmatrix}a_{11}\pm b_{11}&a_{12}\pm b_{12}&\cdots&a_{1n}\pm b_{1n}\\a_{21}\pm b_{21}&a_{22}\pm b_{22}&\cdots&a_{2n}\pm b_{2n}\\\cdots\cdots&\cdots\cdots&\cdots&\cdots\cdots\\a_{m1}\pm b_{m1}&a_{m2}\pm b_{m2}&\cdots&a_{mn}\pm b_{mn}\end{pmatrix}.$$

  Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&-6\\-3&5&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-1&3&-4\\-11&5&-5\end{pmatrix}\Rightarrow A+B=\begin{pmatrix}-2&3&-10\\-14&10&-5\end{pmatrix}.$$

- Producto de una matriz por un número: se obtiene multiplicando cada uno de los elementos de la matriz por el número. $\lambda\cdot A=(\lambda\cdot a_{ij})$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow k \bullet A=\begin{pmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} & \cdots & k\cdot a_{1n} \\ k\cdot a_{21} & k\cdot a_{22} & \cdots & k\cdot a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k\cdot a_{m1} & k\cdot a_{m2} & \cdots & k\cdot a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (-2)\bullet A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 12 \\ 6 & -10 & 0 \end{pmatrix}$.

- Las matrices con respecto a las operaciones anteriores cumplen las siguientes propiedades:
  - Conmutativa: $A+B=B+A$.
  - Asociativa: $(A+B)+C=A+(B+C)$.
  - Elemento neutro: $A+0=A$. Siendo 0 la matriz nula.
  - Elemento opuesto: $A+(-A)=0$.
  - Doble distributividad: $\begin{cases} \lambda\bullet(A+B)=\lambda\bullet A+\lambda\bullet B \\ (\lambda+\mu)\bullet A=\lambda\bullet A+\lambda\bullet B \end{cases}$.
  - Asociatividad: $\lambda\bullet(\mu\bullet A)=(\lambda\cdot\mu)\bullet A$.
  - Elemento unidad: $1\bullet A=A$.

- Multiplicación de matrices. Comenzaremos viendo cómo se multiplica una matriz fila por una matriz columna del mismo tamaño:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \ldots \\ b_{n1} \end{pmatrix}=a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+\ldots+a_{1n}\cdot b_{n1}.$$

Es decir, se multiplican los elementos correspondientes y se suman. Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}=2\cdot 2+(-1)\cdot 3+3\cdot(-1)+(-2)\cdot(-1)=4-3-3+2=0.$$

Para multiplicar dos matrices, el número de columnas de la primera matriz debe coincidir con el número de filas de la segunda. La matriz producto tendrá tantas filas como la primera y tantas columnas como la segunda. Cada nuevo elemento '$c_{ij}$' se obtiene multiplicando la fila 'i' de la 1ª matriz por la columna 'j' de la 2ª matriz $\left(c_{ij}=\sum_{r=1}^{n} a_{ir}\cdot b_{rj}\right)$.

$$\underbrace{A}_{(m,n)} \bullet \underbrace{B}_{(n,k)} = \underbrace{C}_{(m,k)}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mk} \end{pmatrix}.$$

$$C=\begin{pmatrix} \sum_{r=1}^{n} a_{1r}\cdot b_{r1} & \sum_{r=1}^{n} a_{1r}\cdot b_{r2} & \cdots & \sum_{r=1}^{n} a_{1r}\cdot b_{rk} \\ \sum_{r=1}^{n} a_{2r}\cdot b_{r1} & \sum_{r=1}^{n} a_{2r}\cdot b_{r2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{2r}\cdot b_{rk} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{r=1}^{n} a_{mr}\cdot b_{r1} & \sum_{r=1}^{n} a_{mr}\cdot b_{r2} & \cdots & \sum_{r=1}^{n} a_{mr}\cdot b_{rk} \end{pmatrix}.$$

Vamos paso a paso en este ejemplo: $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\underbrace{A}_{(3,2)} \bullet \underbrace{B}_{(2,3)} = \underbrace{C}_{(3,3)} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ -5 & 3 & 7 \\ -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Fila 1 x Col 1: $c_{11}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=2\cdot 2+2\cdot(-1)=4-2=2$.

Fila 1 x Col 2: $c_{12}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=2\cdot 0+2\cdot 1=0+2=2$.

Fila 1 x Col 3: $c_{13}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=2\cdot 2+2\cdot 3=4+6=10$.

Fila 2 x Col 1: $c_{21}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=(-1)\cdot 2+3\cdot(-1)=-2-3=-5$.

Fila 2 x Col 2: $c_{22}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=(-1)\cdot 0+3\cdot 1=0+3=3$.

Fila 2 x Col 3: $c_{23}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=(-1)\cdot 2+3\cdot 3=-2+9=7$.

Fila 3 x Col 1: $c_{31}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=(-2)\cdot 2+1\cdot(-1)=-4-1=-5$.

Fila 3 x Col 2: $c_{32}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=(-2)\cdot 0+1\cdot 1=0+1=1$.

Fila 3 x Col 3: $c_{33}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=(-2)\cdot 2+1\cdot 3=-4+3=-1$.

El producto de matrices NO ES CONMUTATIVO. Hay muchas ocasiones en que sólo se puede realizar uno de los productos. En el ejemplo anterior sí que puede hacerse el producto al revés, pero el resultado es muy diferente:

$$\underbrace{B}_{(2,3)} \bullet \underbrace{A}_{(3,2)} = \underbrace{D}_{(2,2)} \Rightarrow B\bullet A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo de multiplicación de matrices: en la sala de un hospital dedicado al tratamiento de diabéticos se administra insulina de tres clases: semilenta, lenta y ultralenta. El número de unidades diarias que se aplica a cada uno de los cinco pacientes ingresados viene dado por la siguiente tabla:

| | Pac. 1 | Pac. 2 | Pac. 3 | Pac. 4 | Pac. 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Semilenta | 15 | 15 | 20 | 30 | 10 |
| Lenta | 20 | 20 | 15 | 5 | 20 |
| Ultralenta | 10 | 5 | 10 | 10 | 15 |

El número de días que ha estado internado cada paciente es:

| | Pac. 1 | Pac. 2 | Pac. 3 | Pac. 4 | Pac. 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Nº de días | 3 | 7 | 5 | 12 | 20 |

La matriz de necesidades diarias es: $A = \begin{pmatrix} 15 & 15 & 20 & 30 & 10 \\ 20 & 20 & 15 & 5 & 20 \\ 10 & 5 & 10 & 10 & 15 \end{pmatrix}$.

La matriz columna que expresa el número de días es: $D = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix}$.

Al multiplicar las matrices, tenemos el número total de unidades de cada tipo:

$$A \bullet D = \begin{pmatrix} 15 & 15 & 20 & 30 & 10 \\ 20 & 20 & 15 & 5 & 20 \\ 10 & 5 & 10 & 10 & 15 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 810 \\ 735 \\ 535 \end{pmatrix}.$$

## 7.4 Método de Gauss.

- El método de Gauss consiste en realizar transformaciones elementales en la matriz ampliada del sistema hasta conseguir que una matriz triangular superior; es decir, que todos los elementos situados por debajo de la diagonal principal sean cero. Las transformaciones elementales que mantienen la equivalencia del sistema son las siguientes:
  - Intercambiar de lugar las ecuaciones o filas.
  - Multiplicar en ambos miembros de una ecuación o fila por un número.
  - Sumar a una ecuación o fila otra del sistema.
  - Sumar a una ecuación o fila otra multiplicada por un número.
  - Sumar a una ecuación o fila una combinación lineal de las otras.

