Tema 5: Integral indefinida.

5.1 Función Primitiva.

- Una función F(x) es primitiva de otra función f(x) cuando $F'(x) = f(x)$. Por ejemplo $F(x) = x^2$ es primitiva de f(x) = 2x. Otra primitiva de f(x) = 2x podría ser $F(x) = x^2 + 5$, o en general, $F(x) = x^2 + C$, donde C es una constante. Por lo tanto una función f(x) tiene infinitas primitivas. Al conjunto de todas las funciones primitivas se le llama **integral indefinida** y se representa de la siguiente forma: $\int f(x)\,dx$. Es decir: $\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow F'(x) = f(x)}$.

  Ejemplos: $\int 3x^2 dx = x^3 + C$, $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$, $\int \frac{1}{x} dx = Lx + C$.

5.2 Propiedades de la integral indefinida:

- La integral de la suma es la suma de las integrales:

  $$\boxed{\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx}$$

  Demostración: al derivar el segundo miembro debe resultar $f(x) + g(x)$.

  Por definición $\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.

  $$\left(\int f(x)dx + \int g(x)dx\right)' = \left(\int f(x)dx\right)' + \left(\int g(x)dx\right)' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

  Ejemplo: $\int 2x + \cos x dx = \int 2x dx + \int \cos x dx = x^2 + \operatorname{sen} x + C$

- Las constantes o números que multiplican una función salen fuera de la integral.

  $$\boxed{\int k \bullet f(x)dx = k \bullet \int f(x)dx}$$

  Demostración: queremos demostrar que si derivamos el segundo miembro nos tiene que salir $k \bullet f(x)$.

  $$\left(k \bullet \int f(x)dx\right)' = k \bullet \left(\int f(x)dx\right)' = k \bullet F'(x) = k \bullet f(x)$$

  Ejemplo: $\int 5 \bullet \frac{1}{x} dx = 5 \bullet \int \frac{1}{x} dx = 5 \bullet Lx + C$

  Ejemplo: $\int \operatorname{sen} 4x dx = \int \frac{4 \bullet \operatorname{sen} 4x}{4} dx = \frac{1}{4} \int 4 \bullet \operatorname{sen} 4x dx = \frac{1}{4}(-\cos 4x) + C$

5.3 Integrales inmediatas.

- Teniendo en cuenta la tabla de derivadas inmediatas (y también la tabla de derivadas compuestas), surgen de forma natural las siguientes fórmulas de la izquierda llamadas integrales inmediatas así como las fórmulas de la derecha que son las mismas pero aplicadas a funciones compuestas en las que aparece también la derivada dentro de la integral.

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{para } n \neq -1$	$\int f(x)^n \bullet f'(x) dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \text{Ln}x + C$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \text{Ln}f(x) + C$
$\int \frac{1}{x} \log_a e \, dx = \log_a x + C$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \log_a e \, dx = \log_a f(x) + C$
$\int a^x \text{Ln}a \, dx = a^x + C$	$\int a^{f(x)} f'(x) \text{Ln}a \, dx = a^{f(x)} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + C$
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$	$\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx = \sqrt{f(x)} + C$
$\int \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} dx = \sqrt[n]{x} + C$	$\int \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}} dx = \sqrt[n]{f(x)} + C$
$\int \text{sen}\, x \, dx = -\cos x + C$	$\int \text{sen}\, f(x) \bullet f'(x) dx = -\cos f(x) + C$
$\int \cos x \, dx = \text{sen}\, x + C$	$\int \cos f(x) \bullet f'(x) dx = \text{sen}\, f(x) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \text{tg}\, x + C$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \text{tg}\, f(x) + C$
$\int \frac{-1}{\text{sen}^2 x} dx = \cot g x + C$	$\int \frac{-f'(x)}{\text{sen}^2 f(x)} dx = \cot g f(x) + C$
$\int \frac{\text{sen}\, x}{\cos^2 x} dx = \sec x + C$	$\int \frac{\text{sen}\, f(x)}{\cos^2 f(x)} f'(x) dx = \sec f(x) + C$
$\int \frac{-\cos x}{\text{sen}^2 x} dx = \text{cosec}\, x + C$	$\int \frac{-\cos f(x)}{\text{sen}^2 f(x)} f'(x) dx = \text{cosec}\, f(x) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{arcsen}\, x + C$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx = \text{arcsen}\, f(x) + C$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + C$	$\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx = \arccos f(x) + C$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{arctg}\, x + C$	$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} dx = \text{arctg}\, f(x) + C$

