

## Tema 8: Geometría en el espacio.

### 8.1 Producto escalar, producto vectorial y producto mixto.

- Producto escalar: dados dos vectores:  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$  y  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ , se define su producto escalar de las dos formas siguientes:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$  (donde  $\alpha$  es el ángulo comprendido entre ellos).

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$

En realidad, la segunda expresión puede demostrarse a partir de la primera. En cualquier caso, de ambas se deduce que el módulo de un vector es:

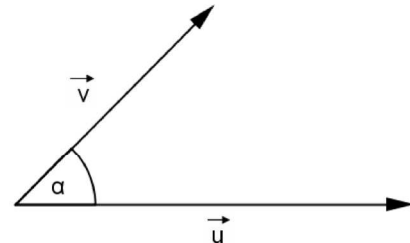
$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}, \text{ y que el ángulo comprendido entre ambos vectores viene dado por:}$$

$$\alpha = \arccos \left( \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \right) = \arccos \left( \frac{u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \right).$$

Es claro que, si dos vectores son perpendiculares, su producto escalar es cero.

Este hecho será de gran utilidad:  $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

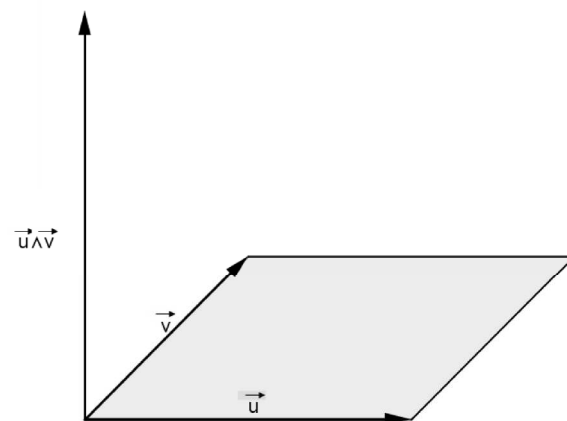
Ejemplo: Dados los vectores  $\vec{u} = (1,0,1)$  y  $\vec{v} = (0,-1,1)$ , sus módulos son:  $|\vec{u}| = \sqrt{2}$ ,  $|\vec{v}| = \sqrt{2}$  y el ángulo que determinan es:  $\alpha = 60^\circ$ .



- Producto vectorial: dados los vectores:  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$  y  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ , se define su producto vectorial de las dos formas siguientes:

- Es un vector cuya dirección es perpendicular al plano que determinan los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ ; su sentido es el del avance de un tornillo que gira desde  $\vec{u}$  a  $\vec{v}$ , y su módulo es el área del paralelogramo que determinan ambos vectores.

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$



Igual que en el producto escalar, la segunda expresión puede demostrarse a partir de la primera. Ejemplo: Dados los vectores  $\vec{u} = (1,-1,2)$  y  $\vec{v} = (2,1,0)$ .

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k} = (-2, 4, 3).$$

Este vector es perpendicular a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  (su producto escalar con ambos es cero).

Además, el área del paralelogramo que determinan estos dos vectores es:

$$\text{Área} = |\vec{u} \wedge \vec{v}| = |(-2, 4, 3)| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{29}$$

- Producto mixto: dados  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ ,  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  y  $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$  se define producto mixto de la siguiente forma:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

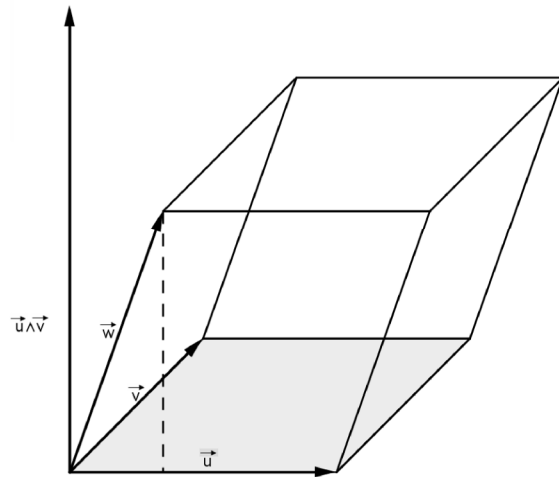
Es decir, es el producto escalar de dos vectores, siendo uno de ellos el producto vectorial de los otros dos vectores.

El valor absoluto del producto mixto es el volumen del paralelepípedo que determinan los tres vectores: área de la base (producto vectorial) por la altura (producto escalar).

Veamos el producto mixto de tres vectores:

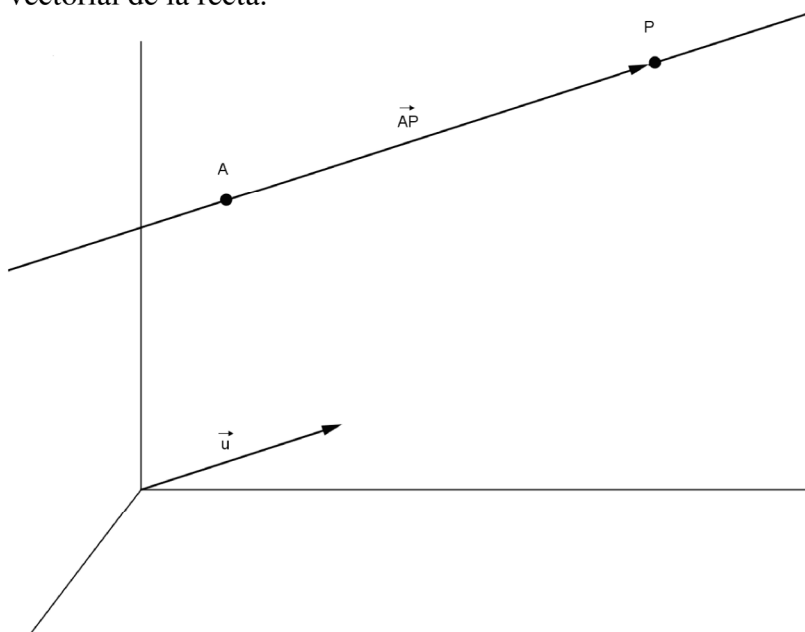
$$\vec{u} = (2, -1, 0), \vec{v} = (1, 0, -1) \text{ y } \vec{w} = (0, 1, 2).$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 + 2 + 0 + 2 = 4.$$



## 8.2 La recta en el espacio.

- Dado un punto conocido de la recta  $A = (x_0, y_0, z_0)$  y un vector de dirección  $\vec{u} = (a, b, c)$ , un punto cualquiera del espacio  $P = (x, y, z)$  está en la recta cuando el vector que determina con el punto conocido A es proporcional al vector de dirección  $\vec{u} = (a, b, c)$ . Es decir:  $\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{u}$ , que es la Ecuación vectorial de la recta.



Si expresamos la ecuación anterior en coordenadas, tendremos:

$$\begin{cases} x - x_0 = \lambda a \\ y - y_0 = \lambda b \\ z - z_0 = \lambda c \end{cases}, \text{ luego: } \boxed{\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}}. \text{ Que son las Ecuaciones paramétricas.}$$

Despejando el parámetro  $\lambda$  en las tres ecuaciones e igualando sus

expresiones:  $\boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}$ . Que es la Ecuación continua de la

recta. Si eliminamos denominadores y pasamos todos los elementos al primer miembro en dos de las ecuaciones (una es redundante), tendremos la Ecuación general de la recta que puede interpretarse como la intersección de

dos planos:  $r \equiv \boxed{\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}}$ . Ejemplo: hallar la ecuación de la

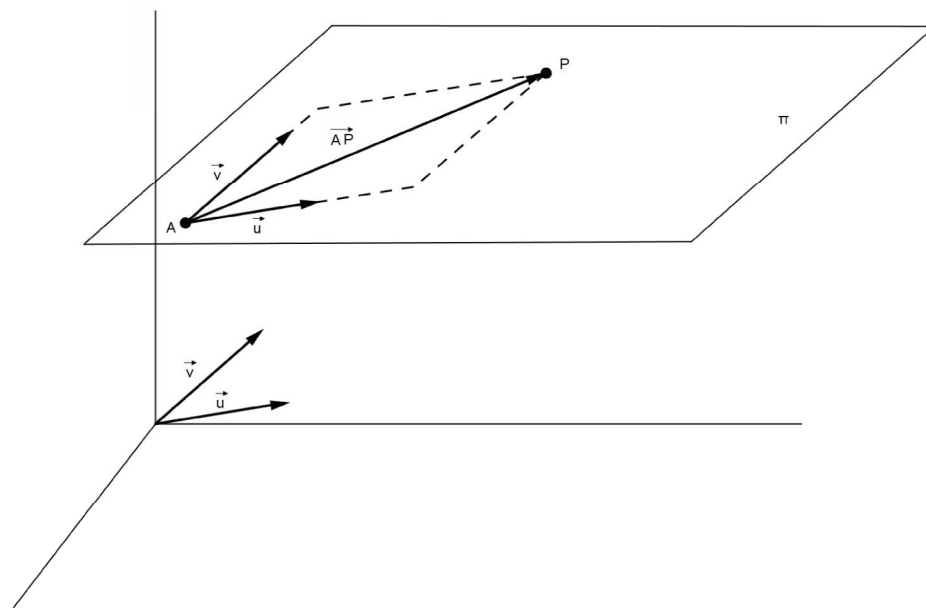
recta que pasa por los puntos  $A = (2, 2, -2)$  y  $B = (4, 3, 0)$ . Tomamos como

punto:  $A = (2, 2, -2)$  y como vector de dirección:  $\overline{AB} = (2, 1, 2)$ . La ecuación

de la recta es:  $r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$ , o bien:  $r \equiv \frac{x - 2}{2} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z + 2}{2}$ .