Una vez aplicadas correctamente las transformaciones y obtenida una matriz triangular superior, el sistema se resuelve de abajo hacia arriba, comenzando por la última ecuación.

Ejemplo: resolver el siguiente sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} 2x-y+z=-1 \\ -x+y-z=2 \\ x+y+2z=1 \end{array}\right\}$.

La matriz ampliada es $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$. En primer lugar, vamos a intercambiar las filas 1 y 3, ya que es conveniente que el primer coeficiente de arriba a la izquierda sea 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \boxed{\begin{array}{c} \mathbf{2^a}=2^a+1^a \\ \mathbf{3^a}=3^a-2\cdot 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{array}\right) \boxed{\mathbf{3^a}=2\cdot 3^a+3\cdot 2^a} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

Operaciones: $\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}+ \quad \begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 0 & -3 & -3 & -3 \end{array}+ \quad \begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 3 & 9 \\ 0 & -6 & -6 & -6 \\ \hline 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}+$

El sistema en forma triangular es: $\left.\begin{array}{r} x+y+2z=1 \\ 2y+z=3 \\ -3z=3 \end{array}\right\}$, de donde: $\boxed{\begin{array}{c} x=1 \\ y=2 \\ z=-1 \end{array}}$.

Ejemplo: resolver el siguiente sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r} x-y+z=2 \\ 2x-3y+z=-1 \\ x+2y-z=2 \end{array}\right\}$.

La matriz ampliada es $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \boxed{\begin{array}{c} \mathbf{2^a}=2^a-2\cdot 1^a \\ \mathbf{3^a}=3^a-1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \boxed{\mathbf{3^a}=3^a+3\cdot 2^a} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right)$$

Operaciones: $\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ \hline 0 & -1 & -1 & -5 \end{array}+ \quad \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ \hline 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}+ \quad \begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}+$

El sistema en forma triangular es: $\left.\begin{array}{r} x-y+z=2 \\ -y-z=-5 \\ -5z=-15 \end{array}\right\}$, de donde: $\boxed{\begin{array}{c} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{array}}$.

Ejemplo: estudiar la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro m: $\left.\begin{array}{r} x+y+mz=0 \\ 3x+2y+4mz=0 \\ 2x+y+3z=0 \end{array}\right\}$.

Más adelante, cuando estudiemos los determinantes, dispondremos otras herramientas. De momento utilizaremos del método de Gauss.

La matriz ampliada es $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 0 \\ 3 & 2 & 4m & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$. En primer lugar, intercambiamos las filas 1ª y 3ª para trabajar más cómodamente y analizar el sistema tras aplicar el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4m & 0 \\ 1 & 1 & m & 0 \end{array}\right) \boxed{\begin{array}{l} \mathbf{2^a}=2\cdot 2^a-3\cdot 1^a \\ \mathbf{3^a}=2\cdot 3^a-1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 8m-9 & 0 \\ 0 & 1 & 2m-3 & 0 \end{array}\right) \boxed{\mathbf{3^a}=3^a-2^a} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 8m-9 & 0 \\ 0 & 0 & -6m+6 & 0 \end{array}\right)$$

Operaciones:
$$\begin{array}{ccc|c} -6 & -3 & -9 & 0 \\ 6 & 4 & 8m & 0 \\ \hline 0 & 1 & 8m-9 & 0 \end{array}+ \qquad \begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 2m & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2m-3 & 0 \end{array}+ \qquad \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -8m+9 & 0 \\ 0 & 1 & 2m-3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -6m+6 & 0 \end{array}+$$

El sistema queda ahora expresado de forma triangular:
$\left.\begin{array}{r} 2x+y+3z=0 \\ y+(8m-9)z=0 \\ (-6m+6)z=0 \end{array}\right\}$. Atendiendo a la posibilidad de despejar 'z' en la tercera ecuación, se distinguen dos casos:

- Si $m\neq 1 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado, ya que podrá despejarse 'z' y tendremos una única solución: $\boxed{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{array}}$.
- Si $m=1 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado, pues la última ecuación desaparece y quedan dos ecuaciones con tres incógnitas, lo que da lugar a infinitas soluciones: $\left.\begin{array}{r} 2x+y+3z=0 \\ y-z=0 \end{array}\right\}$ $\boxed{\begin{array}{r} x=-2k \\ y=k \\ z=k \end{array}}$ (0,0,0) ; (−2,1,1) ; etc.

## 7.5 Rango de una matriz.

- La independencia de un conjunto de vectores se basa en las siguientes definiciones:
  - Si $\vec{w}=a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}$, entonces se dice que el vector $\vec{w}$ está expresado como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
  - Un conjunto de vectores son linealmente independientes si ninguno de ellos puede expresarse como combinación lineal de los otros.

En general, un conjunto de vectores: $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, ..., \vec{u}_n\}$ son linealmente independientes si cualquier combinación lineal de ellos igualada al vector cero implica que todos los coeficientes sean nulos:

$k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + k_3\vec{u}_3 + ... + k_n\vec{u}_n = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 = k_3 = ... = k_n = 0$.

- El rango de un conjunto de vectores es el mayor número de ellos que son linealmente independientes.
  En el plano, dos vectores son independientes si no son proporcionales.
  En el espacio, tres vectores son independientes si no están en el mismo plano.
  Las filas y las columnas de una matriz pueden estar representando vectores, por lo que tiene sentido definir el rango de una matriz como el mayor número de filas o columnas linealmente independientes. Además, el rango por filas coincide con el rango por columnas.
  El rango de una matriz se puede obtener mediante el método de Gauss, ya que las transformaciones elementales mantienen el rango invariante. Finalmente, una vez aplicado el método de Gauss, se eliminan las filas nulas, pues el vector cero es linealmente dependiente con cualquier conjunto de vectores.

Ejemplo: hallar el rango de la siguiente matriz: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 17 \end{array}\right)$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{2^a} = 2^a - 2\cdot 1^a \\ \mathbf{3^a} = 3^a - 1^a\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 & 15 \end{array}\right) \boxed{\mathbf{3^a} = 3^a + 3\cdot 2^a} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{Rg}(A) = 2$$

Operaciones:

$$\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ \hline 0 & -1 & -1 & -5 \end{array}\,+ \qquad \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & 17 \\ \hline 0 & 3 & 3 & 15 \end{array}\,+ \qquad \begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & 3 & 3 & 15 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\,+$$

Ejemplo: hallar el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & k \end{pmatrix}$, según los valores de k.

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{2^a} = 2^a - 2\cdot 1^a \\ \mathbf{3^a} = 3^a - 3\cdot 1^a\end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & -4 & k+3 \end{pmatrix} \boxed{\mathbf{3^a} = 3^a - 2^a} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg}(A) = \begin{cases} 2 \text{ si } k = 0 \\ 3 \text{ si } k \neq 0 \end{cases}$$

Operaciones:

$$\begin{array}{ccc} -2 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -4 & 3 \end{array}\,+ \qquad \begin{array}{ccc} -3 & -6 & 3 \\ 3 & 2 & k \\ \hline 0 & -4 & k+3 \end{array}\,+ \qquad \begin{array}{ccc} 0 & 4 & -3 \\ 3 & -4 & k+3 \\ \hline 0 & 0 & k \end{array}\,+$$

## 7.6 Inversa de una matriz (por el método de Gauss).

- Dada una matriz cuadrada A, su matriz inversa $A^{-1}$ es aquella que multiplicada por A resulta la matriz identidad: $\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I}$
  Más adelante, cuando estudiemos los determinantes, veremos que una matriz cuadrada de orden 'n' tiene inversa si y solo si su rango es 'n'.

