Ejercicios para clase. Tema 7: Matrices y determinantes.

1ª) Un cajero automático contiene 95 billetes de 10, 20 y 50 € y un total de 2000€. Si el número de billetes de 10€ es el doble que el número de billetes de 20€, averigua cuántos billetes hay de cada tipo.

2ª) Tenemos tres lingotes con la siguiente composición:
El primero de 20 g. de oro, 30 g. de plata y 40 g. de cobre.
El segundo de 30 g. de oro, 40 g. de plata y 50 g. de cobre.
El tercero de 40 g. de oro, 50 g. de plata y 90 g. de cobre.
¿Qué cantidad debe tomarse de cada uno de los lingotes anteriores para formar un nuevo lingote de 34 g. de oro, 46 g. de plata y 67 g. de cobre?

3ª) Resuelve los siguientes sistemas mediante el método de Gauss:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=4 \\ x-2y+3z=13 \\ x+3y+4z=11 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2x-y+3z=9 \\ 3x+2y+z=3 \\ 4x+3y-2z=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2x+y-z=0 \\ x-y+2z=5 \\ x+y+z=3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 3x+4y-5z=-20 \\ 2x-5y+z=15 \\ x+3y+3z=4 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=4 \\ 2x-y-z=3 \\ x-y-z=-2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ x-y-z=-1 \\ x-y=-1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x+3y-4z=9 \\ x-y+z=-1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 5x+2y-z=9 \\ 2x-4y+8z=4 \\ x-2y+4z=2 \end{array}\right\}$$

4ª) Resuelve los siguientes sistemas mediante el método de Gauss:

$$\left.\begin{array}{l} x-2y=-3 \\ -2x+3y+z=4 \\ 2x+y-5z=4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 4x-y+z=4 \\ x-y+4z=1 \\ 2x+y-7z=3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -x+2y-3z=-2 \\ -x+8y-27z=0 \\ x-y-z=1 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+3y-z=-5 \\ 2x-y+5z=7 \\ x+10y-8z=9 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2x-y+3z=3 \\ x+z=1 \\ 4x-y+5z=5 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2x-y+z=3 \\ x-2y-z=3 \\ 4x-5y-z=9 \end{array}\right\}$$

5ª) Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -m \\ 0 & -m & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & m-3 & 4 \\ m & -1 & 2 \\ -1 & m & -2m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

6ª) Hallar la matriz inversa de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

7ª) Escribe en forma matricial y resuelve a partir de la inversa los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = -4 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 6 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ -2x + y + 2z = 2 \end{array}\right\}$$

8ª) Resuelve la ecuación matricial $AX - B + C = 0$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

9ª) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Hallar A^{-1}

b) Hallar la matriz X, tal que $A \cdot X \cdot A^t = B$.

10ª) Resuelve la ecuación matricial $AXB = C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 29 & 40 \\ 34 & 47 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

11ª) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, hallar las matrices X que satisfacen $XB + A = B + A^2$.

12ª) Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

13ª) Estudiar la compatibilidad de los siguientes sistemas de ecuaciones según los valores del parámetro, y resolverlo por Cramer para todos los casos en que sea compatible.

$$\left.\begin{array}{r} x-3y+2z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ -3x+ay-3z=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ ax+3y-2z=0 \\ -x-4z=3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+my+z=2 \\ mx+2z=4 \\ x+y+z=2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x-y=3 \\ 2x-3y=2k \\ 3x-5y=k \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+2z=0 \\ 5x-hy-5z=0 \\ 3x-y+z=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 4x+2y=a \\ x+y-z=2 \\ ax+y+z=1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x-y+3z=2 \\ 2x-y+az=6 \\ x+y+2z=2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+2y-z=4 \\ 3x-y+z=9 \\ 4x+y+az=13 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+mz=0 \\ 3x+2y+4mz=0 \\ 2x+y+3z=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+3z=5 \\ -x-kz=k \\ 3x+ky+kz=-k \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x+y-5z=3 \\ x-2y=-6 \\ 4x-3y-az=-9 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} a\cdot x+y+2z=1 \\ 2x-2y=0 \\ a\cdot x+y-z=1 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x-y+z=k \\ kx+2y-z=3k \\ 2x+ky-2z=6 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+2y-z=8 \\ 2x-3y+z=-1 \\ 3x-y+kz=5 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+mz=0 \\ 3x+2y+4mz=0 \\ 2x+y+3z=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=k \\ x+(1+k)y+z=2k \\ x+y+(1+k)z=0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x-y+z=6 \\ -x-y+(a-4)z=7 \\ x+y+2z=11 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ my+z=0 \\ x+(1+m)y+mz=m+1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} ax+y+z=a^2 \\ x-y+z=1 \\ 3x-y-z=1 \\ 6x-y+z=3a \end{array}\right\}$$