### 8.3 El plano en el espacio.

- Dado un punto conocido del plano:  $A = (x_0, y_0, z_0)$  y dos vectores de dirección:  $\vec{u} = (a, b, c)$  y  $\vec{v} = (a', b', c')$ . Un punto cualquiera del espacio  $P = (x, y, z)$  está en el plano si el vector  $\overline{AP}$ , que determina con el punto conocido A, puede expresarse como combinación lineal (suma de proporcionales) de los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ . Es decir, P pertenece al plano  $\pi$  si se verifica:  $\boxed{\overline{AP} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}}$ , que es la Ecuación vectorial del plano.



Expresando la ecuación anterior en coordenadas, tendremos:

$$\begin{cases} x - x_0 = \lambda a + \mu a' \\ y - y_0 = \lambda b + \mu b' \\ z - z_0 = \lambda c + \mu c' \end{cases}, \text{ o bien: } \begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu a' \\ y = y_0 + \lambda b + \mu b' \\ z = z_0 + \lambda c + \mu c' \end{cases}. \text{ Ecuaciones paramétricas.}$$

Además, también se puede obtener la ecuación del plano observando que los vectores  $\vec{AP}$ ,  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  tienen rango menor que 3, porque  $\vec{AP}$  es dependiente (combinación lineal) de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  y, por tanto, su determinante es 0:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0. \text{ Ecuación implícita del plano, que, al}$$

desarrollar el determinante, será una expresión:  $Ax + By + Cz + D = 0$ .

Ecuación general del plano. Es muy importante destacar que un vector normal o perpendicular al plano es siempre:  $\vec{n} = (A, B, C)$ . En efecto, dados dos puntos cualesquiera del plano,  $P = (x_1, y_1, z_1)$  y  $Q = (x_2, y_2, z_2)$ , podemos comprobar que el vector  $\vec{n}$  es siempre perpendicular al vector  $\vec{PQ}$ :

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{PQ} &= A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = \underbrace{(Ax_2 + By_2 + Cz_2)}_{-D} - \underbrace{(Ax_1 + By_1 + Cz_1)}_{-D} \\ &= -D - (-D) = -D + D = 0. \end{aligned}$$

Esto es así, porque los puntos P y Q, al estar en el plano, satisfacen su ecuación y, por tanto, resulta:  $-D$ .

Ejemplo: hallar la ecuación del plano que determinan los puntos:  $A = (0,0,1)$ ,  $B = (2,3,-1)$  y  $C = (1,-1,0)$ . Tendremos entonces:  $A = (0,0,1)$ ,  $\vec{u} = \vec{AB} = (2,3,-2)$  y  $\vec{v} = \vec{AC} = (1,-1,-1)$ .

Las ecuaciones paramétricas serán:  $\begin{cases} x = 0 + 2\lambda + \mu \\ y = 0 + 3\lambda - \mu \\ z = 1 - 2\lambda - \mu \end{cases}$ , y la ecuación implícita:

$$\begin{vmatrix} x & y & z - 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0. \text{ De donde: } \pi \equiv -3x - 2y - 2z + 2 - 3z + 3 - 2x + 2y = 0.$$

Es decir:  $\pi \equiv -5x - 5z + 5 = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + z - 1 = 0$ .

Es fácil comprobar que el plano pasa por A y su vector normal  $\vec{n} = (1,0,1)$  es perpendicular (producto escalar 0) a los dos vectores de dirección del plano.

#### 8.4 Posiciones relativas de rectas y planos en el espacio.

En general, para determinar la posición relativa de rectas o planos en el espacio, hay que estudiar la compatibilidad del sistema que determinan, es decir, se calculan los rangos de las matrices asociada y ampliada del sistema.

- Dos rectas: dadas dos rectas escritas en su forma general como intersección de dos planos cada una de ellas, tendremos que estudiar la compatibilidad de

un sistema de 4 ecuaciones con 3 incógnitas. Sin embargo, es mejor expresar

$$\text{las rectas en su forma paramétrica: } r \equiv \begin{cases} x = x_1 + a\lambda \\ y = y_1 + b\lambda \\ z = z_1 + c\lambda \end{cases} \text{ y } s \equiv \begin{cases} x = x_2 + a'\mu \\ y = y_2 + b'\mu \\ z = z_2 + c'\mu \end{cases} . A$$

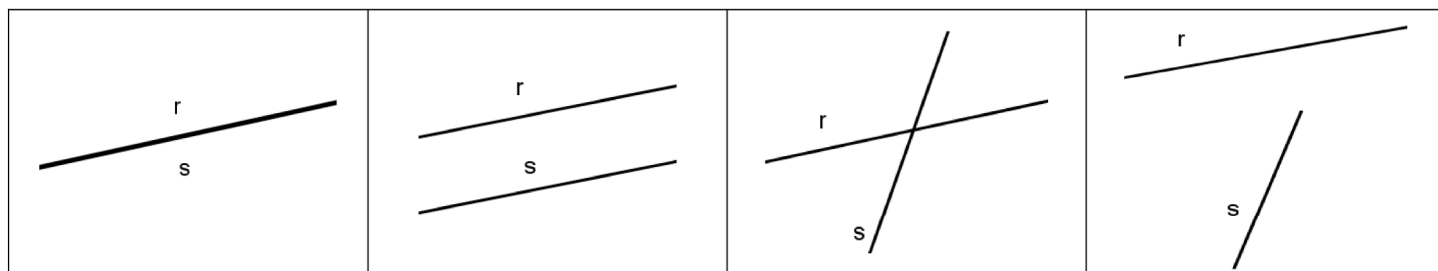
continuación, se estudia la compatibilidad del sistema que se obtiene al igualar las coordenadas 'x', 'y', 'z', lo que conduce a un sistema de tres

$$\text{ecuaciones con dos incógnitas: } \left. \begin{aligned} a\lambda - a'\mu &= x_2 - x_1 \\ b\lambda - b'\mu &= y_2 - y_1 \\ c\lambda - c'\mu &= z_2 - z_1 \end{aligned} \right\} . \text{ En este sistema, las}$$

$$\text{matrices asociada y ampliada son: } A = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix}, \bar{A} = \begin{pmatrix} a & a' & x_2 - x_1 \\ b & b' & y_2 - y_1 \\ c & c' & z_2 - z_1 \end{pmatrix}, \text{ y las}$$

posibilidades según los rangos son las siguientes:

Rango (A)	Rango ( $\bar{A}$ )	Sistema	Posición
1	1	S.C.I.	Coinciden
1	2	S.I.	Paralelas
2	2	S.C.D.	Se cortan
2	3	S.I.	Se cruzan



$$\text{Ejemplo: estudiar la posición relativa de las rectas } r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \text{ y}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\mu \\ y = 3 - \mu \\ z = -1 + 2\mu \end{cases} . \text{ El sistema quedaría así: } \left. \begin{aligned} \lambda + 2\mu &= 2 \\ \lambda + \mu &= 1 \\ 2\lambda - 2\mu &= -2 \end{aligned} \right\} , \text{ cuyas matrices son}$$

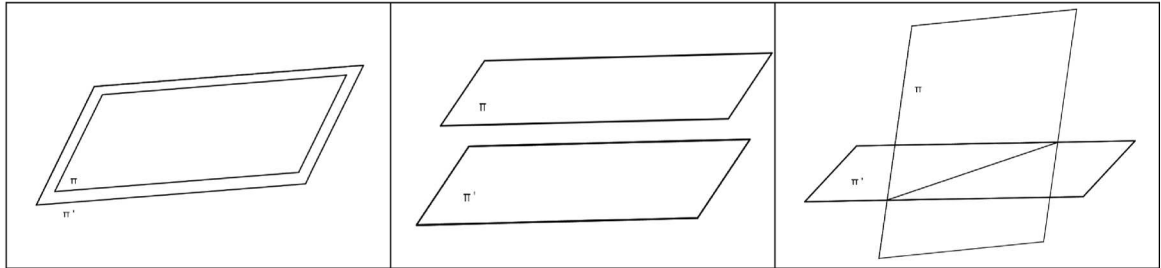
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \text{ como } |\bar{A}| = -2 - 4 + 4 - 4 + 2 + 4 = 0,$$

tendremos:  $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(\bar{A}) = 2$  y, por tanto, el sistema es compatible determinado, por lo que las rectas se cortan. Resolviendo el sistema se obtiene:  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 1$ , y el punto de intersección de las rectas es:  $(1, 2, 1)$ .

