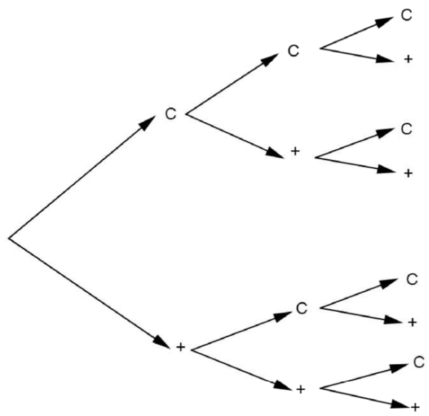
Tema 10: Probabilidad.

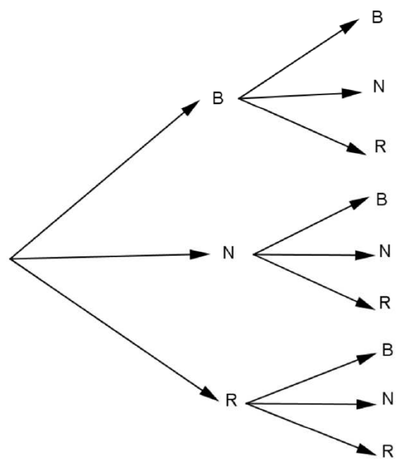
10.1 Introducción. Definiciones.

- **Experimento aleatorio**: es aquel experimento que se caracteriza porque, al repetirse bajo análogas condiciones, no se puede predecir el resultado que se va a obtener. En caso contrario, se llama experimento determinista. Ejemplos:
  - Lanzar un dado.
  - Lanzar tres monedas.
  - Sacar dos bolas con reemplazamiento de una urna que tiene 6 bolas blancas, 5 negras y 1 roja.
  - Sacar dos bolas sin reemplazamiento de una urna que tiene 6 bolas blancas, 5 negras y 1 roja.
- **Espacio muestral E**: (de un experimento aleatorio) es el conjunto de todos los resultados posibles del experimento. En los ejemplos anteriores es:
  - Lanzar un dado. $E = \{1,2,3,4,5,6\}$
  - Lanzar tres monedas.



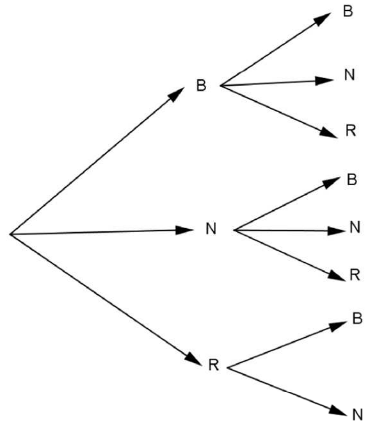
$E = \{CCC, CC+, C+C, C++, +CC, +C+, ++C, +++\}$

  - Sacar dos bolas con reemplazamiento de una urna que tiene 6 bolas blancas, 5 negras y 1 roja. $E = \{BB, BN, BR, NB, NN, NR, RB, RN, RR\}$



  - Sacar dos bolas sin reemplazamiento de una urna que tiene 6 bolas blancas, 5 negras y 1 roja. Ahora, si la 1ª es roja, la 2ª no puede ser roja.

$$E = \{BB, BN, BR, NB, NN, NR, RB, RN\}$$



- Un **suceso** de un experimento aleatorio: es un subconjunto del espacio muestral. Puede ser:
  - Suceso elemental (cada uno de los resultados del experimento aleatorio).
  - Suceso compuesto (de varios sucesos elementales), o simplemente suceso.

