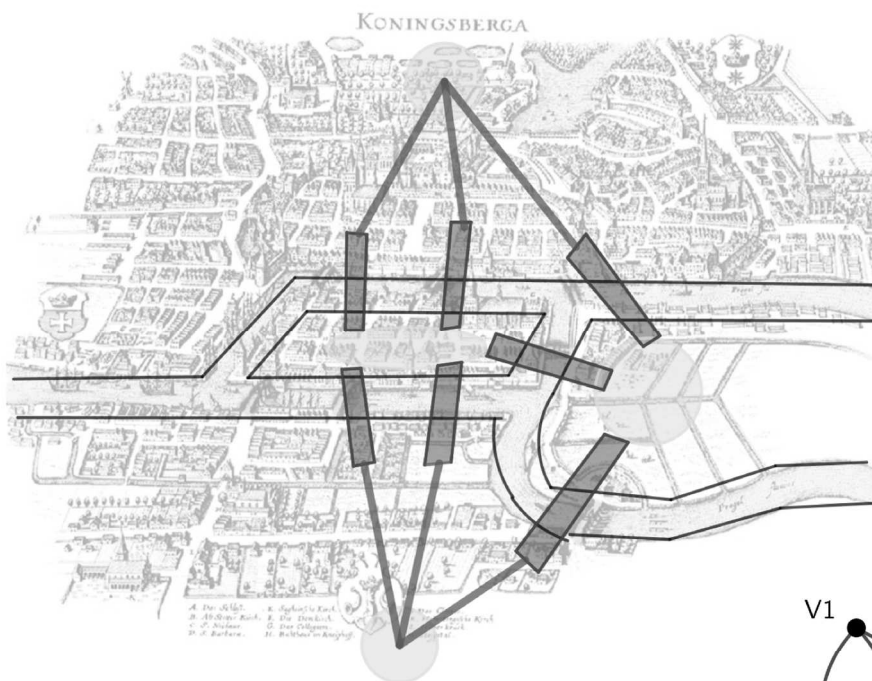


Tema 5: Grafos.

5.1 Introducción histórica.

- La ciudad de Königsberg, en la antigua Prusia (actual Kaliningrado), tenía en el año 1.736 siete puentes que conectaban las cuatro zonas en las que el río Pregel dividía la ciudad, entre ellas la céntrica isla de Kneiphof. Se planteaba entonces un problema famoso: *¿es posible recorrer los siete puentes pasando una única vez por cada uno de ellos?*

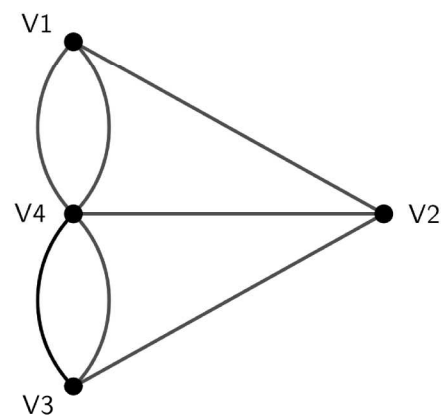


- El matemático Leonard Euler resolvió elegantemente el problema creando un esquema abstracto llamado grafo. En este caso, el grafo tiene 4 vértices (las zonas de la ciudad) y 7 aristas o lados (los puentes).

- Euler razonó sobre el grafo que los vértices que fuesen “de paso” tendrían un número par de aristas. Por tanto, para pasar por todos los puentes una única vez existen dos posibilidades:
 - Que el inicio y final coincidan: entonces todos los vértices tendrían un número par de aristas, bien por ser “de paso” o bien por ser inicio y final.
 - Que el inicio y final sean diferentes: En ese caso, la mayoría de los vértices tendrán un número par de aristas (por ser “de paso”) y habrá exactamente dos vértices con número impar de aristas, de inicio y final del recorrido.

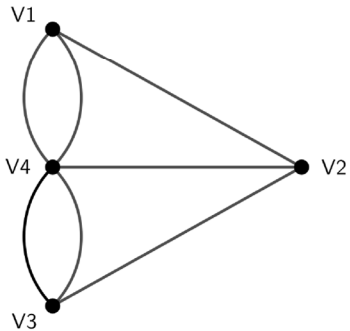
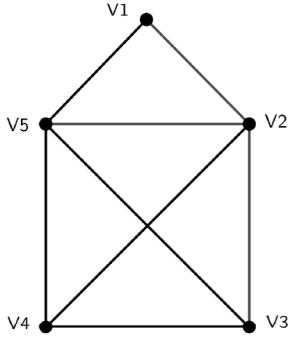
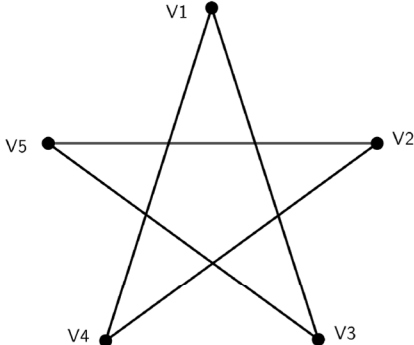
Por tanto, es necesario que todos los vértices tengan un número par de aristas, o bien que sólo haya dos vértices con un número impar de aristas, que serían el inicio y el final del recorrido.