- Dos planos:  $\left. \begin{aligned} \pi &\equiv Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi' &\equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{aligned} \right\}$ . Las matrices asociada y ampliada

son:  $A = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$  y  $\bar{A} = \begin{pmatrix} A & B & C & | & -D \\ A' & B' & C' & | & -D' \end{pmatrix}$ . Luego, los rangos son:

Rango (A)	Rango ( $\bar{A}$ )	Sistema	Posición
1	1	S.C.I.	Coinciden
1	2	S.I.	Paralelos
2	2	S.C.I.	Se cortan en una recta



Ejemplo: estudiar la posición relativa de los planos:  $\left. \begin{aligned} \pi &\equiv 2x + 3y - z + 2 = 0 \\ \pi' &\equiv x + y + z - 1 = 0 \end{aligned} \right\}$ .

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & | & -2 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$ , con:  $Rg(A) = Rg(\bar{A}) = 2$  y el

sistema es compatible indeterminado, por lo que se cortan en una recta.

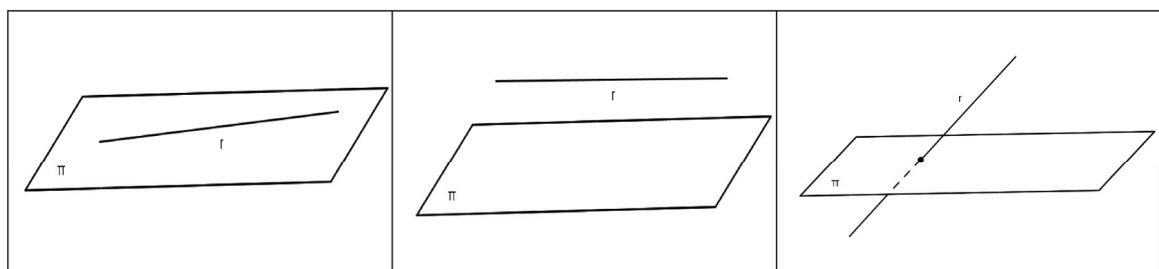
- Una recta y un plano: Si la recta viene dada en paramétricas, basta con sustituir sus ecuaciones en el plano. Por el contrario, si la recta está en forma general, tenemos que estudiar un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$r \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad \pi \equiv A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0.$$

Las matrices son:  $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$  y  $\bar{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & | & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & | & -D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & | & -D_3 \end{pmatrix}$ . Luego,

las posibilidades son:

Rango (A)	Rango ( $\bar{A}$ )	Sistema	Posición
2	2	S.C.I.	El plano contiene a la recta
2	3	S.I.	Paralelos
3	3	S.C.D.	Se cortan en un punto



Ejemplo: estudiar la posición relativa de la recta:  $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$  y el plano:  $\pi \equiv 2x + y - z - 3 = 0$ .

Las matrices son las siguientes:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  y  $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 2 & 1 & -1 & | & 3 \end{pmatrix}$ .

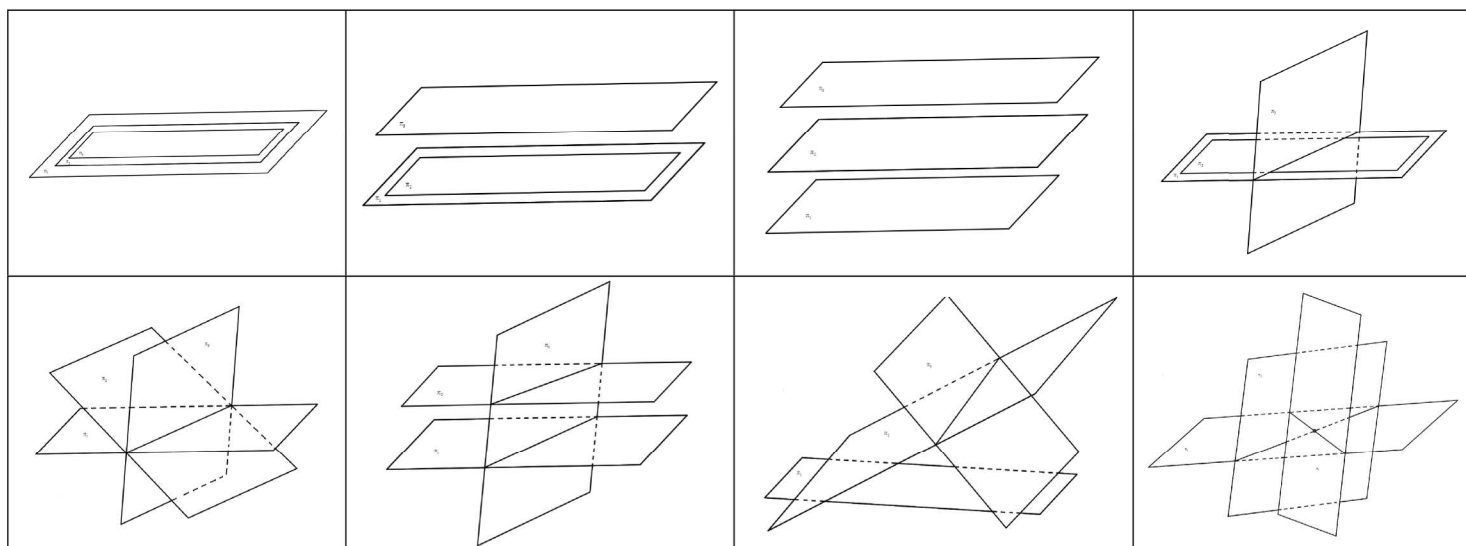
Como  $|A| = -1 - 2 - 2 + 1 = -4 \neq 0$ , tendremos:  $Rg(A) = Rg(\bar{A}) = 3$  y el sistema es compatible determinado, por lo que la recta y el plano se cortan en un único punto. Concretamente, el punto de intersección es:  $P = (1,1,0)$ .

- Tres planos. Tendremos ahora un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\left. \begin{aligned} \pi_1 &\equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \pi_2 &\equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ \pi_3 &\equiv A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{aligned} \right\} \text{Las matrices son asociada y ampliada son:}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \text{ y } \bar{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & | & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & | & -D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & | & -D_3 \end{pmatrix}, \text{ y las posibilidades son:}$$

Rango (A)	Rango ( $\bar{A}$ )	Sistema	Posición
1	1	S.C.I.	Coinciden
1	2	S.I.	Dos Paralelos o los tres paralelos
2	2	S.C.I.	Se cortan en una recta (dos formas)
2	3	S.I.	Dos paralelos o se cortan dos a dos
3	3	S.C.D.	Se cortan en un punto



Ejemplo, estudiar la posición relativa de los planos: 
$$\left. \begin{aligned} \pi_1 &\equiv 3x + 2y + z = 0 \\ \pi_2 &\equiv x + y + 2z = 0 \\ \pi_3 &\equiv 2x + y - z = 0 \end{aligned} \right\}$$

Las matrices son:  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  y  $\bar{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 2 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$ .

Como:  $|A| = -3 + 8 + 1 - 2 + 2 - 6 = 0$ , tendremos:  $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(\bar{A}) = 2$  y el sistema es compatible indeterminado, por lo que los tres planos se cortan en una recta. Además, como ninguno de los planos es paralelo a otro, la intersección se produce “como las páginas de un libro”. Concretamente, la intersección o solución es la siguiente recta:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{2^a = 3 \cdot 2^a - 1^a \\ 3^a = 3 \cdot 3^a - 2 \cdot 1^a}} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{3^a = 3^a + 2^a} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$$r \equiv \begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ y + 5z = 0 \end{cases}, \text{ o bien: } r \equiv \begin{cases} x = 3k \\ y = -5k \\ z = k \end{cases} (0,0,0) ; (3,-5,1) ; \text{ etc.}$$

## 8.5 Cálculo de puntos, rectas y planos.

A continuación veremos los procedimientos más frecuentes para resolver problemas de geometría en el espacio. En ellos se pide determinar puntos, rectas o planos que cumplen ciertas condiciones dadas en el enunciado. Los casos no incluidos aquí suelen resolverse de forma similar a los que se estudian en la siguiente colección:

- **Recta paralela a una recta por un punto.**

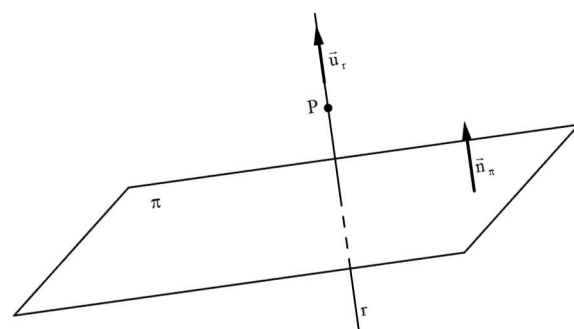
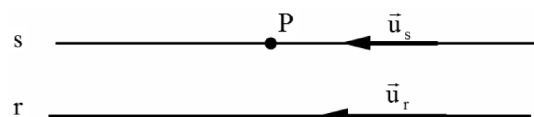
El vector de dirección de la nueva recta coincide con el vector de dirección de la recta inicial.