  Por ejemplo al lanzar un dado podríamos considerar el suceso salir impar: $A = \{1,3,5\}$. Al lanzar tres monedas podríamos considerar el suceso salir exactamente dos caras: $A = \{CC+, C+C, +CC\}$. Al extraer dos bolas con reemplazamiento de una urna podríamos considerar el suceso las dos bolas son iguales: $A = \{BB, NN, RR\}$.
  - Suceso seguro E.
  - Suceso imposible $\emptyset$.
  - Suceso contrario o complementario. Dado un suceso A, el suceso contrario $\overline{A}$ (o también: A^c) está formado por los sucesos elementales que no forman parte de A. Claramente: $A \cup \overline{A} = E$ y $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

10.2 Operaciones con sucesos.

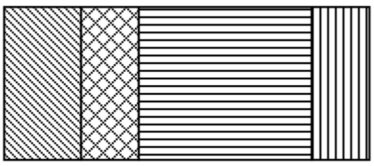
- Unión de sucesos: la unión de dos sucesos A y B es el suceso que se realiza cuando ocurre A o B (alguno de ellos o ambos).
- Intersección de sucesos: la intersección de A y B es el suceso que ocurre cuando tienen lugar simultáneamente los sucesos A y B. Si la intersección es vacía: $A \cap \overline{A} = \emptyset$, se dice que los sucesos son incompatibles; en caso contrario, se dice que son compatibles.
- Diferencia de sucesos: $A \setminus B$ es el suceso compuesto por los sucesos elementales que pertenecen a A, pero no pertenecen a B.
- Dado un suceso A, el contrario o complementario $\overline{A}$ está formado por los sucesos elementales que no pertenecen al suceso A. Claramente, $\overline{A} = E \setminus A$.

Propiedades de las operaciones con sucesos:

	Unión	Intersección
Asociativa	$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$
Conmutativa	$A\cup B = B\cup A$	$A\cap B = B\cap A$
Idempotente	$A\cup A = A$	$A\cap A = A$
Simplificativa	$A\cup(A\cap B) = A$	$A\cap(A\cup B) = A$
Distributiva	$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$	
Suceso contrario	$A\cup\overline{A} = E$	$A\cap\overline{A} = \emptyset$
Leyes de Morgan	$\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$	$\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$

- Sistema completo de sucesos o partición: se dice que un conjunto de sucesos A1, A2,.......etc., constituyen un sistema completo o partición, si se verifica:
  - $A1\cup A2\cup .... = E$
  - A1, A2,...., son incompatibles entre sí dos a dos.

A1 A2 .... An



10.3 Probabilidad de LAPLACE.

- Ley de los grandes números: a medida que el número de pruebas del experimento crece indefinidamente, la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en torno a un número. Este número lo llamaremos probabilidad de un suceso. Por ejemplo al lanzar un dado y considerar el suceso salir impar, las frecuencia relativa del "éxito" al lanzar el dado indefinidamente, tiende a acercarse cada vez más al número 0,5 (es decir 50%).

- Definición clásica de probabilidad: (regla de Laplace)

$$\boxed{P(A) = \frac{n^{o}\text{ de casos favorables}}{n^{o}\text{ de casos posibles}}}$$

(Para aplicar esta definición los sucesos elementales deben ser equiprobables)
  - Por ejemplo, al lanzar un dado y considerar el suceso salir impar:

$$A = \{1,3,5\},\ P(A) = \frac{3}{6} = 0{,}5 .$$

- Al lanzar tres monedas y considerar el suceso salir exactamente dos caras: $A = \{CC+, C+C, +CC\}$ $P(A) = \frac{3}{8} = 0{,}375$.
- Al extraer dos bolas con reemplazamiento de una urna (6B, 5N y 1R) y considerar el suceso las dos bolas son iguales: $A = \{BB, NN, RR\}$, la probabilidad no puede calcularse por la fórmula de Laplace porque los sucesos elementales no son equiprobables ya que no hay el mismo número de bolas de cada color. No es entonces $P(A) = \frac{3}{9}$, sino que será: $P(A) = \frac{6}{12}\cdot\frac{6}{12} + \frac{5}{12}\cdot\frac{5}{12} + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12} = \frac{62}{144} = 0{,}4305$. Lo veremos después.