5.4 Integrales por descomposición.

- Este método de integración consiste en aplicar las propiedades de la integral (linealidad de la integral) y las integrales inmediatas anteriores. Sólo es posible aplicarlo en ocasiones en las que no aparecen productos ni cocientes y las integrales son sencillas. Ejemplos:
  - $\int (x^3 - 2x^2 + x - 1)dx = \int x^3 dx - 2\int x^2 dx + \int x dx - \int 1 dx =$

    $= \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + C$
  - $\int \left(-2\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x} - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} \right) dx = -2\int x^{\frac{1}{3}} dx + 3\int x^{\frac{1}{2}} dx - 3\int \frac{1}{x} dx + 2\int x^{-3} dx =$

    $= -2\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + 3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 3Lx + 2\frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^4} + 2\sqrt{x^3} - 3Lx - \frac{1}{x^2} + C$
  - $\int \left(\frac{-2x^2 - 5x + 6}{x - 1} \right) dx$ →Hacemos en primer lugar la división, que en este caso puede realizarse por el método de Ruffini:

	-2	-5	$+6$
1		-2	-7
	-2	-7	-1

    A continuación expresamos el dividendo como divisor por cociente más el resto:

    $\int \left(\frac{(x-1)(-2x-7)-1}{x-1} \right) dx$ y ahora al separar en suma de dos integrales, tendremos integrales inmediatas.

    $\int \left(\frac{-2x^2 - 5x + 6}{x - 1} \right) dx = \int \left(\frac{(x-1)(-2x-7)-1}{x-1} \right) dx =$

    $= \int (-2x - 7)dx - \int \frac{1}{x-1} dx = -2\int x dx - 7\int 1 dx - \int \frac{1}{x-1} dx =$

    $= -2\frac{x^2}{2} - 7x - L|x - 1| + C$

    (se escribe valor absoluto para que el logaritmo tenga sentido).

5.5 Integrales por sustitución o cambio de variable.

- Antes de explicar el método veamos la relación que hay entre las derivadas y las diferenciales. Digamos que son diferentes formas de expresar lo mismo:

  $\frac{df(x)}{dx} = f'(x) \Rightarrow df(x) = f'(x)dx \Rightarrow \boxed{df = f'dx}$.

  Supongamos que queremos hacer una integral $\int f(x)dx$ que en principio parece complicada y observamos que la función podría expresarse a partir de una composición de funciones en la que aparece la derivada de una de ellas:

$f(x) = g(h(x))h'(x)$. Haciendo el cambio de variable: $t = h(x)$; $dt = h'(x)dx$ la integral inicial podría expresarse entonces de la siguiente forma:

$\boxed{\int f(x)dx = \int g(h(x))h'(x)dx = \int g(t)dt}$ que será una integral más sencilla que la integral inicial. Ejemplo, $\int sen^3 x \cdot \cos x dx$, hacemos el cambio de variable: $t = senx$; $dt = \cos x dx$.

$$\int sen^3 x \cdot \cos x dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{sen^4 x}{4} + C$$

- En otras ocasiones puede interesar hacer el cambio de variable contrario $x = g(t) \Rightarrow dx = dg(t) = g'(t)\, dt$

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f(g(t)) \bullet g'(t)dt}$$

Ejemplo: $\int \frac{1}{x \bullet \sqrt{x-1}} dx$

Hacemos el cambio de variable: $x - 1 = t^2 \Rightarrow x = 1 + t^2 \Rightarrow 1 \cdot dx = 2t \cdot dt$

$$\int \frac{1}{x \bullet \sqrt{x-1}} dx = \int \frac{1}{(1+t^2) \bullet \sqrt{t^2}} \bullet 2tdt = \int \frac{2t}{(1+t^2)t} dt = 2\int \frac{1}{1+t^2} dt =$$