Ejemplo: hallar la recta paralela a  $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$ , y que pasa por  $P = (1,0,1)$ .

$\vec{u}_s = \vec{u}_r = (1,1,-2)$ . Por tanto, la recta pedida es:  $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = \mu \\ z = 1 - 2\mu \end{cases}$ .

- **Recta perpendicular a un plano por un punto.**

El vector de dirección de la recta coincide con el vector normal al plano.



Ejemplo: hallar la recta perpendicular al plano:  $\pi \equiv x - y + 2z - 1 = 0$  que pasa por el punto  $P = (1, 2, -3)$ .

$\vec{u}_r = \vec{n}_\pi = (1, -1, 2)$ . Luego, la recta es:  $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}$  o bien, en

$$\text{forma paramétrica: } r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -3 + 2\lambda \end{cases}$$

• **Recta perpendicular a recta por un punto.**

Debemos entender que la nueva recta perpendicular debe apoyarse o cortar a la recta inicial, ya que, en caso contrario, existirían infinitas soluciones.

El proceso a seguir es el siguiente:

- Hallar el plano  $\pi$  perpendicular a la recta  $r$  que pasa por el punto  $P$ .
- Calcular el punto de intersección de la recta y el plano:  $Q = r \cap \pi$ .
- La recta pedida es la que pasa por los puntos  $P$  y  $Q$ .

Ejemplo: hallar la recta perpendicular a

$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$  que pasa por  $P = (2, 1, 0)$ .

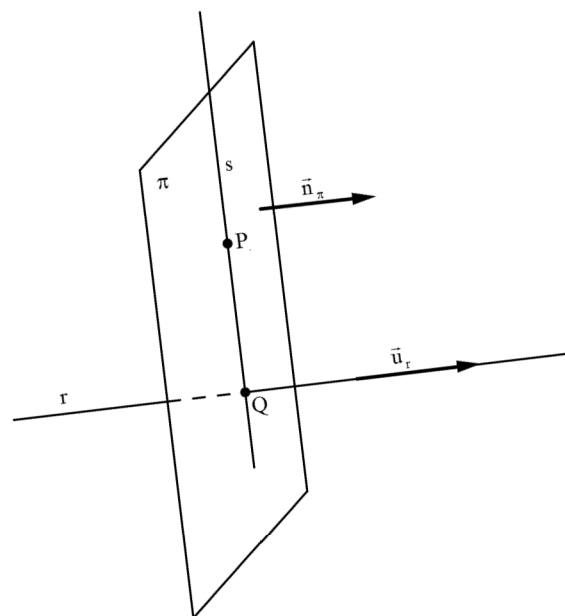
- $\vec{n}_\pi = \vec{u}_r = (2, -1, 1)$ . Luego, el plano perpendicular a 'r' es  $\pi \equiv 2x - y + z + D = 0$ . El término independiente  $D$  se calcula imponiendo que  $\pi$  pase por  $P$ :  $4 - 1 + 0 + D = 0$ , de donde:  $D = -3$  y el plano es:  $\pi \equiv 2x - y + z - 3 = 0$ .
- El punto  $Q = r \cap \pi$  se obtiene resolviendo el sistema que determinan (es conveniente expresar la recta en paramétricas y luego sustituir en el

$$\text{plano). } r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \text{ de donde al sustituir resulta:}$$

$$2 + 4\lambda + 1 + \lambda + \lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ y, por tanto, } Q = r \cap \pi = (1, -1, 0).$$

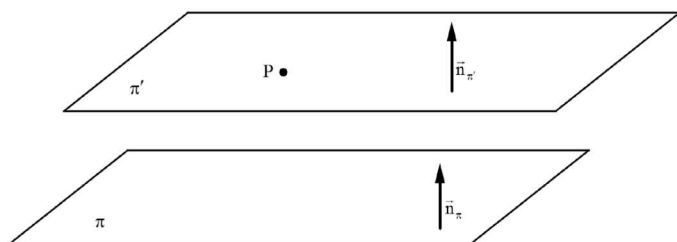
- La recta pedida es la que pasa por los puntos  $P$  y  $Q$ .

$$P = (2, 1, 0), \vec{u}_s = \overrightarrow{PQ} = (-1, -2, 0) \text{ y, finalmente, } s \equiv \begin{cases} x = 2 - \mu \\ y = 1 - 2\mu \\ z = 0 \end{cases}$$



• **Plano paralelo a un plano por un punto.**

Si dos planos son paralelos, tienen el mismo vector normal.

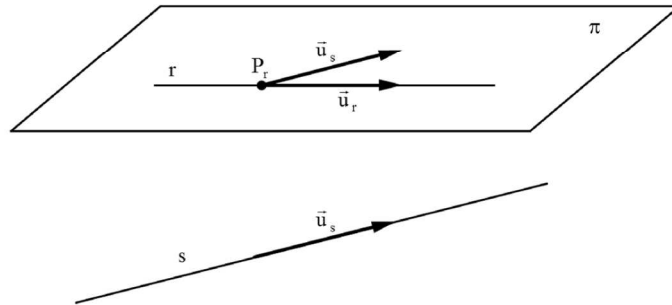


Ejemplo: hallar el plano paralelo a  $\pi \equiv 2x - 3y + z - 2 = 0$  que pasa por el punto  $P = (-1, 2, 3)$ .

$\vec{n}_{\pi'} = \vec{n}_{\pi} = (2, -3, 1)$ . Por tanto,  $\pi' \equiv 2x - 3y + z + D = 0$  y, para determinar 'D', sustituimos las coordenadas del punto 'P' en la ecuación del plano:  
 $-2 - 6 + 3 + D = 0 \Rightarrow D = 5 \Rightarrow \pi' \equiv 2x - 3y + z + 5 = 0$ .

- **Plano paralelo a dos rectas por un punto.**

Para la ecuación de un plano se necesita un punto (ya lo tenemos) y dos vectores de dirección, que serán los vectores de dirección de las rectas dadas.



Ejemplo: hallar la ecuación del plano que contiene a la recta:

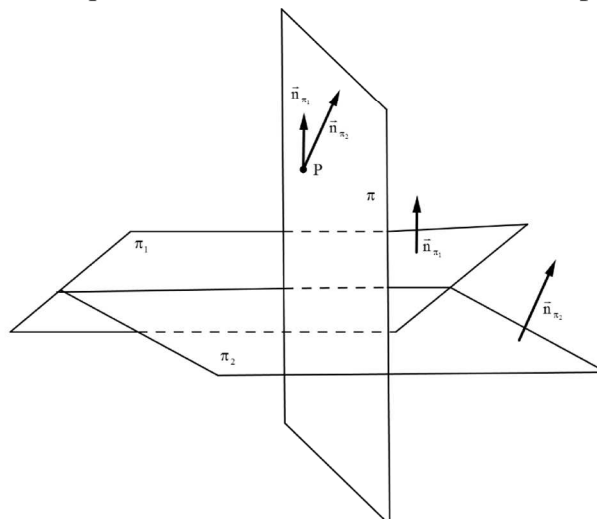
$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-1}, \text{ y es paralelo a la recta: } s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$$

$$\text{El plano se obtiene de: } \pi \equiv \begin{cases} P_r = (1, 3, 0) \\ \vec{u}_r = (2, 1, -1) \\ \vec{u}_s = (1, -1, 3) \end{cases} \text{ y será: } \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

que desarrollando resulta:  $\pi \equiv 2x - 7y - 3z + 19 = 0$ .

- **Plano perpendicular a dos planos por un punto.**

Si dos planos son perpendiculares, el vector normal de uno actúa como vector dirección en el otro. El nuevo plano se obtiene a partir del punto y dos vectores dirección, que serán los vectores normales de los planos iniciales.



Ejemplo: Hallar la ecuación del plano perpendicular a los planos:

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv 2x - y + z - 2 = 0 \\ \pi_2 \equiv x + y - z - 3 = 0 \end{array} \right\} \text{ y que pasa por el punto } P = (0,1,2).$$

El plano se obtiene de:  $\pi \equiv \begin{cases} P = (0,1,2) \\ \vec{u} = \vec{n}_{\pi_1} = (2,-1,1) \text{ y, por tanto será:} \\ \vec{v} = \vec{n}_{\pi_2} = (1,1,-1) \end{cases}$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \text{ que, desarrollando, resulta: } \pi \equiv y + z - 3 = 0.$$

• **Recta perpendicular a otra y paralela a un plano por un punto.**

El vector de dirección de la recta pedida debe ser perpendicular tanto al vector de dirección de la recta dada como al vector normal del plano (por ser paralelos).