- A continuación, estudiaremos las propiedades de la probabilidad de Laplace según la definición axiomática de probabilidad (Kolmogorov), en la que se llama probabilidad a una ley que asocia a cada suceso A un número real que cumple los siguientes axiomas:
  - La probabilidad de un suceso cualquiera del espacio de sucesos siempre es positiva, es decir: $P(A) \geq 0$.
  - La probabilidad del suceso seguro es 1, es decir, $P(E) = 1$.
  - La probabilidad de la unión de sucesos incompatibles es igual a la suma de probabilidades de cada uno de ellos, o sea: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

  En particular la probabilidad de Laplace cumple los axiomas anteriores y además cumple las siguientes propiedades o consecuencias de los axiomas:
  - $P(\varnothing) = 0$, $P(E) = 1$ y $0 \leq P(A) \leq 1$.
  - $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
  - Si $A \subset B$ $P(A) \leq P(B)$
  - Si los sucesos son incompatibles ($A \cap B = \varnothing$): $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
  - Si los sucesos son compatibles: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

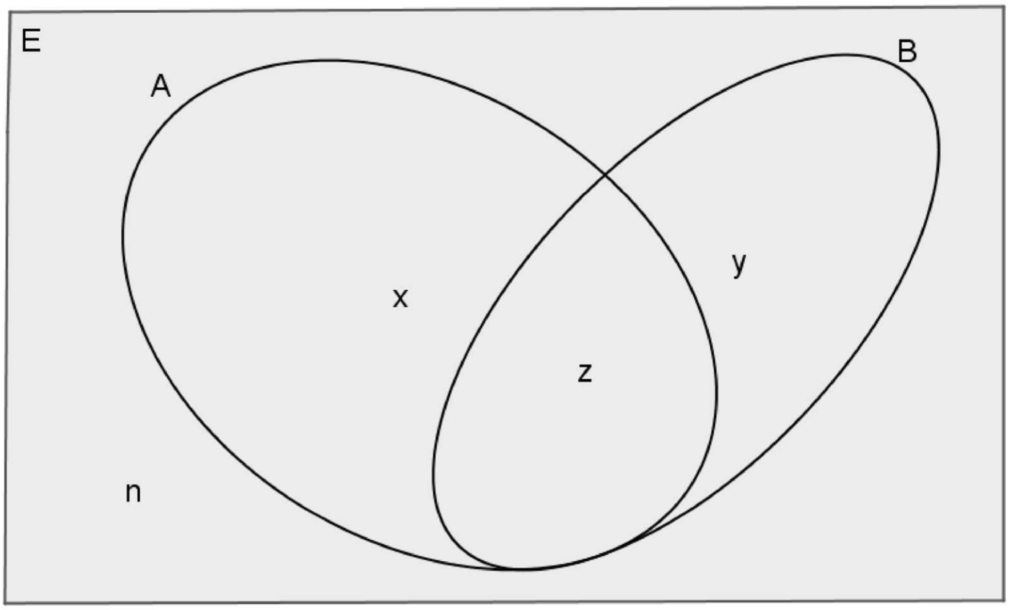
10.4 Probabilidad condicionada.

- Supongamos el experimento de sacar una carta de la baraja española y el suceso A="obtener un rey". Claramente, $P(A) = \frac{4}{40} = 0{,}10$ (10%).

  Imaginemos ahora que, antes de ver la carta, nos dan una pista:
  - La carta es un oro. Es decir, ahora calculamos la probabilidad de obtener un rey condicionado al suceso B ="obtener oros". La probabilidad es $P\left(A/B\right) = \frac{1}{10} = 0{,}10$ (10%). En este caso, la información no cambia la probabilidad, ya que solo hay un rey entre los 10 oros.
  - La carta es una figura. Es decir, ahora calculamos la probabilidad de obtener un rey condicionado al suceso C ="obtener figura". Ahora la probabilidad es $P\left(A/C\right) = \frac{4}{12} = 0{,}3333$ (33,33%). Ahora la pista sí sirve, la información sí ha mejorado considerablemente la probabilidad.