2arctgt+C= $2\,\text{arctg}\sqrt{x-1} + C$

Ejemplo: $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}\, dx$. Cambio de variable: $x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$ $(t = \sqrt[6]{x})$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt[3]{t^6} + \sqrt{t^6}}\, 6t^5 dt = \int \frac{6t^5}{t^2 + t^3} dt = \int \frac{6t^3}{1+t} dt =$$

$$= 6\left[\int t^2 - t + 1dt - \int \frac{1}{1+t} dt\right] = 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - Ln|1+t|\right) + C = \text{(deshaciendo}$$

$$\text{el cambio)} = 6\left(\frac{\sqrt[6]{x^3}}{3} - \frac{\sqrt[6]{x^2}}{2} + \sqrt[6]{x} - Ln(1+\sqrt[6]{x})\right) + C$$

- Para aplicar de forma práctica este método de integración, se pueden considerar los siguientes casos más habituales:
  - 1º Tipo potencial: hay que hacer el cambio de variable "t=base".

    Ejemplo: $\int \frac{senx}{\cos^2 x} dx$. Cambio de variable: $t = \cos x \Rightarrow dt = -senxdx$

    $$\int \frac{senx}{\cos^2 x} dx = \int \frac{senx}{t^2} \cdot \frac{dt}{-senx} = \int t^{-2} dt = \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{\cos x} + C.$$
  - 2º Tipo logarítmico: el cambio de variable es "t=denominador".

    Ejemplo: $\int \frac{senx}{\cos x} dx$. Cambio de variable: $t = \cos x \Rightarrow dt = -senxdx$

    $$\int \frac{senx}{\cos x} dx = \int \frac{senx}{t} \cdot \frac{dt}{-senx} = \int -\frac{1}{t} dt = -L|t| + C = -L|\cos x| + C.$$
  - 3º Tipo exponencial: hay que hacer el cambio de variable "t=exponente".

    Ejemplo: $\int 2x \cdot e^{x^2} dx$. Cambio de variable: $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$

    $$\int 2x \cdot e^{x^2} dx = \int 2x \cdot e^t \frac{dt}{2x} = \int e^t dt = e^t + C = e^{x^2} + C.$$

- 4º Tipo trigonométrico: el cambio de variable "t=ángulo".
  Ejemplo: $\int 2x\cdot\cos x^2 dx$. Cambio de variable: $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$

  $$\int 2x\cdot\cos x^2 dx = \int 2x\cdot\cos t\frac{dt}{2x} = \int \cos t dt = \operatorname{sen} t + C = \operatorname{sen} x^2 + C.$$
- 5º Tipo arcotangente: "t=base del cuadrado del denominador".
  Ejemplo: $\int \frac{2x}{1+x^4}dx$. Cambio de variable: $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$

  $$\int \frac{2x}{1+(x^2)^2}dx = \int \frac{2x}{1+t^2}\cdot\frac{dt}{2x} = \int \frac{1}{1+t^2}dt = \operatorname{arctg}(t) + C = \operatorname{arctg}(x^2) + C.$$
- 6º Otros casos en los que aparecen funciones trigonométricas:

  a) Impar en seno: sustitución $\cos x = t \Rightarrow x = \operatorname{arc}\cos t \Rightarrow dx = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}dt$

  $$\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+4\cos^2 x}dx = \int \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+4t^2}\bullet\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int \frac{-1}{1+(2t)^2}dt =$$

  $$= -\frac{1}{2}\int \frac{2}{1+(2t)^2}dt = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2t) = = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\cos x) + C$$

  b) Impar en coseno: $\operatorname{sen} x = t \Rightarrow x = \operatorname{arcsen} t \Rightarrow dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$

  $$\int \operatorname{sen}^2 x \bullet \cos x\, dx = \int t^2 \bullet \sqrt{1-t^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$$

  c) Par en seno y coseno: $t = \operatorname{tg} x \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2}dt$

  $$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \text{ y } \operatorname{sen} x = \cos x\cdot \operatorname{tg} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

  $$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}\bullet\frac{1}{1+t^2}dt = \int \frac{t^2}{1+t^2}dt = \int 1dt + \int \frac{-1}{1+t^2}dt =$$

  $$= t - \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{tg} x - \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + C = \operatorname{tg} x - x + C$$

  d) Ninguno de los anteriores: $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Las otras razones trigonométricas

  serán: $\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$ y $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