La matriz inversa puede obtenerse por el método de Gauss, aplicando transformaciones elementales en la matriz doble $(A\,|\,I)$, hasta conseguir en la izquierda la matriz identidad 'I'. En ese momento, a la derecha tendremos la matriz inversa: $(I\,|\,A^{-1})$. Ejemplo: hallar la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2&3&1&0\\1&4&0&1\end{array}\right)\boxed{\mathbf{2^a}=2\cdot2^a-1^a}\left(\begin{array}{cc|cc}2&3&1&0\\0&5&-1&2\end{array}\right)\boxed{\mathbf{1^a}=5\cdot1^a-3\cdot2^a}\left(\begin{array}{cc|cc}10&0&8&-6\\0&5&-1&2\end{array}\right).$$

Operaciones:
$$\begin{array}{cc|cc}-2&-3&-1&0\\2&8&0&2\\\hline 0&5&-1&2\end{array}+\qquad\begin{array}{cc|cc}10&15&5&0\\0&-15&3&-6\\\hline 10&0&8&-6\end{array}+$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{1^a}=1^a/10\\\mathbf{2^a}=2^a/5\end{array}}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\\0&1&-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\\-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}\bullet A=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\\-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\cdot2-\frac{3}{5}\cdot1&\frac{4}{5}\cdot3-\frac{3}{5}\cdot4\\-\frac{1}{5}\cdot2+\frac{2}{5}\cdot1&-\frac{1}{5}\cdot3+\frac{2}{5}\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Ejemplo: resolver utilizando matrices el siguiente sistema: $\left.\begin{array}{r}2x+3y=-1\\x+4y=-3\end{array}\right\}$.

El sistema anterior se escribe matricialmente de la siguiente forma:
$\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}\Rightarrow A\bullet X=B$. Para resolverlo, multiplicamos por la izquierda ambos miembros por la inversa de A (calculada anteriormente):

$$\underbrace{A^{-1}\bullet A}_{I}\bullet X=A^{-1}\bullet B\Rightarrow I\bullet X=A^{-1}\bullet B\Rightarrow\boxed{X=A^{-1}\bullet B}.$$

Por tanto, $X=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\\-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}(-1)-\frac{3}{5}(-3)\\-\frac{1}{5}(-1)+\frac{2}{5}(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1\\y=-1\end{array}\right.$.

Ejemplo: hallar la matriz X que cumpla $A\bullet X\bullet B+C=D$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&2&-3\end{pmatrix}\text{ y }D=\begin{pmatrix}3&1&2\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Primero determinamos la dimensión de la matriz X y comprobamos que las operaciones entre matrices indicadas en la ecuación pueden realizarse:

$$\underbrace{\underbrace{A}_{(2,2)}\bullet\underbrace{\underbrace{X}_{(2,3)}\bullet\underbrace{B}_{(3,3)}}_{(2,3)}}_{(2,3)}+\underbrace{C}_{(2,3)}=\underbrace{D}_{(2,3)}$$

A continuación, calculamos las inversas de A y de B:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&0\\-1&1&0&1\end{array}\right)\boxed{2^a=2^a+1^a}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&0\\0&1&1&1\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

En matrices 3x3, la inversa por el método de Gauss es un proceso largo. Más adelante veremos un método mejor con determinantes. No obstante, este ejemplo es muy sencillo.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&-1&1&0&0&1\end{array}\right)\boxed{3^a=3^a+2^a}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right);\ B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

Finalmente, despejamos X multiplicando por la izquierda por $A^{-1}$ y por la derecha por $B^{-1}$, ya que el orden en el producto de matrices es importante:

$$A\cdot X\cdot B+C=D\Rightarrow A\cdot X\cdot B=(D-C)\Rightarrow \underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I}\cdot X\cdot\underbrace{B\cdot B^{-1}}_{I}=A^{-1}\cdot(D-C)\cdot B^{-1}$$

$$X=A^{-1}\cdot(D-C)\cdot B^{-1}\Rightarrow D-C=\begin{pmatrix}3&1&2\\0&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&-1&3\end{pmatrix}.$$

$$X=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&-1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-2&-1\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2&-1\\3&0&2\end{pmatrix}.$$

## 7.7 Determinantes. Definición.

- Dada una matriz cuadrada, su determinante es un número que se calcula (para matrices 2x2, 3x3 y 4x4) de la siguiente forma:

  - Orden 2: $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=\boxed{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$.

  - Orden 3: $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\boxed{\begin{array}{c}a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-\\-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\end{array}}$.

Esta fórmula se conoce con el nombre de Regla de SARRUS.

  - Orden 4:

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}=\begin{array}{l}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}+a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}+a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}+\\+a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}+a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}+a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}+a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}+\\+a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}+a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}+a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}+a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}+\\-a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}-a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}-\\-a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}-a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}-a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}-a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}-\\-a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}-a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}\end{array}$$

- Si observamos las definiciones anteriores, podemos destacar los siguientes aspectos comunes:
  - En matrices 2x2 hay una suma de 2 términos, en matrices 3x3 hay 6, y en matrices 4x4 hay 24. En general, habrá n! términos.
  - En cada término aparecen multiplicándose n-factores.
  - Cada término es un producto en el que hay un único factor de cada fila y un único factor de cada columna.
  - En cada término o producto, las filas de los factores aparecen siempre ordenadas, por lo que lo único que varía es el orden de las columnas.
  - Delante de cada producto hay un signo $+$ en la mitad de los casos y un signo $-$ en la otra mitad.

  Para completar la definición, solo falta precisar el signo de cada término o producto. Este signo depende de la paridad del número de transposiciones de los subíndices que indican las columnas.

  Una transposición es cada alteración del orden natural en una secuencia de números.

  En concreto, el signo será positivo si el número de transposiciones es par y negativo si es impar:
  - Ejemplo $a_{12}a_{21} \Rightarrow$ Columnas 21 $\Rightarrow$ 1 trasposición $\Rightarrow$ signo $-$
  - Ejemplo $a_{13}a_{21}a_{32} \Rightarrow$ Columnas 312 $\Rightarrow$ 2 trasposiciones $\Rightarrow$ signo $+$
  - Ejemplo $a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} \Rightarrow$ Columnas 2413 $\Rightarrow$ 3 trasposiciones $\Rightarrow$ signo $-$
  - Ejemplo $a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} \Rightarrow$ Columnas 3124 $\Rightarrow$ 2 trasposiciones $\Rightarrow$ signo $+$

| |
|---|
| En definitiva, dada una matriz cuadrada de orden n, su determinante es el número que se obtiene al sumar n! términos, cada uno de los cuales es un producto con n-factores tomados de modo que haya exactamente uno por cada fila y uno por cada columna. Delante de cada término se antepone un signo positivo o negativo según que el número de trasposiciones de las columnas sea par o impar, respectivamente. |

Ejemplos: $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 20 - 12 = 8$.

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} = 7 \cdot 1 \cdot 9 + 5 \cdot 0 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 6 - 4 \cdot 1 \cdot 2 - 5 \cdot 3 \cdot 9 - 7 \cdot 0 \cdot 6 = \\ = 63 + 0 + 72 - 8 - 135 - 0 = 135 - 143 = -8 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \pm a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} = +2 \cdot 1 \cdot 1(-2) = -4 .$$

Ya que sólo hay un producto no nulo, $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$ y el número de trasposiciones de 2143 es 2.

## 7.8 Propiedades de los determinantes. Método de Gauss.

1ª) $|0| = 0$. El determinante de la matriz nula es cero, ya que todos sus elementos son cero y, por tanto, todos los productos también lo son.