  En el primer caso, cuando la probabilidad no cambia, se dice que los sucesos son independientes y, en el segundo caso, decimos que son dependientes.

- Al condicionar un suceso a otro, se da por sabido o por realizado el suceso sobre el que se condiciona. Este hecho en realidad supone cambiar el marco de actuación o espacio muestral de referencia.
  Supongamos un espacio muestral E en el que hay n sucesos elementales. Sea A un suceso con "x" elementos, B otro suceso con "y" elementos y supongamos que el suceso $A \cap B$ tiene "z" elementos.



$$\boxed{P\left(A/B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Explicación o justificación de la fórmula: ahora el nuevo espacio muestral es el suceso B que tiene "y" sucesos elementales en total (casos posibles) y el nuevo suceso es $A \cap B$ que tiene "z" sucesos elementales (casos favorables).

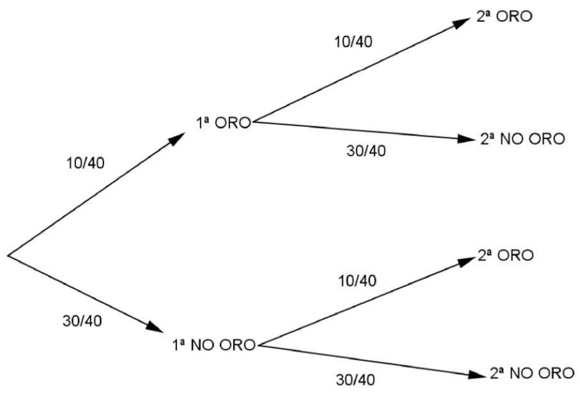
$$P(A \cap B) = \frac{z}{n} \qquad P(B) = \frac{y}{n} \qquad P\left(A/B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{z/n}{y/n} = \frac{z}{y}$$

- Sucesos dependientes e independientes:
  - Dos sucesos A y B son dependientes si: $P(A) \neq P\left(A/B\right)$. Entonces: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P\left(A/B\right) = P(B) \cdot P\left(B/A\right)$
  - Dos sucesos A y B son independientes si: $P(A) = P\left(A/B\right)$. Tendremos entonces: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Si al extraer dos cartas de una baraja lo hacemos con devolución, tendremos sucesos independientes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, pero si lo hacemos sin devolución, serán dependientes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P\left(A/B\right)$.

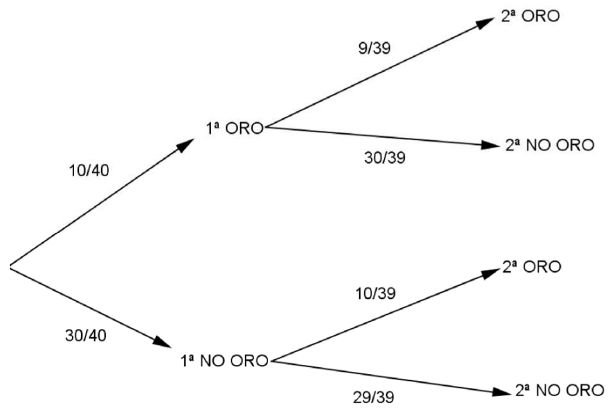
Ejemplo: hallar la probabilidad de que al extraer dos cartas de la baraja española obtengamos dos oros.

a) Con devolución o reemplazamiento.