  Ejemplo: $\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x+\cos x}dx = \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\bullet\frac{2}{1+t^2}dt =$

  $$= \int \frac{1}{\frac{1+t^2+2t+1-t^2}{1+t^2}}\bullet\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2}{2+2t}dt = 2\int \frac{1}{1+t}dt = 2L|1+t| + C =$$

  $$= 2L\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

e) Inversa de trigonométrica: por ejemplo para el arcsenx la sustitución es arcsen x = t ⇒ x = sent ⇒ dx = cost dt

Ejemplo: $\int \frac{\text{arcsenx}}{\sqrt{-x^2+1}}dx = \int \frac{t}{\sqrt{-\text{sen}^2 t+1}}\cos t dt = \int \frac{t\sqrt{1-\text{sen}^2 t}}{\sqrt{1-\text{sen}^2 t}}dt =$

$= \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\text{arcsenx})^2}{2} + C$

5.6 Integrales por partes.

- Puesto que dy = y'·dx, las propiedades de la diferencial deben ser las mismas que las de las derivadas , por ejemplo :
  d(u+v) = (u+v)' dx = (u' +v') dx = u' dx + v' dx = du +dv
  d(u·v) = (u·v)' dx = (u'v+v'u) dx = u'v dx + v'u dx = vdu + udv
  Si nos quedamos con esta última propiedad :
  d(u·v) = v·du + u·dv ⇒ u·dv = d(u·v) - v·du ⇒ $\int u \bullet dv = \int d(u \bullet v) - \int v \bullet du$
  Puesto que $\int df(x) = \int f'(x)dx = f(x)$ (salvo una constante que se pone al final) entonces:

$$\boxed{\int u \bullet dv = u \bullet v - \int v \bullet du}$$

Ejemplo: $\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^{2x}dx}_{dv}$

u = x ⇒ du = dx

dv = e^{2x}dx ⇒ $\int dv = v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}$

$\int xe^{2x}dx = x\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int\frac{1}{2}e^{2x}dx = x\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$

Ejemplo: $\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\cos x dx}_{dv}$

u = x ⇒ du = dx

dv = cosxdx ⇒ $\int dv = v = \int \cos x dx = \text{senx}$

$\int x\cos x dx = x\cdot\text{senx} - \int \text{senx}dx = x\cdot\text{senx} + \cos x + C$

Casos que se suelen resolver:

$\int x^n \text{ sen } x dx$ $\int x^n e^x dx$ $\int x^n \ln x dx$ $\int e^x \text{ sen } x dx$

$\int x^n \text{ arctg } x dx$ $\int \text{arctg } x dx$ $\int \text{Lnx} dx$ etc.

5.7 Integrales de funciones racionales.

- Lo primero que hay que hacer cuando el grado del numerador sea mayor o igual que el grado del denominador, es realizar la división polinómica:

P(x) | Q(x)
R(x) C(x)

$$\Rightarrow P(x) = Q(x)\cdot C(x) + R(x) \quad \Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int \frac{P(x)}{Q(x)} = \int C(x) + \int \frac{R(x)}{Q(x)}}$$

donde la integral de C(x) es inmediata y R(x) es un polinomio de menor grado que Q(x).