Ejemplo: hallar la recta que pasa por  $P = (1,-1,0)$ , es paralela al plano:

$$\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$$

perpendicular a la recta:

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}.$$

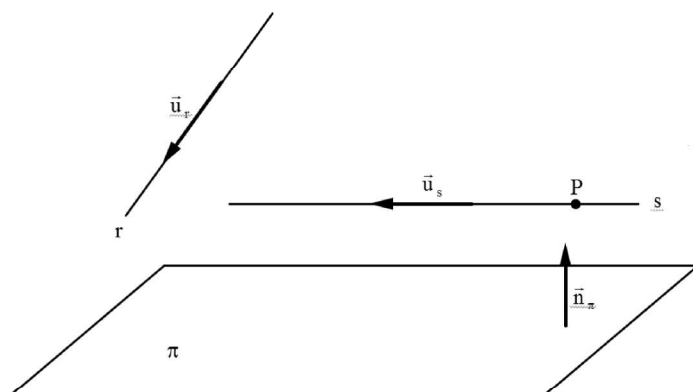
Un vector perpendicular a  $\vec{n}_{\pi}$  y  $\vec{u}_r$

es su producto vectorial:

$$\vec{u}_s = \vec{n}_{\pi} \wedge \vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-3, 2, 1)$$

Por tanto, la recta pedida es:

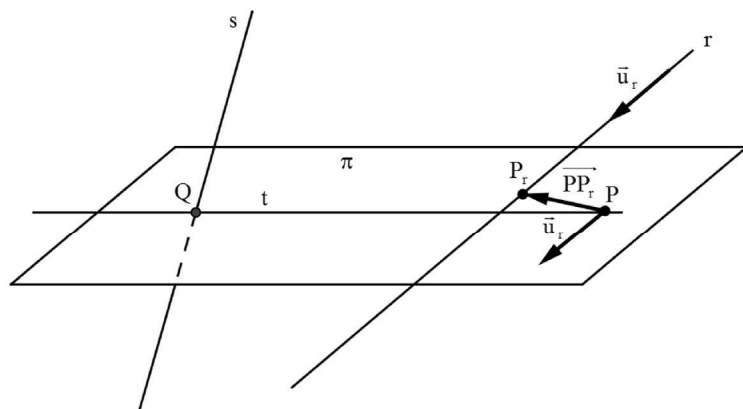
$$s \equiv \frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}.$$



• **Recta que se apoya (corta) en dos rectas y pasa por un punto.**

Para obtener la recta seguiremos el siguiente proceso:

- Hallar el plano  $\pi$  que pasa por P y contiene a la recta r.
- Calcular el punto de intersección de la otra recta y el plano:  $Q = s \cap \pi$ .
- La recta pedida es la que pasa por los puntos P y Q.



Ejemplo: hallar la recta que se apoya en las rectas:  $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$  y

$$s \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}, \text{ y que pasa por el punto } P = (0,1,-1).$$

- El plano se obtiene a partir del punto y dos vectores de dirección, uno el de la recta y otro el que une  $P$  con cualquier punto de la recta  $P_r$ :

$$\pi \equiv \begin{cases} P = (0,1,-1) \\ \vec{u}_r = (2,-1,1) \\ P_r = (1,1,0) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} P = (0,1,-1) \\ \vec{u}_r = (2,-1,1) \\ \overrightarrow{PP_r} = (1,0,1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z+1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ de}$$

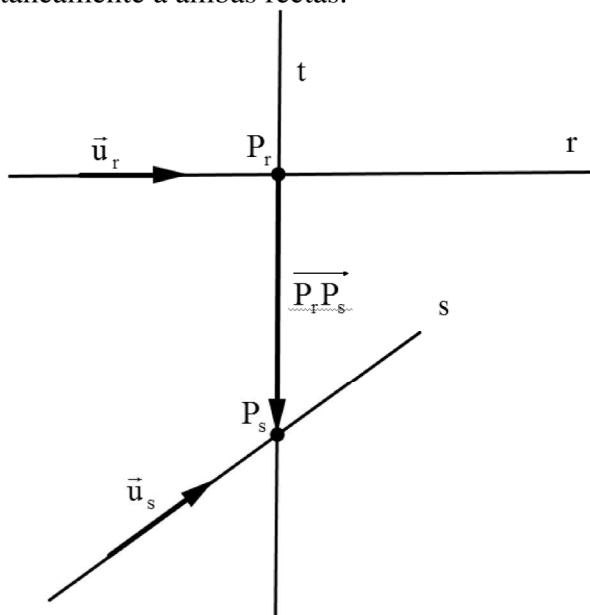
donde:  $\pi \equiv x + y - z - 2 = 0$ .

- Calculamos ahora el punto  $Q = s \cap \pi$  resolviendo el sistema que determinan  $s$  y  $\pi$ , de donde:  $2 - \lambda + 1 + \lambda - 1 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$  y, por tanto, el punto de intersección es:  $Q = s \cap \pi = (2,1,1)$ .
- La recta pedida es finalmente la que pasa por  $P$  y  $Q$ :

$$t \equiv \begin{cases} P = (0,1,-1) \\ Q = (2,1,1) \end{cases} \Rightarrow t \equiv \begin{cases} P = (0,1,-1) \\ \overrightarrow{PQ} = (2,0,2) \end{cases} \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}.$$

- **Recta perpendicular común a dos rectas.**

Se entiende que la recta pedida debe cortar a ambas rectas, ya que en caso contrario habría infinitas soluciones. El objetivo es obtener un punto  $P_r$  de  $r$ , y un punto  $P_s$  de  $s$ , de forma que el vector que determinen:  $\overrightarrow{P_r P_s}$  sea perpendicular simultáneamente a ambas rectas.



Ejemplo: hallar la perpendicular común a las rectas:

$$r \equiv \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+11}{4} \text{ y } s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{1}.$$

Es conveniente, en primer lugar, expresar las rectas en paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = -2 - \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -11 + 4\lambda \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = -2 + 2\mu \\ z = \mu \end{cases}.$$

Buscamos ahora dos puntos, uno de cada recta,  $P_r$  y  $P_s$  de forma que

$$\overrightarrow{P_r P_s} \cdot \vec{u}_r = 0 \quad y \quad \overrightarrow{P_r P_s} \cdot \vec{u}_s = 0.$$

Como los puntos de  $r$  son de la forma:

$$P_r = (-2 - \lambda, 1 + 2\lambda, -11 + 4\lambda),$$

los puntos de  $s$  son de la forma:

$$P_s = (1 + \mu, -2 + 2\mu, \mu),$$

y el vector que determinan es:

$$\overrightarrow{P_r P_s} = (3 + \lambda + \mu, -3 - 2\lambda + 2\mu, 11 - 4\lambda + \mu).$$

$$\overrightarrow{P_r P_s} \cdot \vec{u}_r = -3 - \lambda - \mu - 6 - 4\lambda + 4\mu + 44 - 16\lambda + 4\mu = 0.$$

$$\overrightarrow{P_r P_s} \cdot \vec{u}_s = 3 + \lambda + \mu - 6 - 4\lambda + 4\mu + 11 - 4\lambda + \mu = 0.$$

Resulta el sistema:  $\left. \begin{array}{l} -21\lambda + 7\mu = -35 \\ -7\lambda + 6\mu = -8 \end{array} \right\}$ , cuya solución es:  $\lambda = 2$  y  $\mu = 1$ , por

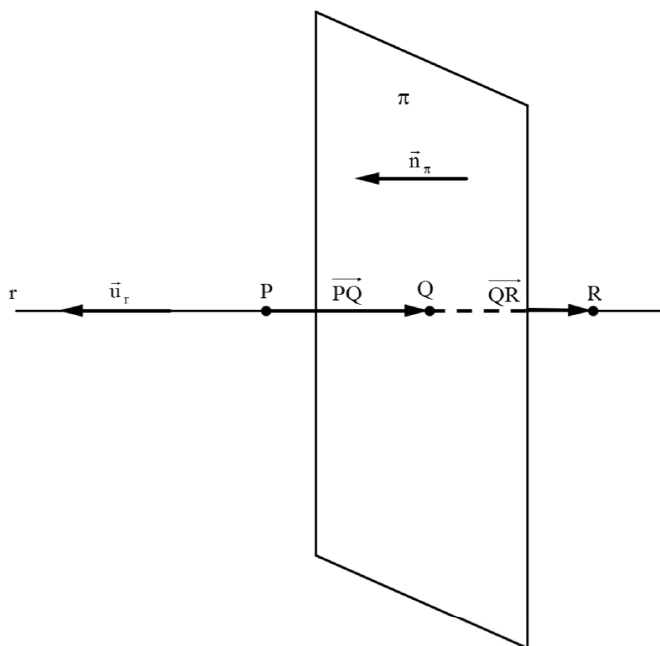
tanto,  $P_r = (-4, 5, -3)$ ,  $P_s = (2, 0, 1)$ , y la recta pedida está determinada por:

$$t \equiv \begin{cases} P_t = P_s = (2, 0, 1) \\ \vec{u}_t = \overrightarrow{P_r P_s} = (6, -5, 4) \end{cases} \quad \text{que, en forma continua, es: } t \equiv \frac{x-2}{6} = \frac{y}{-5} = \frac{z-1}{4}.$$

- **Simétrico de un punto respecto a un plano.**

Hay que seguir el siguiente proceso:

- Hallar la recta  $r$  perpendicular al plano  $\pi$  por el punto  $P$ .
- Calcular el punto de intersección de la recta y el plano:  $Q = r \cap \pi$ .
- El punto simétrico  $R$  es el que cumple la igualdad:  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QR}$ .