Como son independientes, la probabilidad de la intersección es el producto de las probabilidades.
$P(1^a ORO \cap 2^a ORO) = 10/40 . 10/40 = 1/16 = 0,0625$ (6,25%)

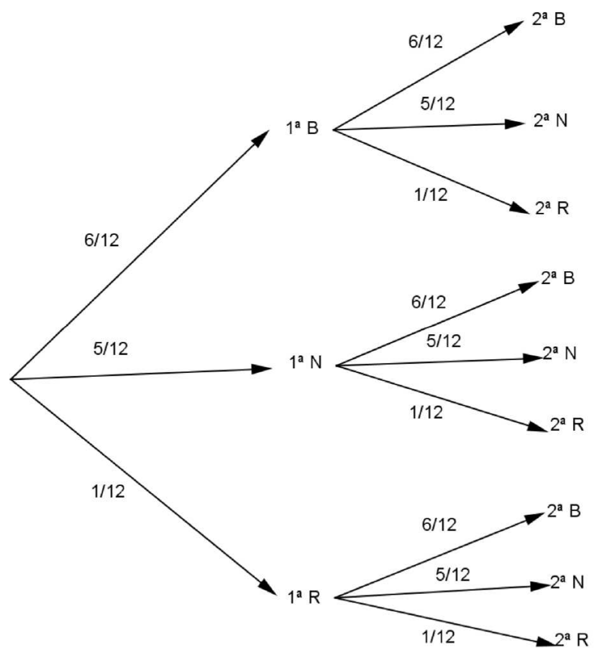
b) Sin devolución o reemplazamiento:



Al ser dependientes:
$P(1^a ORO \cap 2^a ORO) = P(1^a ORO) . P\left(2^a ORO / 1^a ORO\right) =$
$= 10/40 . 9/39 = 90/1560 = 0,05769$ (5,77%)

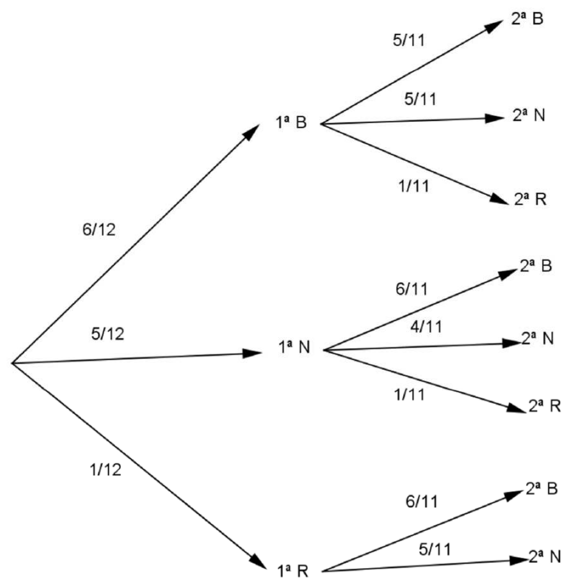
Otro ejemplo: Sacar dos bolas de una urna que tiene 6 bolas blancas, 5 negras y 1 roja. Hallar la probabilidad de extraer dos bolas blancas.

a) Con devolución o reemplazamiento.



Al ser independientes, la probabilidad de la intersección es el producto de las probabilidades. $P(1^a B \cap 2^a B) = 6/12 . 6/12 = 1/4 = 0,25$ (25%).

b) Sin devolución o reemplazamiento.



Ahora son dependientes:

$P(1^a B \cap 2^a B) = P(1^a B) \cdot P(2^a B / 1^a B) = 6/12 \cdot 5/11 = 0{,}22727$ (22,73%).

- Tablas de contingencia. Es la forma más habitual de razonar probabilidades sobre muchos problemas, especialmente cuando se trabaja con datos reales. Consiste en organizar la información en una tabla resumen y calcular las probabilidades de la siguiente forma:
    - Las probabilidades totales se obtienen mirando la última fila o la última columna.
    - Las probabilidades de intersecciones se obtienen a partir de la casilla de intersección de la fila y la columna, y el total.
    - Las probabilidades condicionadas se calculan centrándonos en una fila o columna y dividiendo el valor de la casilla de intersección entre el total de la fila o columna.