Ejemplo: $\int \frac{x^3 - 5x^2 + 6x + 2}{x-1}dx = \int (x^2 - 4x + 2)dx + \int \frac{4}{x-1}dx =$

$= \frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 2x + 4L|x-1| + C$

Suponiendo en lo sucesivo que el grado del numerador sea menor que el grado del denominador, debemos de factorizar el denominador y pueden ocurrir los siguientes casos:

- 1º Que el denominador tenga raíces reales simples:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-x_1)\bullet(x-x_2)} = \frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)} = \frac{A\bullet(x-x_2) + B\bullet(x-x_1)}{(x-x_1)\bullet(x-x_2)}$$

Si igualamos $P(x) = A\bullet(x-x_2) + B\bullet(x-x_1)$ se calcula A y B <u>comparando coeficientes o dándole valores a la x</u>

Al final tendremos:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} = \int \frac{A}{(x-x_1)}dx + \int \frac{B}{(x-x_2)}dx = A\cdot L|x-x_1| + B\cdot L|x-x_2| + C$$

Ejemplo: $\int \frac{-x^2 + 7x + 9}{x^3 + 2x^2 - x - 2}dx$

$$\frac{-x^2 + 7x + 9}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{-x^2 + 7x + 9}{(x+1)(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} =$$

$$= \frac{A(x-1)(x+2) + B(x+1)(x+2) + C(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x+2)} =$$

$$= \frac{A(x^2 + x - 2) + B(x^2 + 3x + 2) + C(x^2 - 1)}{(x+1)(x-1)(x+2)} =$$

$$= \frac{(A+B+C)x^2 + (A+3B)x + (-2A+2B-C)}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$

Comparando el principio con el final obtenemos:

$$\begin{cases} A + B + C = -1 \\ A + 3B = 7 \\ -2A + 2B - C = 9 \end{cases} \quad \Rightarrow A = \frac{-1}{2} \quad B = \frac{5}{2} \quad C = -3$$

La integral inicial ha quedado descompuesta en tres integrales inmediatas de tipo logarítmico: $\int \frac{-x^2 + 7x + 9}{x^3 + 2x^2 - x - 2}dx = \int \frac{-1/2}{x+1}dx + \int \frac{5/2}{x-1}dx + \int \frac{-3}{x+2}dx =$

$= -\frac{1}{2}\cdot L|x+1| + \frac{5}{2}\cdot L|x-1| - 3L|x+2| + C$

- 2º Que el denominador tenga raíces reales múltiples:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-x_1)\bullet(x-x_2)^3}=\frac{A}{(x-x_1)}+\frac{B}{(x-x_2)}+\frac{C}{(x-x_2)^2}+\frac{D}{(x-x_2)^3}=$$

$$=\frac{A\bullet(x-x_2)^3+B\bullet(x-x_1)(x-x_2)^2+C\bullet(x-x_1)(x-x_2)\ +D\bullet(x-x_1)}{(x-x_1)\bullet(x-x_2)^3}$$

Igualando el principio con el final:

$P(x)=A\bullet(x-x_2)^3+B\bullet(x-x_1)(x-x_2)^2+C\bullet(x-x_1)(x-x_2)+D\bullet(x-x_1)$

Calculamos después los coeficientes A, B, C y D y resolvemos las integrales inmediatas:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}=\int\frac{A}{(x-x_1)}dx+\int\frac{B}{(x-x_2)}dx+\int\frac{C}{(x-x_2)^2}dx+\int\frac{D}{(x-x_2)^3}dx=$$

$$=A\cdot L|x-x_1|+B\cdot L|x-x_2|+C\frac{(x-x_2)^{-2+1}}{-2+1}+D\frac{(x-x_2)^{-3+1}}{-3+1}=$$

$$=A\cdot L|x-x_1|+B\cdot L|x-x_2|+C\frac{1}{-(x-x_2)}+D\frac{1}{-2(x-x_2)^2}$$

Ejemplo: $\int\frac{3x+12}{(x-2)(x+1)^2}dx\Rightarrow\frac{3x+12}{(x-2)(x+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}=$

$$=\frac{A(x+1)^2+B(x-2)(x+1)+C(x-2)}{(x-2)(x+1)^2}=\frac{(A+B)x^2+(2A-B+C)x+(A-2B-2C)}{(x-2)(x+1)^2}$$

$$3x+12=(A+B)x^2+(2A-B+C)x+(A-2B-2C)$$

$$\begin{cases}A+B=0\\2A-B+C=3\\A-2B-2C=12\end{cases}\Rightarrow A=2\quad B=-2\quad C=-3$$

$$\int\frac{3x+12}{(x-2)(x+1)^2}dx=\int\frac{2}{x-2}dx+\int\frac{-2}{x+1}dx+\int\frac{-3}{(x+1)^2}dx=$$

$$=2\cdot L|x-2|-2\cdot L|x+1|-3\cdot\frac{(x+1)^{-1}}{-1}+C=2\cdot L|x-2|-2\cdot L|x+1|+\frac{3}{x+1}+C$$