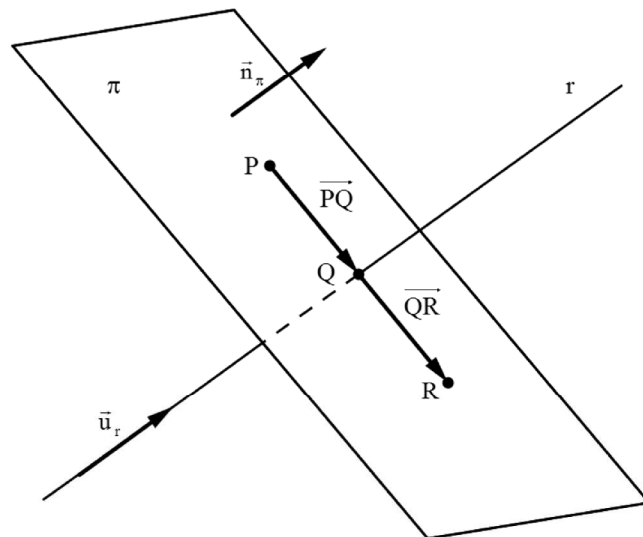
Ejemplo: hallar el punto simétrico de  $P = (2, 2, -1)$  respecto al plano:

$$\pi \equiv x + y - z - 2 = 0.$$

- $\vec{u}_r = \vec{n}_\pi = (1,1,-1)$ . Luego, la recta perpendicular es:  $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$ .
- Calculamos ahora el punto:  $Q = r \cap \pi$  resolviendo el sistema que determinan sustituyendo la expresión de la recta en el plano:  
 $2 + \lambda + 2 + \lambda + 1 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow 3\lambda = -3 \Rightarrow \lambda = -1$  y, por tanto:  $Q = (1,1,0)$ .
- $\vec{PQ} = \vec{QR}$ , luego:  $(-1,-1,1) = (x-1, y-1, z) \Rightarrow \begin{cases} x-1 = -1 \\ y-1 = -1 \\ z = 1 \end{cases}$  y, despejando,  
 el punto simétrico será:  $R = (0,0,1)$ .

• **Simétrico de un punto respecto a una recta (es análogo al anterior).**

- Hallar el plano  $\pi$  perpendicular a la recta por el punto P.
- Calcular el punto de intersección de la recta y el plano:  $Q = r \cap \pi$ .
- El punto simétrico R cumple la igualdad  $\vec{PQ} = \vec{QR}$ .



Ejemplo: hallar el punto simétrico de  $P = (1,1,1)$  respecto a  $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$ .

- $\vec{n}_\pi = \vec{u}_r = (2,1,1)$ , el plano perpendicular es:  $\pi \equiv 2x + y + z + D = 0$  y el término independiente D se calcula imponiendo que el punto P pertenece al plano  $\pi$  y cumplirá entonces su ecuación:  $2 + 1 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -4$ . Por tanto:  $\pi \equiv 2x + y + z - 4 = 0$ .
- Calculamos ahora el punto  $Q = r \cap \pi$  resolviendo el sistema que determinan:  $2 + 4\lambda + \lambda + 2 + \lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$  y  $Q = (1,0,2)$ .
- $\vec{PQ} = \vec{QR}$  y, por tanto,  $(0,-1,1) = (x-1, y, z-2) \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \\ y = -1 \\ z-2 = 1 \end{cases}$ , y  
 despejando, el punto simétrico será:  $R = (1,-1,3)$ .

## 8.6 Ángulos y distancias.

### • **Ángulo entre dos rectas.**

El ángulo entre dos rectas se define como el ángulo que forman sus vectores de dirección, independientemente de que se corten o no.

$$\widehat{(r,s)} = (\widehat{\vec{u}_r, \vec{u}_s}) = \arccos \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s}{|\vec{u}_r| |\vec{u}_s|}$$

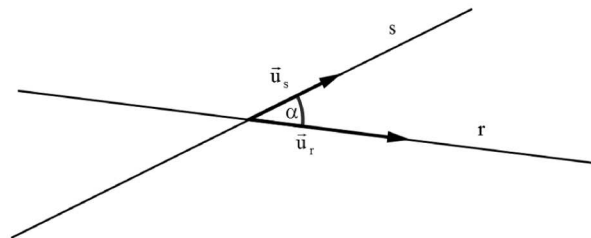
Ejemplo: hallar el ángulo que forman las rectas:

$$r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{2} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$$

$$\text{En paramétricas: } r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}, \text{ y sus vectores de}$$

dirección son:  $\vec{u}_r = (2,1,2)$ ,  $\vec{u}_s = (1,1,-1)$ , luego:

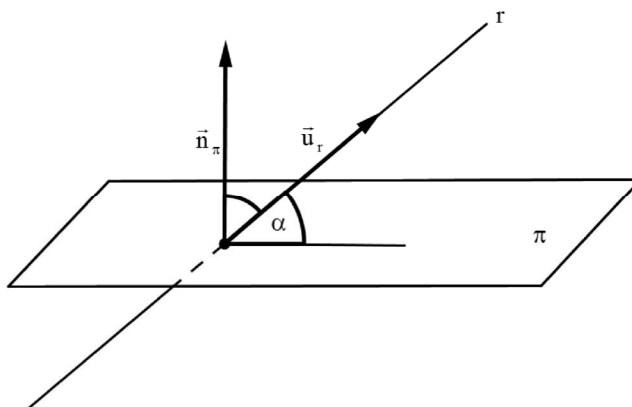
$$\alpha = \arccos \frac{(2,1,2) \cdot (1,1,-1)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{27}} = 78,9042^\circ.$$



### • **Ángulo entre recta y plano.**

Es el complementario del ángulo que determinan el vector de dirección de la recta y el vector normal del plano, es decir:

$$\widehat{(r, \pi)} = 90^\circ - (\widehat{\vec{u}_r, \vec{n}_\pi}) = 90^\circ - \arccos \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi}{|\vec{u}_r| |\vec{n}_\pi|}$$



Ejemplo: hallar el ángulo que determinan la recta y el plano siguientes:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y = \frac{z+1}{-1} \quad y \quad \pi \equiv x + y - z + 1 = 0.$$

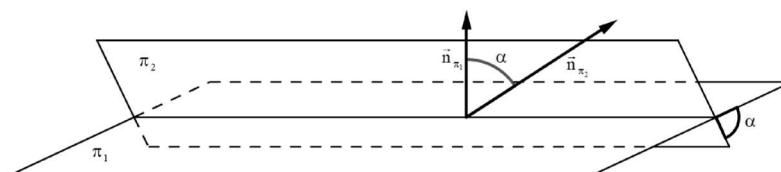
$$\alpha = 90^\circ - \arccos \frac{(2,1,-1) \cdot (1,1,-1)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = 90^\circ - \arccos \frac{4}{\sqrt{18}}$$

Luego, el ángulo es:  $\alpha = 90^\circ - 19,4712^\circ = 70,5287^\circ$ .

- **Ángulo entre dos planos.**

Coincide con el ángulo que determinan sus vectores normales. Es decir:

$$(\pi_1, \pi_2) = (\hat{n}_{\pi_1}, \hat{n}_{\pi_2}) = \arccos \frac{\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2}}{|\vec{n}_{\pi_1}| |\vec{n}_{\pi_2}|}$$



Ejemplo: hallar el ángulo que forman los planos siguientes:

$$\pi_1 \equiv x + y - 2z = 0 \quad , \quad \pi_2 \equiv 2x + y - z + 2 = 0$$

$$\alpha = \arccos \frac{(1,1,-2) \cdot (2,1,-1)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \arccos \frac{5}{6} = 33,5573^\circ$$

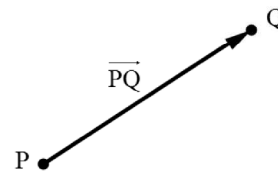
- **Distancia entre dos puntos.**

En general, todas las distancias se obtienen a partir de módulos, ángulos, productos escalares y productos vectoriales.