Ejercicios para examen. Tema 7: Matrices y determinantes.

1ª) Resuelve los siguientes sistemas mediante el método de Gauss:

$$\left.\begin{array}{r} 5x-y+3z=-6 \\ x+3y-z=10 \\ 2x-y+4z=-2 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 2x+y-z=6 \\ x-y+2z=-1 \\ -x+3y=1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x-y+z+t=0 \\ x+y+z-t=2 \\ x-y-z+t=2 \end{array}\right\}$$

2ª) Discute utilizando el método de Gauss los siguientes sistemas en función del parámetro, y resuélvelos cuando sea posible:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-5y+(a+5)z=0 \\ 3x+3y-z=0 \\ 3x+4y+6z=0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 2x-y-17z=0 \\ x+2y+mz=5 \\ x-5z=1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x-5y-z=-4 \\ x-y+z=6 \\ 3x-5y+az=31 \end{array}\right\}$$

3ª) Escribe en forma matricial y resuelve a partir de la inversa el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ x-y-z=-1 \\ x-y=-1 \end{array}\right\}$$

4ª) Resolver la ecuación matricial $XA-B=C$

Siendo $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

5ª) Comprueba que: a) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0.$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 11 & 2 \\ 1 & 4 & 6 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0.$

6ª) Resuelve la ecuación: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & a & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$

7ª) Resuelve la ecuación matricial: $2A = AX + B$, siendo:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

8ª) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&3&0\\5&1&3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\0&3\end{pmatrix}$.

c) Comprobar que $A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}9&1&-3\\-3&1&1\\-14&-2&6\end{pmatrix}$.

d) Halla una matriz, X, tal que $AX = B$.

9ª) Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\-1&1&3\\3&1&4\\4&2&1\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}2&-1&3&0\\1&2&-1&2\\1&-8&9&-6\\5&-10&15&-6\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}-3&0&1&1\\-1&1&-1&1\\1&2&-3&1\\-2&-1&2&0\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&a&-3&0\\4&1&a&0\end{pmatrix} \quad E=\begin{pmatrix}4&3&1\\0&1&t\\0&2t&1\end{pmatrix} \quad F=\begin{pmatrix}t&0&t&0\\4&-6&8&-2\\-2&3&-4&1\end{pmatrix}$$

10ª) Estudiar la compatibilidad de los siguientes sistemas de ecuaciones según los valores del parámetro, y resolverlo por Cramer para todos los casos en que sea compatible.

$$\left.\begin{array}{l}x+y+z=3\\4x-2y+az=0\\2x-y-z=0\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}x+y=1\\-ay-z=0\\x+(a+1)y+az=a+1\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}3x+My+z=M-2\\x+y+2z=0\\Mx+y-z=M-2\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}-4x+ay+z=a-2\\x+y+2z=0\\ax+z=a\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}x-y=\lambda\\x+\lambda z=2\lambda+1\\x-y+(\lambda^2-\lambda)z=2\lambda\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}2x-y=a\\ax+3y=4\\3x-y=2\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}kx+y+z=1\\x+ky+z=1\\x+y+kz=k+2\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}2y+mz=m\\(m-2)x+y+3z=0\\(m-1)y=1-m\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}2x-y-z=0\\-2x+ay+z=0\\x-y-z=a\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}ax+y=a\\(a+1)x+2y+z=a+3\\2y+z=2\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}-x+y+at=2\\-y+az+t=1\\x-2y+az+t=3\\-y+at=0\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}kx+y+z=2\\x+ky=1\\x+ky+kz=1\end{array}\right\}$$