2ª) $\left|I\right| = 1$. El determinante de la matriz identidad es 1, porque el único término no nulo es el producto de elementos de la diagonal principal (con 0 trasp.).

3ª) Si la matriz es triangular, el determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal (por la misma razón de antes). Ejemplo: $\begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 63$.

4ª) $\left|A\right| = \left|A^t\right|$. Ejemplo:

$$\left|A\right| = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 7\cdot1\cdot9 + 5\cdot0\cdot2 + 4\cdot3\cdot6 - 4\cdot1\cdot2 - 5\cdot3\cdot9 - 7\cdot0\cdot6 = \\ = 63 + 0 + 72 - 8 - 135 - 0 = 135 - 143 = -8$$

$$\left|A^t\right| = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 7\cdot1\cdot9 + 5\cdot0\cdot2 + 4\cdot3\cdot6 - 4\cdot1\cdot2 - 5\cdot3\cdot9 - 7\cdot0\cdot6 = \\ = 63 + 0 + 72 - 8 - 135 - 0 = 135 - 143 = -8$$

5ª) Al intercambiar dos filas (o col.), el determinante cambia de signo. Ejemplo:

$$\left|A\right| = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-3)\cdot1\cdot2 + 5\cdot0\cdot2 + 4\cdot3\cdot(-1) - 4\cdot1\cdot2 - 5\cdot3\cdot2 - (-3)\cdot0\cdot(-1) = \\ = -6 + 0 - 12 - 8 - 30 - 0 = -56$$

$$\left|A'\right| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot5\cdot2 + 1\cdot4\cdot2 + 0\cdot(-3)\cdot(-1) - 0\cdot5\cdot2 - 1\cdot(-3)\cdot2 - 3\cdot4\cdot(-1) = \\ = 30 + 8 + 0 - 0 + 6 + 12 = 56$$

6ª) Si hay dos filas (o columnas) iguales, el determinante es 0. Ejemplo:

$$\left|A\right| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot1\cdot2 + 1\cdot0\cdot2 + 0\cdot3\cdot(-1) - 0\cdot1\cdot2 - 1\cdot3\cdot2 - 3\cdot0\cdot(-1) = \\ = 6 + 0 + 0 - 0 - 6 + 0 = 0$$

7ª) Si hay dos filas (o columnas) proporcionales, el determinante es 0. Ejemplo:

$$\left|A\right| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2)\cdot2 + 1\cdot4\cdot2 + 0\cdot4\cdot(-1) - 0\cdot(-2)\cdot2 - 1\cdot4\cdot2 - 3\cdot4\cdot(-1) = \\ = -12 + 8 - 0 + 0 - 8 + 12 = 0$$

8ª) Si multiplicamos una fila (o columna) por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número. Ejemplo:

$$\left|A\right| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2)\cdot1 + 1\cdot4\cdot1 + 0\cdot4\cdot(-1) - 0\cdot(-2)\cdot1 - 1\cdot4\cdot1 - 3\cdot4\cdot(-1) = \\ = -6 + 4 - 0 + 0 - 4 + 12 = 6$$

$$\left|A'\right| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2)\cdot3 + 1\cdot4\cdot3 + 0\cdot4\cdot(-3) - 0\cdot(-2)\cdot3 - 1\cdot4\cdot3 - 3\cdot4\cdot(-3) = \\ = -18 + 12 - 0 + 0 - 12 + 36 = 18$$

Luego: $\left|A'\right| = 3\cdot\left|A\right| \Rightarrow 18 = 3\cdot6$.

9ª) Si en una fila (o columna) los elementos están expresados mediante una suma de dos números, siendo $A_1$ y $A_2$ las matrices que se obtienen al considerar sólo el primer sumando y sólo el segundo sumando. Entonces, el determinante puede calcularse con la expresión: $\boxed{|A| = |A_1| + |A_2|}$. Es decir:

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_n + b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 0+1 & 2 & 3 \\ -1+1 & 1 & 4 \\ 1+2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow 13 = 6 + 7$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 0 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 4 \cdot 1 = 2 + 24 + 0 - 9 - 0 - 4 = 13$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 - 0 \cdot 4 \cdot 1 = 0 + 8 - 3 - 3 + 4 - 0 = 6$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 4 \cdot 1 = 2 + 16 + 3 - 6 - 4 - 4 = 7$$

10ª) Si una fila (o columna) es combinación lineal de las otras, el determinante vale cero.
Ejemplo: vamos a escribir una matriz en la que la 3ª fila sea una combinación lineal de las otras dos filas (3ª = 1ª+2ª) y comprobaremos que el determinante vale 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 7 + 2 \cdot 4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 7 - 1 \cdot 4 \cdot 3 = 7 + 8 + 0 - 3 - 0 - 12 = 0$$

11ª) Si a una fila (o columna) le sumamos una combinación lineal de las otras, el determinante no varía.
Ejemplo: vamos a sumarle a la 3ª fila de la matriz una combinación lineal de las otras dos filas (3ª = 3ª+1ª+2ª) y comprobaremos que el determinante no varía.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 0 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 4 \cdot 1 = 2 + 24 + 0 - 9 - 0 - 4 = 13$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 9 + 2 \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot 0 \cdot 4 - 3 \cdot 1 \cdot 4 - 2 \cdot 0 \cdot 9 - 1 \cdot 4 \cdot 4 = 9 + 32 + 0 - 12 - 0 - 16 = 13$$

12ª) Si A y B son matrices cuadradas de igual orden, se cumple: $\boxed{|A \bullet B| = |A|\cdot|B|}$.

Ejemplo: dado el producto $A \bullet B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$.

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 2 = -6$ $\quad |B| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -0 - 6 = -6$;

$|A \bullet B| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 32 = 36$ $\quad |A| \bullet |B| = (-6)\cdot(-6) = 36$.

- De la propiedad 10: (“si una fila (o columna) es combinación lineal de las otras, el determinante vale cero”), se deduce:

  Sea A una matriz cuadrada de orden ‘n’ $\Rightarrow \left\langle \boxed{\begin{matrix} |A| = 0 \Leftrightarrow Rg(A) < n \\ |A| \neq 0 \Leftrightarrow Rg(A) = n \end{matrix}} \right.$.

  Ejemplo: calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & k \end{pmatrix}$.

  $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & k \end{vmatrix} \begin{matrix} = 1\cdot1\cdot k + 2\cdot4\cdot1 + 3\cdot0\cdot3 - 3\cdot1\cdot1 - 2\cdot0\cdot k - 1\cdot4\cdot3 = \\ = k + 8 + 0 - 3 - 0 - 12 = k - 7 \end{matrix}$$

  Luego: $\begin{cases} k = 7 \Rightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow Rg(A) < 3 \\ k \neq 7 \Rightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow Rg(A) = 3 \end{cases}$. (Más adelante se verá que en el caso $k = 7$ el rango es exactamente 2).

- De la propiedad 11: (“si a una fila o columna le sumamos una combinación lineal de las otras, el determinante no varía”), se obtiene un método práctico para calcular determinantes, que consiste en aplicar el método de Gauss hasta transformar la matriz en triangular superior; en este caso, el determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal. Hay que tener en cuenta que, cada vez que se multiplica por un número la fila que está siendo transformada por el método de Gauss, el determinante también queda multiplicado por dicho número (propiedad 8).