Ejemplo: de los 30 asistentes a una fiesta, se sabe que 10 son rubios y 20 morenos. El 90% de los rubios tienen los ojos azules, así como el 40% de los morenos. Si elegimos una persona al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Tenga los ojos azules.
b) Sea morena.
c) Sea rubio de ojos azules.
d) Sea morena, si tiene los ojos azules.
e) Tenga los ojos azules si es morena.
f) Sea rubia sabiendo que no tiene ojos azules.

	Ojos azules (Az)	Ojos no azules $(\overline{Az})$	
Rubios (R)	9	1	10
Morenos (M)	8	12	20
Total	17	13	30

$P(Az) = 17/30$ $\quad P(M) = 20/30$ $\quad P(R \cap Az) = 9/30$

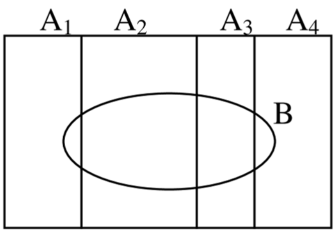
$P(M/Az) = 8/17$ $\quad P(Az/M) = 8/20$ $\quad P(R/\overline{Az}) = 1/13$

10.5 Teorema de la probabilidad total.

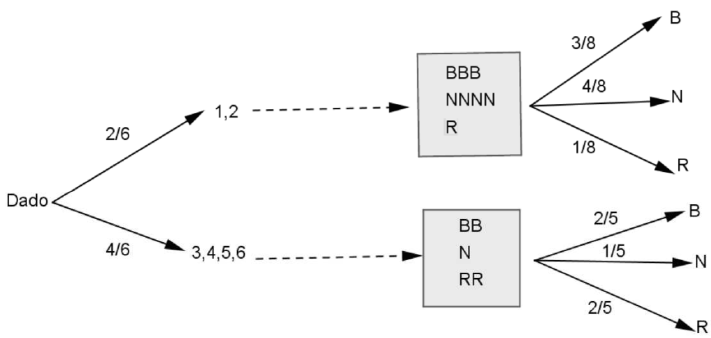
- Consideremos un sistema completo de sucesos o partición $A_1, A_2, \ldots$ y sea B un suceso, tal que las probabilidades $P\left(B/A_i\right)$ son conocidas, entonces:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots\ldots\ldots = \sum P(B \cap A_i) = \sum P(A_i) \cdot P\left(B/A_i\right)$$

$$\boxed{P(B) = \sum P(A_i) \cdot P\left(B/A_i\right)}$$



Ejemplo: lanzamos un dado. Si sale menor que 3, sacamos una bola de una urna que contiene 3 bolas blancas, 4 negras y 1 roja. Por el contrario, si en el dado sale 3 o más, sacaremos la bola de otra urna con 2 blancas, 1 negra y 2 rojas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una bola negra?



Las probabilidades situadas a la derecha de las urnas, son probabilidades condicionadas, por ejemplo: $P\left(B/1,2\right) = 3/8$ y $P\left(N/3,4,5,6\right) = 1/5$.

$P(1,2 \cap B) = 2/6 \cdot 3/8 = 6/48$
$P(1,2 \cap N) = 2/6 \cdot 4/8 = 8/48$
$P(1,2 \cap R) = 2/6 \cdot 1/8 = 2/48$

$P(3,4,5,6 \cap B) = 4/6 \cdot 2/5 = 8/30$
$P(3,4,5,6 \cap N) = 4/6 \cdot 1/5 = 4/30$
$P(3,4,5,6 \cap R) = 4/6 \cdot 2/5 = 8/30$

Para calcular la probabilidad pedida, aplicamos el teorema de Prob, Total:

$$P(N) = P(1,2 \cap N) + P(3,4,5,6 \cap N) = P(1,2) \cdot P\left(N/1,2\right) + P(3,4,5,6) \cdot P\left(N/3,4,5,6\right)$$

$$P(N) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{8} + \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{48} + \frac{4}{30} = \frac{1}{6} + \frac{2}{15} = \frac{5}{30} + \frac{4}{30} = \frac{9}{30} = 0{,}3$$. Es decir, el 30%.