En este primer caso, la distancia es el módulo del vector que une los puntos. Es decir,  $d(P, Q) = |\overline{PQ}|$

Ejemplo: la distancia de  $P = (0,1,2)$  a  $Q = (-1,3,2)$  es:

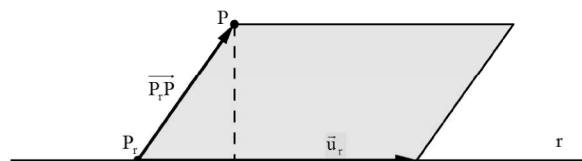
$$d(P, Q) = |(-1, 2, 0)| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$



- **Distancia de un punto a una recta.**

a) Método analítico:

Aplicar la fórmula: 
$$d(P, r) = \frac{|\vec{u}_r \wedge \overline{P_r P}|}{|\vec{u}_r|}$$



En esta fórmula se está expresando simplemente:  $\left( \text{altura} = \frac{\text{área}}{\text{base}} \right)$ .

Ejemplo: hallar la distancia de  $P = (1, -2, 0)$  a la recta:  $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases}$

$$P_r = (2, 1, -1), \quad \overline{P_r P} = (-1, -3, 1) \quad \text{y} \quad \vec{u}_r = (1, 1, -2)$$

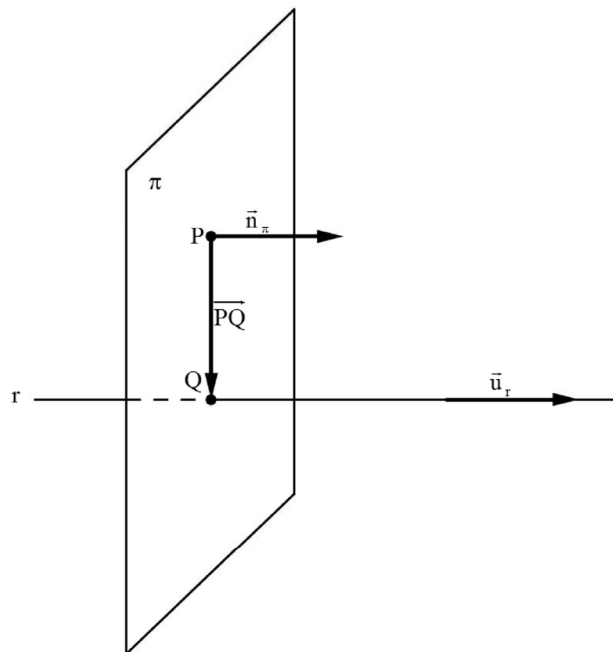
$$\vec{u}_r \wedge \overrightarrow{P_r P} = (1,1,-2) \wedge (-1,-3,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} = (-5,1,-2)$$

$$d(P,r) = \frac{|(-5,1,-2)|}{|(1,1,-2)|} = \frac{\sqrt{(-5)^2 + 1^2 + (-2)^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5}$$

b) Método gráfico:

Este método consiste en:

- Hallar el plano  $\pi$  perpendicular a la recta 'r' por el punto P.
- Calcular el punto de intersección entre plano y recta:  $Q = r \cap \pi$ .
- La distancia pedida es la que hay entre los dos puntos.  $d(P,r) = |\overrightarrow{PQ}|$ .

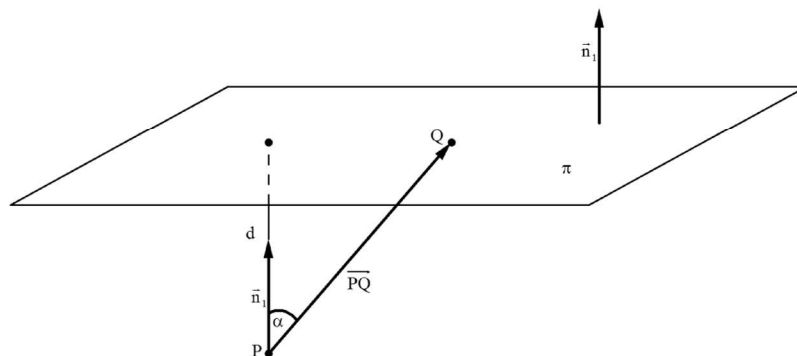


Ejemplo: calcularemos de nuevo la misma distancia del método analítico.

- El plano perpendicular a r por P debe tener como vector normal  $\vec{u}_r$ ,  $\vec{n}_\pi = \vec{u}_r = (1,1,-2)$ . Por tanto, será  $\pi \equiv x + y - 2z + D = 0$ . Como  $P \in \pi$ ,  $1 - 2 - 0 + D = 0 \Rightarrow D = 1$  y, el plano es:  $\pi \equiv x + y - 2z + 1 = 0$ .
- La intersección se obtiene resolviendo el sistema entre plano y recta:  $2 + \lambda + 1 + \lambda + 2 + 4\lambda + 1 = 0 \Rightarrow 6\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$ . Luego, el punto de intersección es:  $Q = r \cap \pi = (1,0,1)$ .
- $d(P,r) = d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(0,2,1)| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ .

• **Distancia de un punto a un plano.**a) Método analítico:

Aplicar la fórmula: 
$$d(P,\pi) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



Esta fórmula se obtiene al considerar el producto escalar de los vectores  $\vec{n}_1$  y  $\vec{PQ}$ , siendo:  $P = (x_0, y_0, z_0)$  el punto desde el que se calculará la distancia,  $Q = (x_1, y_1, z_1)$  un punto cualquiera del plano y  $\vec{n}_1$  un vector normal unitario del plano:

$$\vec{n}_1 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(A, B, C)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right)$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{PQ} = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{PQ}| \cdot \cos \alpha = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{PQ}| \cdot \frac{d}{|\vec{PQ}|} = d. \text{ En realidad, esta igualdad sólo es}$$

válida en valor absoluto, ya que depende del sentido del vector  $\vec{n}_1$ : si apunta hacia el plano ( $\cos +$ ) o en sentido contrario, alejándose del plano ( $\cos -$ ), pues en este caso, el ángulo sería el suplementario del ángulo del gráfico.

$$d = \left| \vec{n}_1 \cdot \vec{PQ} \right| = \left| \left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right) \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \right| =$$

$$= \left| \frac{A \cdot (x_1 - x_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \frac{B \cdot (y_1 - y_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \frac{C \cdot (z_1 - z_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| = \frac{|A \cdot x_1 - A \cdot x_0 + B \cdot y_1 - B \cdot y_0 + C \cdot z_1 - C \cdot z_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Como  $A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C \cdot z_1 = -D$  porque Q pertenece al plano, tendremos:

$$d = \left| \vec{n}_1 \cdot \vec{PQ} \right| = \frac{|-A \cdot x_0 - B \cdot y_0 - C \cdot z_0 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Es decir, la distancia es el valor absoluto que se obtiene al sustituir las coordenadas del punto en la ecuación del plano (sin igualar a cero), dividido entre el módulo del vector normal.

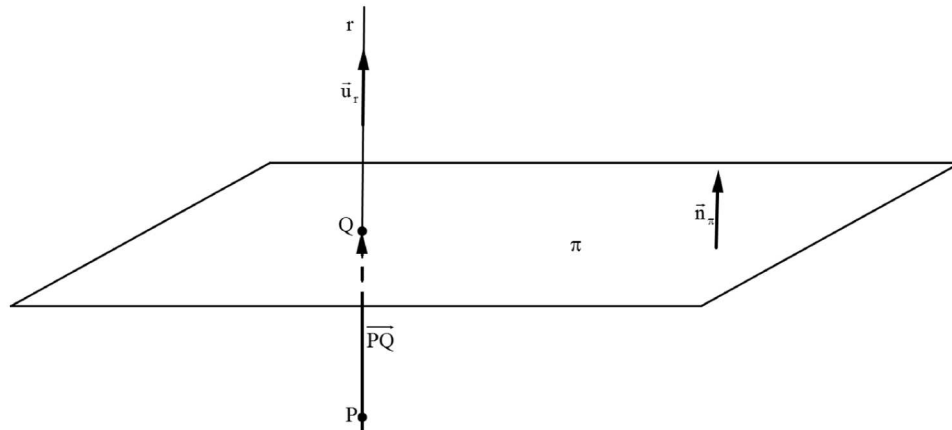
Ejemplo: hallar la distancia de  $P = (1, 0, 2)$  al plano  $\pi \equiv -x + y + z + 5 = 0$ .

$$d(P, \pi) = \frac{|-1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 5|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

b) Método gráfico:

Este método consiste en:

- Hallar la recta 'r' perpendicular al plano  $\pi$  que pasa por el punto P.
- Calcular el punto de intersección entre plano y recta:  $Q = r \cap \pi$ .
- La distancia pedida es la que hay entre los dos puntos:  $d(P, \pi) = |\vec{PQ}|$ .