  Ejemplo: calcular el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{\begin{matrix} \mathbf{2^a} = 2^a - 1^a \\ \mathbf{3^a} = 3^a + 1^a \\ \mathbf{4^a} = 4^a - 1^a \end{matrix}} \text{ (no varía el } |A|\text{)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \boxed{\mathbf{4^a} = 4\cdot 4^a - 3\cdot 2^a} \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -14 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \boxed{\mathbf{4^a} = 3\cdot 4^a + 14\cdot 3^a} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 48 \end{vmatrix}}{4\cdot 3} =$$

$$= \frac{1\cdot 4\cdot 3\cdot 48}{4\cdot 3} = 48 \text{ . Operaciones: } \left(\begin{array}{cccc} 0 & 12 & -8 & -4 \\ 0 & -12 & -6 & 6 \\ \hline 0 & 0 & -14 & 2 \end{array}\right)^{+} \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -42 & 6 \\ 0 & 0 & 42 & 42 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 48 \end{array}\right)^{+} .$$

Hay que observar que la fila modificada se ha multiplicado en dos ocasiones (por 4 y por 3), por lo que el determinante final será doce veces mayor que el inicial; en consecuencia, es necesario dividir entre 12 para que valor del determinante no varíe.

## 7.9 Matriz complementaria y adjunta. Desarrollo de un determinante.

- Dada una matriz cuadrada A de orden 'n', el menor complementario $\alpha_{ij}$ de un elemento $a_{ij}$ es el determinante de la matriz (de orden $n-1$) que se obtiene al eliminar la fila 'i' y la columna 'j'. La matriz complementaria de una matriz A es la que se obtiene al sustituir cada elemento por su menor complementario; es decir, $\alpha = (\alpha_{ij})$.

  Ejemplo: calcular la matriz complementaria de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

  $$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -13 \qquad \alpha_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \qquad \alpha_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

  $$\alpha_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11 \qquad \alpha_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \qquad \alpha_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

  $$\alpha_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \qquad \alpha_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \qquad \alpha_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

  Finalmente, la matriz complementaria de A es: $\alpha = \begin{pmatrix} -13 & -4 & -1 \\ -11 & -4 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

- Dada una matriz cuadrada A de orden 'n', el adjunto $A_{ij}$ de un elemento $a_{ij}$ se define a partir del menor complementario de esta forma: $\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot\alpha_{ij}}$.
  Es decir, el adjunto se obtiene a partir del menor complementario cambiando el signo cuando la suma de los subíndices (i+j) es impar.

- En el caso de una matriz 3x3, los signos que corresponden a los adjuntos son los siguientes: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$.

- Se define la matriz adjunta de una matriz A como la matriz formada por los adjuntos de sus elementos: $\text{Adj}(A) = (A_{ij})$.

  Ejemplo: calcular la matriz adjunta de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

  La matriz complementaria, ya calculada antes, es $\alpha = \begin{pmatrix} -13 & \boxed{-\mathbf{4}} & -1 \\ \boxed{-\mathbf{11}} & -4 & \boxed{\mathbf{1}} \\ 5 & \boxed{\mathbf{4}} & 1 \end{pmatrix}$.

  La matriz adjunta se obtiene a partir de la matriz complementaria cambiando de signo los elementos señalados. Por tanto, $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -13 & \mathbf{4} & -1 \\ \mathbf{11} & -4 & -\mathbf{1} \\ 5 & -\mathbf{4} & 1 \end{pmatrix}$.

- A partir de las definiciones anteriores, tenemos un método para calcular determinantes desarrollando por los elementos de una fila o columna según las siguientes fórmulas:

  - Desarrollo por la fila 'i': $\boxed{|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}}$
  - Desarrollo por la columna 'j': $\boxed{|A| = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj}}$

  Es decir, se multiplica cada elemento por su adjunto y se suman los resultados.

  Ejemplo: calcular el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

  Vamos a hacer este determinante mediante la regla de Sarrus, y también desarrollándolo por la fila 2 y por la columna 1 (los adjuntos ya están calculados en el ejercicio anterior):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} = 1 \cdot 1 \cdot (-.1) + 2 \cdot 4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot (-1) - 1 \cdot 4 \cdot 3 = \\ = -1 + 8 + 0 - 3 - 0 - 12 = -8 \end{array}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} = 0 \cdot 11 + 1 \cdot (-4) + 4 \cdot (-1) = \\ = 0 - 4 - 4 = -8 \end{array}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} = 1 \cdot (-13) + 0 \cdot 11 + 1 \cdot 5 = \\ = -13 + 0 + 5 = -8 \end{array}$$

Ejemplo: calcular el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ya hemos calculado este determinante mediante el método de Gauss, obteniéndose: $|A| = 48$. Ahora lo vamos a calcular por desarrollo.

$$\text{Desarrollo por fila 4}: |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = a_{41} \cdot A_{41} + a_{42} \cdot A_{42} + a_{43} \cdot A_{43} + a_{44} \cdot A_{44} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= 1 \cdot (-1)[(-2) \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 2 - (-2) \cdot (-1) \cdot 2] + \\
&+ 1 \cdot 1[1 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \cdot 2] + \\
&+ (-1) \cdot (-1)[1 \cdot 2 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot (-1) - (-2) \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \cdot 2] + \\
&+ 0 \cdot 1 \cdot [1 \cdot 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot (-1) - (-2) \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 2] = \\
&= -[-12 - 2 + 4 - 6 - 4 - 4] + [6 + 1 + 2 + 3 - 2 + 2] + [4 - 2 + 2 + 2 + 4 + 2] + 0 = \\
&= 24 + 12 + 12 = 48
\end{aligned}$$

| |
|---|
| Es aconsejable utilizar de forma combinada ambos métodos: primero, aplicar el método de Gauss para introducir ceros en la columna 1 y, posteriormente, desarrollar el determinante por esta misma columna. |

Ejemplo: calcular el determinante de Vandermonde $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \boxed{\begin{array}{l} \mathbf{2^a} = 2^a - a \cdot 1^a \\ \mathbf{3^a} = 3^a - a \cdot 2^a \end{array}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2 - ab & c^2 - ac \end{vmatrix} = \text{col.}1 \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix} =$$

$$(\text{Dividiendo cada columna}) = (b-a) \cdot (c-a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} = (b-a) \cdot (c-a) \cdot (c-b)$$

## 7.10 Rango de una matriz por el método de los menores.

- Dada una matriz cualquiera (no necesariamente cuadrada), se define menor de orden ‘p’ como el determinante de una submatriz cuadrada de orden ‘p’, obtenida mediante la eliminación de algunas filas y/o columnas de la matriz. En particular, cada elemento de la matriz es un menor de orden 1 y, si la matriz es cuadrada de orden 'n', un menor de orden 'n' es el propio determinante.

Ejemplo: en la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ al eliminar una columna tenemos tres menores de orden 2: $m_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2$; $m_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8$; $m_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$.

Con los conceptos anteriores, se define el rango de la siguiente forma:

$\boxed{\text{El rango de una matriz es el mayor orden de los menores no nulos}}$.

En el ejemplo anterior el rango es 2.

Ejemplo: hallar el rango de la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 17 \end{pmatrix}$.