10.6 Teorema de BAYES

- Consideremos un sistema completo de sucesos o partición $A_1, A_2, \ldots$ y sea B un suceso, de forma que las probabilidades $P\left(B/A_i\right)$ se conocen, entonces:

$$\boxed{P\left(A_i/B\right)=\frac{P(A_i)\cdot P\left(B/A_i\right)}{\sum P(A_i)\cdot P\left(B/A_i\right)}}$$

"El Tª de Bayes permite razonar hacia atrás"

Ejemplo: En el mismo experimento del ejemplo anterior, sabiendo que la bola obtenida ha sido negra, calcular la probabilidad de que haya salido de la primera urna (número menor que 3 en el dado).

$$P\left(1,2/N\right)=\frac{P(1,2\cap N)}{P(N)}=\frac{2/6\cdot 4/8}{3/10}=\frac{8/48}{3/10}=\frac{80}{144}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}.$$

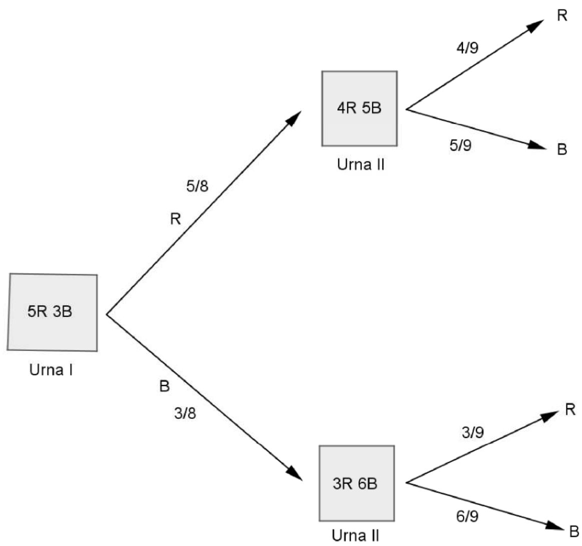
¿Cuál es la probabilidad de haya salido de la segunda urna (en el dado un número mayor o igual que 3)? (Debe obtenerse el resto, o sea $\frac{4}{9}$).

$$P\left(3,4,5,6/N\right)=\frac{P(3,4,5,6\cap N)}{P(N)}=\frac{4/6\cdot 2/5}{3/10}=\frac{4/30}{3/10}=\frac{40}{90}=\frac{4}{9}.$$

En ambos casos se ha utilizado en el denominador el teorema de la probabilidad total que ya estaba calculada desde el ejemplo anterior.

Ejemplo: La urna I contiene 5 bolas rojas y 3 blancas. La urna II tiene 3 bolas rojas y 5 blancas. Se extrae una bola de la urna I y se introduce en la urna II. Y, finalmente, se extrae una bola de la urna II. Halla la probabilidad de que:

a) La segunda bola sea roja.
b) La primera sea roja si la segunda lo es.



a) $P(2^a R)=P(1^a R\cap 2^a R)+P(1^a B\cap 2^a R)=P(1^a R)\cdot P\left(2^a R/1^a R\right)+$
$+P(1^a B)\cdot P\left(2^a R/1^a B\right)=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{9}+\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{9}=\frac{20+9}{72}=0{,}4028$. Es decir, el 40,28%.

b) $P\left(1^a R/2^a R\right)=\frac{P(1^a R\cap 2^a R)}{P(2^a R)}=\frac{5/8\cdot 4/9}{29/72}=\frac{20/72}{29/72}=\frac{20}{29}=$ 0,6896. En porcentaje, el 68,96%.