- 3º Que el denominador tenga raíces complejas:
  Si al intentar resolver una ecuación de 2º grado resulta una raíz negativa, entonces no hay solución real, pero sí compleja.
  El denominador complejo debemos expresarlo de la forma $(x-a)^2+b^2$ y resolver la integral: $\int\frac{P(x)}{Q(x)}=\int\frac{Ax+B}{(x-a)^2+b^2}$ que se descompondrá en suma de dos integrales inmediatas, una de tipo logarítmica y otra de tipo arcotangente.

  Ejemplo: $\int\frac{x+3}{x^2+2x+4}dx$

x^2+2x+4 no tiene raíces reales por lo que igualamos

$x^2+2x+4=(x-a)^2+b^2 \Rightarrow x^2+2x+4=x^2-2ax+a^2+b^2 \Rightarrow$

$a=-1$, $b=\sqrt{3}$.

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+4}dx=\int \frac{x+3}{(x+1)^2+3}dx=\int \frac{x}{(x+1)^2+3}dx+\int \frac{3}{(x+1)^2+3}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{2x+2-2}{(x+1)^2+3}dx+\int \frac{3}{(x+1)^2+3}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x+1)^2+3}dx+\frac{1}{2}\int \frac{-2}{(x+1)^2+3}dx+\int \frac{3}{(x+1)^2+3}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\mathrm{Ln}(x+1)^2+3\right)+\int \frac{2}{(x+1)^2+3}dx$$

Esta última integral es del tipo arcotangente:

$$\int \frac{2}{(x+1)^2+3}dx=\int \frac{\frac{2}{3}}{\frac{(x+1)^2}{3}+\frac{3}{3}}dx=\int \frac{\frac{2}{3}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{3}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx=\frac{2}{3}\sqrt{3}\mathrm{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

Luego la solución final es $\frac{1}{2}\left(\mathrm{Ln}(x+1)^2+3\right)+\frac{2}{3}\sqrt{3}\mathrm{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$

Ejemplo resumen: $\int \frac{3x^4-2x^3+3x^2+x-3}{x^2(x-1)(x^2+1)}=\int \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{Dx+E}{x^2+1}$. Ahora tenemos que calcular A, B, C, D , E y después resolver cada una de las integrales.

$$\frac{3x^4-2x^3+3x^2+x-3}{x^2(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{Dx+E}{x^2+1}=$$

$$=\frac{A\bullet x(x-1)(x^2+1)+B\bullet(x-1)(x^2+1)+C\bullet x^2(x^2+1)+(Dx+E)\bullet x^2(x-1)}{x^2(x-1)(x^2+1)}$$

$$3x^4-2x^3+3x^2+x-3=A\bullet x(x-1)(x^2+1)+B\bullet(x-1)(x^2+1)+C\bullet x^2(x^2+1)+(Dx+E)\bullet x^2(x-1)$$

Si $x=0 \Rightarrow -3=-B \Rightarrow B=3$; Si $x=1 \Rightarrow 2=2C \Rightarrow C=1$; Coef.$x: 1=-A+B \Rightarrow A=2$;

Coef.$x^4: 3=A+C+D \Rightarrow D=0$; Si $x=-1: 4=4A-4B+2C-2E \Rightarrow E=-3$.

$$\int \frac{3x^4-2x^3+3x^2+x-3}{x^2(x-1)(x^2+1)}=\int\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x-1}+\frac{-3}{x^2+1}\right)dx=2\int\frac{1}{x}dx+3\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{1}{x-1}dx-3\int\frac{1}{x^2+1}dx=$$

$$=2L|x|-\frac{3}{x}+L|x-1|-3\mathrm{arctg}(x)+C$$