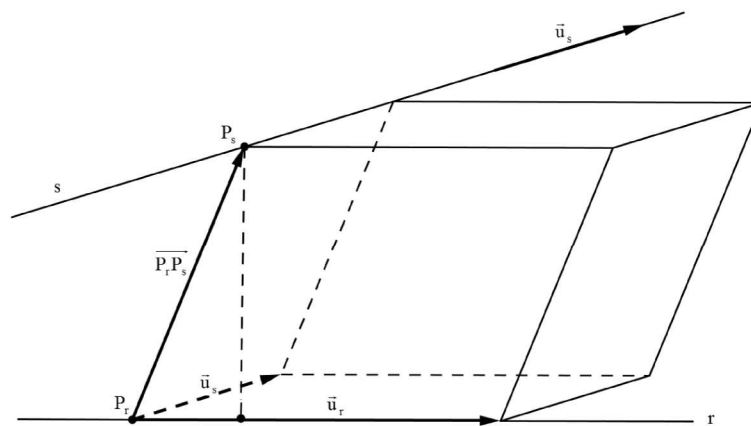
Ejemplo: calcularemos de nuevo la misma distancia del método analítico.

- La recta 'r' perpendicular al plano  $\pi$  por P, tendrá como vector de dirección:  $\vec{u}_r = \vec{n}_\pi = (-1, 1, 1)$ . Por tanto, su ecuación es:  $r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$ .
- La intersección se obtiene resolviendo el sistema entre plano y recta:  $-1 + \lambda + \lambda + 2 + \lambda + 5 = 0 \Rightarrow 3\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -2$ , luego el punto de intersección es:  $Q = r \cap \pi = (3, -2, 0)$ .
- $d(P, \pi) = d(P, Q) = |\vec{PQ}| = |(2, -2, -2)| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ .

• **Distancia entre dos rectas que se cruzan.**

a) Método analítico:

Aplicar la fórmula: 
$$d(r, s) = \frac{|(\vec{u}_r \wedge \vec{u}_s) \cdot \vec{P_r P_s}|}{|\vec{u}_r \wedge \vec{u}_s|}$$



En esta fórmula, se expresa simplemente que:  $\left( \text{altura} = \frac{\text{volumen}}{\text{área base}} \right)$ .

Ejemplo: hallar la distancia entre las rectas:

$$r \equiv \frac{x-1}{-1} = y-2 = z \quad y \quad s \equiv x-1 = y = \frac{z+1}{2}$$

Los datos son:

$$P_r = (1,2,0), P_s = (1,0,-1), \overrightarrow{P_r P_s} = (0,-2,-1), \vec{u}_r = (-1,1,1) \text{ y } \vec{u}_s = (1,1,2).$$

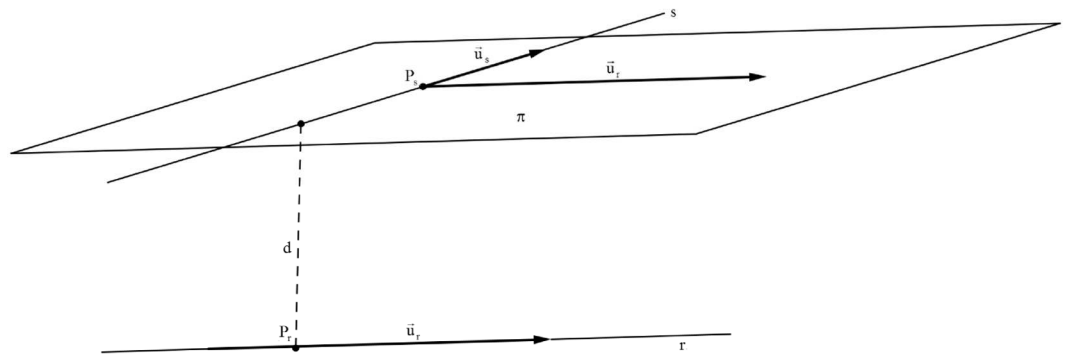
$$\vec{u}_r \wedge \vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} = (1,3,-2).$$

$$d(r,s) = \frac{|(1,3,-2) \cdot (0,-2,-1)|}{|(1,3,-2)|} = \frac{|-4|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{\sqrt{14}} = \frac{4\sqrt{14}}{14} = \frac{2\sqrt{14}}{7}.$$

b) Método gráfico:

Este método consiste en:

- Hallar el plano  $\pi$  paralelo a 'r' y que contiene a 's'.
- Tendremos entonces:  $d(r,s) = d(P_r, \pi)$ , que ya ha sido estudiado.



Ejemplo: el mismo visto en el método analítico.

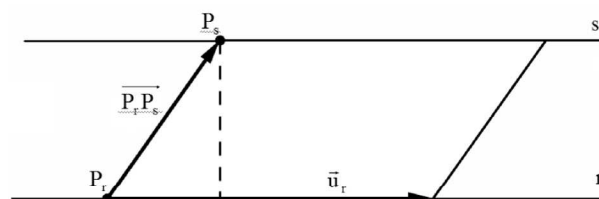
$$\text{- El plano se obtiene de: } \pi \equiv \begin{cases} P_s = (1,0,-1) \\ \vec{u}_s = (1,1,2) \\ \vec{u}_r = (-1,1,1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

luego el plano es:  $\pi \equiv -x - 3y + 2z + 3 = 0$ .

$$\text{- } d(r,s) = d(P_r, \pi) = \frac{|-1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3|}{\sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{14}} = \frac{4}{\sqrt{14}} = \frac{4\sqrt{14}}{14} = \frac{2\sqrt{14}}{7}.$$

• **Distancia entre dos rectas paralelas.**

Es claro que:  $d(r,s) = d(P_s, r) = \frac{|\vec{u}_r \wedge \overrightarrow{P_r P_s}|}{|\vec{u}_r|}$ , ya estudiado anteriormente.



Ejemplo: sean las rectas:  $r \equiv \frac{x-2}{-1} = y = z-1$  y  $s \equiv x-1 = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$ .

Los datos son:  $P_r = (2,0,1)$ ,  $P_s = (1,0,0)$ ,  $\overrightarrow{P_r P_s} = (-1,0,-1)$  y  $\vec{u}_r = (-1,1,1)$ .

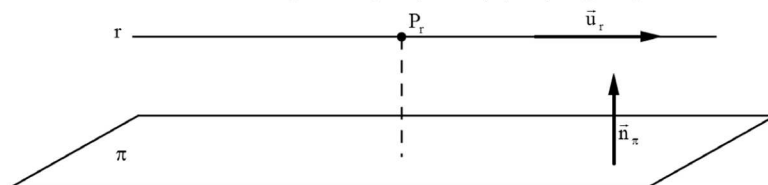
$$\vec{u}_r \wedge \overrightarrow{P_r P_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} = (-1, -2, 1).$$

$$d(r,s) = \frac{|(-1, -2, 1)|}{|(-1, 1, 1)|} = \frac{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1^2}}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}.$$

- **Distancia de una recta a un plano.**

Esta distancia sólo tiene sentido cuando la recta y el plano son paralelos, porque si se cortan, la distancia es cero.

Es este caso, tenemos que:  $d(r, \pi) = d(P_r, \pi)$  (que ya ha sido estudiado).



Ejemplo: hallar la distancia entre la recta y el plano siguientes:

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = y-1 = \frac{z-2}{-2} \quad \text{y} \quad \pi \equiv 2x + 4y + z - 2 = 0.$$

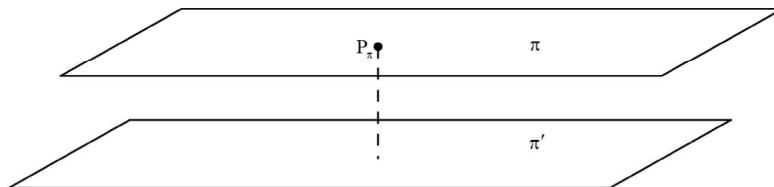
Son paralelos porque:  $\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi = (-1, 1, -2) \cdot (2, 4, 1) = -2 + 4 - 2 = 0$ .

$$d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 2|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{21}} = \frac{8\sqrt{21}}{21}.$$

- **Distancia entre dos planos.**

Para que exista alguna distancia que sea distinta de cero deben ser paralelos, porque en caso contrario, serán secantes y su distancia será cero.

Si son paralelos, la distancia entre ellos coincidirá con la distancia de un punto cualquiera de un plano al otro plano. Es decir:  $d(\pi, \pi') = d(P_\pi, \pi')$ .



Ejemplo: hallar la distancia entre los siguientes planos paralelos:

$\pi \equiv x + 2y - z + 5 = 0$  y  $\pi' \equiv 2x + 4y - 2z + 1 = 0$ . Por ejemplo:  $P_\pi = (0,0,5)$ .

$$d(\pi, \pi') = d(P_\pi, \pi') = \frac{|2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 2 \cdot 5 + 1|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2}} = \frac{|-9|}{\sqrt{24}} = \frac{9\sqrt{24}}{24} = \frac{3\sqrt{24}}{8} = \frac{3\sqrt{6}}{4}.$$