Sabemos por el método de Gauss que esta matriz tiene rango 2. Ahora, consideramos los 4 menores de orden 3 (obtenidos al eliminar cada una de las columnas). Si alguno de ellos es distinto de 0, el rango será 3; si todos son nulos, el rango será 2, ya que es fácil encontrar menores de orden 2 no nulos, salvo que todas las filas sean proporcionales.

$$m_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 17 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1\cdot 17 + 1\cdot(-1)\cdot 2 + 2\cdot(-3)\cdot 4 - 2\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot(-3)\cdot 17 - {} \\ - (-1)\cdot(-1)\cdot 4 = -17 - 2 - 24 - 4 + 51 - 4 = 0$$

$$m_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 17 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 17 + 1\cdot(-1)\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 4 - 2\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 17 - 1\cdot(-1)\cdot 4 = \\ = 17 - 1 + 16 - 2 - 34 + 4 = 0$$

$$m_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 17 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3)\cdot 17 + (-1)\cdot(-1)\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 2 - 2\cdot(-3)\cdot 1 - (-1)\cdot 2\cdot 17 - {} \\ - 1\cdot(-1)\cdot 2 = -51 + 1 + 8 + 6 + 34 + 2 = 0$$

$$m_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3)\cdot 4 + (-1)\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 2 - 1\cdot(-3)\cdot 1 - (-1)\cdot 2\cdot 4 - 1\cdot 1\cdot 2 = \\ = -12 - 1 + 4 + 3 + 8 - 2 = 0$$

Como todos los menores de orden 3 son nulos y existen menores de orden 2 no nulos, por ejemplo: $m = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1$, el rango de la matriz es 2.

Ejemplo: hallar el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & k \end{pmatrix}$ según los valores de k.

Ya se estudió el rango de esta matriz mediante el método de Gauss, obteniéndose el siguiente resultado: $Rg(A) = \begin{cases} 2 \text{ si } k = 0 \\ 3 \text{ si } k \neq 0 \end{cases}$.

Ahora, mediante el método de los menores, consideramos el menor de orden 3, que coincide con el determinante de la matriz: si es distinto de 0 el rango será 3; si vale 0 el rango será 2 ya que existen menores de orden 2 no nulos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & k \end{vmatrix} \begin{matrix} = 1\cdot 0\cdot k + 2\cdot 1\cdot 3 + (-1)\cdot 2\cdot 2 - (-1)\cdot 0\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot k - 1\cdot 1\cdot 2 = \\ = 0 + 6 - 4 + 0 - 4k - 2 = -4k \end{matrix}$$

$|A| = 0 \Leftrightarrow -4k = 0 \Leftrightarrow k = 0$. Luego: $\begin{cases} k = 0 \Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow Rg(A) = 2 \\ k \neq 0 \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow Rg(A) = 3 \end{cases}$.

## 7.11 Matriz inversa por determinantes.

- Recordemos que, dada una matriz cuadrada A, la matriz inversa $A^{-1}$ es aquella que al multiplicar por la matriz inicial A resulta la matriz identidad:

  $$\boxed{A \bullet A^{-1} = A^{-1} \bullet A = I}$$

  Para que una matriz cuadrada de orden 'n' tenga inversa, su rango debe ser 'n', o lo que es lo mismo, su determinante debe ser distinto de cero.

  La matriz inversa se obtiene mediante la fórmula: $\boxed{A^{-1} = \dfrac{[Adj(A)]^t}{|A|}}$.

  Es decir, hay que seguir el siguiente proceso:

  $$A \rightarrow Compl(A) \rightarrow Adj(A) \rightarrow [Adj(A)]^t \rightarrow \frac{[Adj(A)]^t}{|A|}.$$

  Ejemplo: hallar la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. (Se hizo por Gauss).

  $$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow Compl(A) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow Adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow [Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

  $$\text{Luego: } A^{-1} = \frac{[Adj(A)]^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{5} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

  Ejemplo: hallar la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. (Se hizo por Gauss).

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow Compl(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

  $$\rightarrow [Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{[Adj(A)]^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: hallar la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}2&2&3\\0&1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}$.

$$|A|=\begin{vmatrix}2&2&3\\0&1&2\\1&0&-1\end{vmatrix}\begin{array}{l}=2\cdot1\cdot(-1)+2\cdot2\cdot1+3\cdot0\cdot0-3\cdot1\cdot1-2\cdot0\cdot1-2\cdot2\cdot0=\\=-2+4+0-3-0-0=-1\end{array}$$

$$A=\begin{pmatrix}2&2&3\\0&1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}\to \mathrm{Compl}(A)=\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\-2&-5&-2\\1&4&2\end{pmatrix}\to \mathrm{Adj}(A)=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\2&-5&2\\1&-4&2\end{pmatrix}\to$$

$$\to[\mathrm{Adj}(A)]^t=\begin{pmatrix}-1&2&1\\2&-5&-4\\-1&2&2\end{pmatrix}\to A^{-1}=\frac{[\mathrm{Adj}(A)]^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}-1&2&1\\2&-5&-4\\-1&2&2\end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\-2&5&4\\1&-2&-2\end{pmatrix}$$

Comprobación: $A^{-1}\bullet A=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\-2&5&4\\1&-2&-2\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}2&2&3\\0&1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

## 7.12 <u>Regla de Cramer.</u>

- Un sistema de Cramer es el que tiene igual número de ecuaciones que incógnitas y el determinante de la matriz asociada es distinto de cero ($\mathrm{Rg}(A)=n$).

$$\left.\begin{array}{r}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{n1}&a_{n2}&\ldots&a_{nn}\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\ldots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\ldots\\b_n\end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{Rg}(A)=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{n1}&a_{n2}&\ldots&a_{nn}\end{pmatrix}=n\Leftrightarrow|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{n1}&a_{n2}&\ldots&a_{nn}\end{vmatrix}\neq0$$

- Si el sistema es de Cramer, cada incógnita puede obtenerse utilizando determinantes de la siguiente forma:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\b_2&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\b_n&a_{n2}&\ldots&a_{nn}\end{vmatrix}}{|A|},\ x_2=\frac{\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&b_2&\ldots&a_{2n}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{n1}&b_n&\ldots&a_{nn}\end{vmatrix}}{|A|}\ \ldots\ldots\ x_n=\frac{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&b_1\\a_{21}&a_{22}&\ldots&b_2\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{n1}&a_{n2}&\ldots&b_n\end{vmatrix}}{|A|}$$

Es decir, cada incógnita se calcula a partir del determinante de la matriz que resulta al sustituir la columna de coeficientes correspondiente a la incógnita por la columna de términos independientes.

Demostración: utilizaremos la expresión matricial del sistema en columnas:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}\cdot x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix}\cdot x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \dots \\ a_{nn} \end{pmatrix}\cdot x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n = B$$

$$|B, C_2, \dots, C_n| = |C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n, C_2, \dots, C_n| = \text{por la propiedad } 9$$
$$= |C_1 x_1, C_2, \dots, C_n| + |C_2 x_2, C_2, \dots, C_n| + \dots + |C_n x_n, C_2, \dots, C_n| = \text{por la propiedad } 8$$
$$= x_1|C_1, C_2, \dots, C_n| + x_2|C_2, C_2, \dots, C_n| + \dots + x_n|C_n, C_2, \dots, C_n| = \text{por la propiedad } 6$$
$$= x_1|C_1, C_2, \dots, C_n| + 0 + \dots + 0 = x_1|C_1, C_2, \dots, C_n| \text{ y ahora, despejando:}$$
$$x_1|C_1, C_2, \dots, C_n| = |B, C_2, \dots, C_n| \Rightarrow x_1 = \frac{|B, C_2, \dots, C_n|}{|C_1, C_2, \dots, C_n|} \Rightarrow x_1 = \frac{|B, C_2, \dots, C_n|}{|A|}$$

Este mismo procedimiento de demostración se aplica de forma análoga a todas las incógnitas.

Ejemplo: resolver por Cramer el siguiente sistema $\left.\begin{matrix} 2x + 3y = -1 \\ x + 4y = -3 \end{matrix}\right\}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \ |A| = 8 - 3 = 5$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-4+9}{5} = \frac{5}{5} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-6+1}{5} = \frac{-5}{5} = -1$$

Ejemplo: resolver por Cramer el siguiente sistema $\left.\begin{matrix} 2x - y + z = -1 \\ -x + y - z = 2 \\ x - y + 2z = -3 \end{matrix}\right\}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} = 2\cdot1\cdot2 + (-1)\cdot(-1)\cdot1 + 1\cdot(-1)\cdot(-1) - 1\cdot1\cdot1 - (-1)\cdot(-1)\cdot2 - 2\cdot(-1)\cdot(-1) = \\ = 4 + 1 + 1 - 1 - 2 - 2 = 1 \end{matrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1}{1} = 1; \ y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2}{1} = 2; \ z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-1}{1} = -1$$

Operaciones:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} = (-1)\cdot1\cdot2 + (-1)\cdot(-1)\cdot(-3) + 1\cdot2\cdot(-1) - 1\cdot1\cdot(-3) - (-1)\cdot2\cdot2 - (-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = \\ = -2 - 3 - 2 + 3 + 4 + 1 = 1 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot2\cdot2+(-1)\cdot(-1)\cdot1+1\cdot(-1)\cdot(-3)-1\cdot2\cdot1-(-1)\cdot(-1)\cdot2-2\cdot(-1)\cdot(-3) = \\ = 8+1+3-2-2-6=2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot1\cdot(-3)+(-1)\cdot2\cdot1+(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)-(-1)\cdot1\cdot1-(-1)\cdot(-1)\cdot(-3)-2\cdot2\cdot(-1) = \\ = -6-2-1+1+3+4=-1$$

## 7.13 Discusión de un sistema. Teorema de Rouché-Fröbenius.

- El teorema de Rouché-Fröbenius establece que un sistema es compatible (tiene solución) si y sólo si el rango de la matriz asociada y el rango de la matriz ampliada coincidan. $\boxed{\text{Sistema compatible } \Leftrightarrow \text{Rg}(A)=\text{Rg}(\overline{A})}$.
  Demostración: la expresión matricial del sistema es:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2 \\ ........... \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_m \end{pmatrix}.$$

  Y la expresión matricial en columnas del sistema es:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ .... \\ a_{m1} \end{pmatrix}\cdot x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ .... \\ a_{m2} \end{pmatrix}\cdot x_2 + .... + \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ .... \\ a_{mn} \end{pmatrix}\cdot x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow C_1x_1+C_2x_2+....+C_nx_n=B$$

  Que el sistema sea compatible significa que existe al menos una solución; es decir, hay n-números, uno para cada incógnita: $x_1=\alpha_1, x_2=\alpha_2,...., x_n=\alpha_n$, que satisfacen simultáneamente todas las ecuaciones. Por tanto, la igualdad matricial escrita en columnas: $C_1\alpha_1+C_2\alpha_2+....+C_n\alpha_n=B$, es cierta.
  Esto quiere decir que la columna B es combinación lineal de las otras y, por tanto, al añadir una columna dependiente de las otras, no cambia el rango.
  $\text{Compatible} \Leftrightarrow \text{Rg}(C_1,C_2,....,C_n)=\text{Rg}(C_1,C_2,....,C_n|B) \Leftrightarrow \boxed{\text{Rg}(A)=\text{Rg}(\overline{A})}$

  La clasificación inicial sobre tipos de sistemas puede completarse ahora gracias al teorema de Rouché-Fröbenius, que permite decidir si un sistema tiene solución y cuántas soluciones tiene:

$$\boxed{\text{Sistema}\begin{cases} \underbrace{\text{Compatible (tiene solución)}}_{\text{Rg}(A)=\text{Rg}(\overline{A})}\begin{cases} \underbrace{\text{Determinado (una única solución)}}_{\text{Rg}(A)=\text{Rg}(\overline{A})=\text{nº incógnitas}\Rightarrow\text{CRAMER}} \\ \underbrace{\text{Indeterminado (infinitas soluciones)}}_{\text{Rg}(A)=\text{Rg}(\overline{A})<\text{nº incógnitas}} \end{cases} \\ \underbrace{\text{Incompatible (no tiene solución)}}_{\text{Rg}(A)<\text{Rg}(\overline{A})} \end{cases}}$$

- Ejemplo: estudiar la compatibilidad del siguiente sistema según los valores del parámetro 'k' y resolverlo en los casos en que sea compatible:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-3y=5 \\ 4x+ky=2 \end{array}\right\}.$$

Las matrices asociada y ampliada son: $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & k \end{pmatrix}$ y $\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 5 \\ 4 & k & 2 \end{array}\right)$.

Comenzamos el estudio de los rangos con la matriz A, ya que es cuadrada y será fácil utilizar determinantes.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & k \end{vmatrix}=2k+12 \rightarrow 2k+12=0 \Leftrightarrow k=-6$$

Luego: $\begin{cases} k=-6 \Leftrightarrow |A|=0 \Leftrightarrow Rg(A)=1 \\ k\neq -6 \Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow Rg(A)=2 \end{cases}$.

El rango de $\overline{A}$ es claramente 2, porque hay un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\neq 0$. En general, el rango de $\overline{A}$ bien coincide con el de A o es mayor en una unidad, puesto que se ha añadido únicamente una columna.

Escribimos ahora el resumen o clasificación en una tabla:

| Valor de k | $Rg(A)$ | $Rg(\overline{A})$ | Nº incóg. | Tipo de sistema |
|---|---|---|---|---|
| $k\neq -6$ | 2 | 2 | 2 | S. Comp. Determinado |
| $k=-6$ | 1 | 2 | 2 | S. Incompatible |

Para resolverlo en el caso compatible determinado, podemos utilizar la regla de Cramer, obteniéndose la solución única:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & k \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{5k+6}{2k+12} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-16}{2k+12}$$

En definitiva, para los infinitos valores del parámetro 'k' salvo $k=-6$, el sistema tendrá una única solución que depende de 'k'. Por ejemplo, para $k=0$,

la única solución es: $\begin{cases} x=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{-16}{12}=-\dfrac{4}{3} \end{cases}$

- Ejemplo: estudiar la compatibilidad del siguiente sistema según los valores del paramento 'a' indeterminado y resolverlo para los casos compatibles:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=5 \\ x+2y=3 \\ ax+y=3 \end{array}\right\}$$

Las matrices asociada y ampliada son: $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ y $\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ a & 1 & 3 \end{array}\right)$.

El rango de A es claramente 2, porque existe un menor de orden 2 no nulo:
$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Veamos ahora el rango de $\overline{A}$, que, al ser un matriz cuadrada, podemos razonar con su determinante:

$$\left|\overline{A}\right| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ a & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} = 2\cdot 2\cdot 3 + 3\cdot 3\cdot a + 5\cdot 1\cdot 1 - 5\cdot 2\cdot a - 3\cdot 1\cdot 3 - 2\cdot 3\cdot 1 = \\ = 12 + 9a + 5 - 10a - 9 - 6 = -a + 2 \end{matrix}$$

$|A| = 0 \Leftrightarrow -a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$. Luego: $\begin{cases} a = 2 \Leftrightarrow \left|\overline{A}\right| = 0 \Leftrightarrow Rg(\overline{A}) = 2 \\ a \neq 6 \Leftrightarrow \left|\overline{A}\right| \neq 0 \Leftrightarrow Rg(\overline{A}) = 3 \end{cases}$.

El resumen de rangos y la clasificación en una tabla es:

| Valor de a | $Rg(A)$ | $Rg(\overline{A})$ | Nº incóg | Tipo de sistema |
|---|---|---|---|---|
| $a \neq 2$ | 2 | 3 | 2 | S. Incompatible |
| $a = 2$ | 2 | 2 | 2 | S. Comp. Determinado |

Para resolver el sistema en el caso compatible determinado, podemos utilizar la regla de Cramer. En este caso, una de las ecuaciones es combinación lineal de las otras, por lo que puede eliminarse sin alterar el sistema.

Para $a=2 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 2x + 3y = 5 \\ x + 2y = 3 \\ 2x + y = 3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 2x + 3y = 5 \\ x + 2y = 3 \end{matrix}\right\}$ y la única solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{1} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{1} = 1$$

En definitiva, para todos los valores del parámetro ‘a’ salvo $a = 2$, el sistema no tiene solución. En cambio, para $a = 2$, la única solución es: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

- Ejemplo: estudiar la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro ‘m’ y resolverlo en los casos compatibles:

$$\left.\begin{matrix} x + y + mz = 0 \\ 3x + 2y + 4mz = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Las matrices son: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 3 & 2 & 4m \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 0 \\ 3 & 2 & 4m & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$.

Comenzaremos el estudio de los rangos con A, ya que es cuadrada y será más fácil utilizar determinantes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 3 & 2 & 4m \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} = 1\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 4m\cdot 2 + m\cdot 3\cdot 1 - m\cdot 2\cdot 2 - 1\cdot 3\cdot 3 - 1\cdot 4m\cdot 1 = \\ = 6 + 8m + 3m - 4m - 9 - 4m = 3m - 3 \end{matrix}$$

$|A| = 0 \Leftrightarrow 3m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1$. Luego: $\begin{cases} m = 1 \Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Rg}(A) = 2 \\ m \neq 1 \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{Rg}(A) = 3 \end{cases}$.

El rango de $\overline{A}$ coincide con el rango de A porque se añade una columna nula. Recordemos que este sistema es homogéneo y, por tanto, siempre es compatible. Veamos los rangos y la clasificación en una tabla:

| Valor de m | $\mathrm{Rg}(A)$ | $\mathrm{Rg}(\overline{A})$ | Nº incóg | Tipo de sistema |
|---|---|---|---|---|
| $m \neq 1$ | 3 | 3 | 3 | S. Comp. Determinado |
| $m = 1$ | 2 | 2 | 3 | S. Comp. Indeterminado |

Resolución:

- Si $m \neq 1 \Rightarrow$ Hay una única solución y, necesariamente es: $\boxed{\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{matrix}}$, ya que todo sistema homogéneo tiene siempre la solución trivial (todas las incógnitas nulas). Al ser compatible determinado, esta solución pasa a ser la única solución.
- Si $m = 1 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + 4z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{matrix}\right\}$.

Para resolver los sistemas compatibles indeterminados es conveniente aplicar el método de Gauss (no puede utilizarse la regla de Cramer porque el determinante de la matriz es cero). Además, el método de Gauss simplifica las últimas ecuaciones y facilita la resolución.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \boxed{\begin{matrix} \mathbf{2^a} = 2^a - 3 \cdot 1^a \\ \mathbf{3^a} = 3^a - 2 \cdot 1^a \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \boxed{\mathbf{3^a} = 3^a - 2^a} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Operaciones: $\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} + \quad \begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} + \quad \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} +$

La última ecuación ha desaparecido y quedan dos ecuaciones con tres incógnitas, por lo que podremos encontrar infinitas soluciones:

$$\left.\begin{matrix} x + y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x = -2k \\ y = k \\ z = k \end{matrix}}.$$

Dando valores al nuevo parámetro ‘k’ se obtienen las infinitas soluciones, por ejemplo: (0,0,0) , ( − 2 ,1,1) , etc.

En definitiva, para los infinitos valores del parámetro 'm' salvo $m = 1$, el sistema tiene una única solución: $\boxed{\begin{array}{c} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}}$. En cambio, para $m = 1$, el sistema tiene infinitas soluciones, todas ellas son de la forma: $\boxed{\begin{array}{c} x = -2k \\ y = k \\ z = k \end{array}}$.

- Ejemplo: estudiar la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro 'm' y resolverlo en los casos compatibles:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + my + z = m - 2 \\ x + y + 2z = 0 \\ mx + y - z = m - 2 \end{array}\right\}.$$

Las matrices son: $A = \begin{pmatrix} 3 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & m & 1 & m-2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ m & 1 & -1 & m-2 \end{array}\right)$.

Comenzaremos el estudio de los rangos con A, porque es cuadrada.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot(-1) + m\cdot 2\cdot m + 1\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot m - m\cdot 1\cdot(-1) - 3\cdot 2\cdot 1 = = -3 + 2m^2 + 1 - m + m - 6 = 2m^2 - 8$$

$|A| = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$. Luego: $\left\{\begin{array}{l} m = \pm 2 \Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow Rg(A) = 2 \\ m \neq \pm 2 \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow Rg(A) = 3 \end{array}\right.$.

El rango de $\overline{A}$ sólo hay que estudiarlo para $m = -2$ y $m = 2$ porque en los demás valores de 'm' el rango será 3, puesto que se añade una columna a la matriz A y el rango será 3 o 4, pero no puede ser 4 porque sólo hay tres filas.

- Si $m = 2 \Rightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$ tiene rango 2 porque todos los menores de orden tres valen 0: el primero porque $|A| = 0$ y, los demás, por tener una columna nula. Además, en nuestro caso, la columna de términos independientes es nula, por lo que el rango de la matriz asociada coincide con el de la matriz ampliada (se trata de un sistema homogéneo).
- Si $m = -2 \Rightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right)$ tiene rango 3 porque hay un menor de orden 3 no nulo:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 2\cdot(-4) + 1\cdot 0\cdot 1 + (-4)\cdot 1\cdot(-1) - (-4)\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot(-4) - -(-2)\cdot 0\cdot(-1) = 16 + 0 + 4 + 8 + 4 - 0 = 32$$

El resumen de la compatibilidad en una tabla es el siguiente:

| Valor de m | $Rg(A)$ | $Rg(\overline{A})$ | Nº incóg | Tipo de sistema |
|---|---|---|---|---|
| $m \neq -2,2$ | 3 | 3 | 3 | S. Comp. Determinado |
| $m = 2$ | 2 | 2 | 3 | S. Comp. Indeterminado |
| $m = -2$ | 2 | 3 | 3 | S. Incompatible. |

En definitiva, para los infinitos valores del parámetro 'm' salvo $m = \pm 2$, el sistema tiene una única solución y podrá obtenerse por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m-2 & m & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ m-2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & m-2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ m & m-2 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & m & m-2 \\ 1 & 1 & 0 \\ m & 1 & m-2 \end{vmatrix}}{|A|}$$

En el caso $m = -2$, el sistema no tiene solución y hemos terminado.

Finalmente, para $m = 2$, el sistema tiene infinitas soluciones. Vamos a obtenerlas utilizando el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \boxed{\begin{array}{l} \mathbf{2^a} = 3 \cdot 2^a - 1^a \\ \mathbf{3^a} = 3 \cdot 3^a - 2 \cdot 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right) \boxed{\mathbf{3^a} = 3^a + 2^a} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La última ecuación ha desaparecido y quedan dos ecuaciones con tres incógnitas, por lo que hay infinitas soluciones:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y + z = 0 \\ y + 5z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} x = 3k \\ y = -5k \\ z = k \end{array}}.$$

Dando valores al nuevo parámetro 'k' se pueden ir obteniendo las infinitas soluciones: (0,0,0) , (3, − 5 ,1) , etc.