De esta brillante forma, Euler demostró que el problema no tiene solución, ya que hay demasiados vértices con número impar de aristas: 3, 3, 5 y 3, y deberíamos tener 0 o 2 vértices con número impar de aristas.



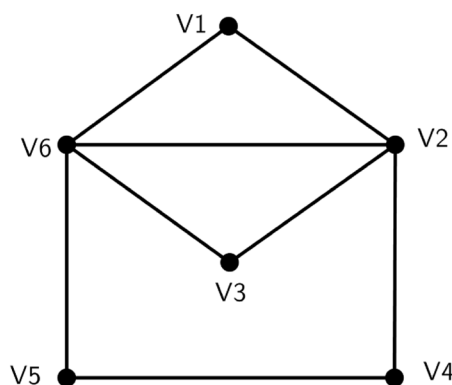
5.2 Concepto de Grafo y matriz de adyacencia.

- Un grafo es un esquema en el que la información se ha simplificado al máximo en un conjunto de vértices conectados por aristas.
 - El grafo es orientado si alguna arista sólo tiene un sentido; en estos casos, se indica el sentido mediante una flecha.
 - El grafo es conexo si cada 2 vértices están conectados por algún camino.
 - El grafo es simple si hay sólo una arista que une dos vértices cualesquiera. En este tema se estudiarán grafos no orientados, conexos, simples y sin lazos (o bucles de un vértice consigo mismo).
- Se llama matriz de adyacencia de un grafo a la matriz cuadrada con elementos 1 y 0 según los vértices estén conectados por una arista o no. En algunas ocasiones, además de 1 o 0, puede haber otros números en matrices de adyacencia asociadas a grafos que no son simples, o bien matrices asociadas a grafos ponderados, que tienen pesos en las aristas (dinero, km, tiempos, etc.).

GRAFO	TIPO	MATRIZ
	No orientado. Conexo. No simple.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
	No orientado. Conexo. Simple.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
	No orientado. Conexo. Simple.	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

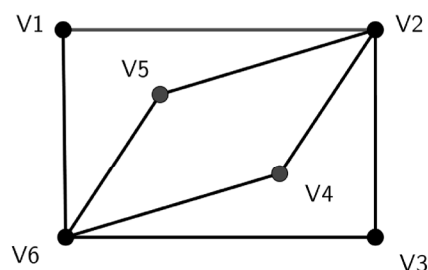
5.3 Grafos de Euler.

- Imaginemos que estamos haciendo turismo en una zona paisajista y lo interesante son los caminos y no los pueblos. Con lo cual, queremos recorrer todos los caminos una única vez. **Un ciclo o circuito de Euler** es un recorrido que pasa por todas las aristas una única vez y en el que, además, el inicio y el final coinciden en el mismo vértice. Para que haya un ciclo euleriano, todos los vértices deben tener un número par de aristas. Si un grafo tiene un ciclo de Euler, se dice que es un **grafo euleriano**. Ejemplos de grafos eulerianos:



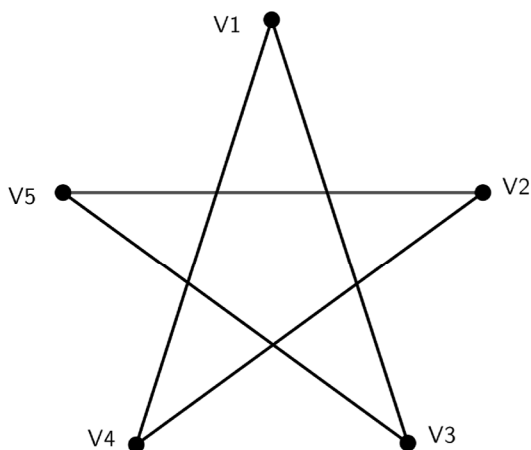
Un ciclo euleriano es:

**V1 - V6 - V5 - V4 - V2
V6 - V3 - V2 - V1**



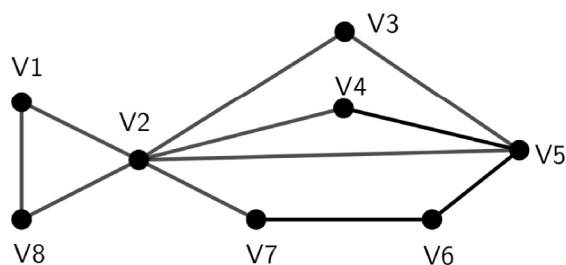
Un ciclo euleriano es:

**V1 - V6 - V5 - V2 - V4
V6 - V3 - V2 - V1**



Un ciclo euleriano es:

**V1 - V4 - V2 - V5 - V3
V1**

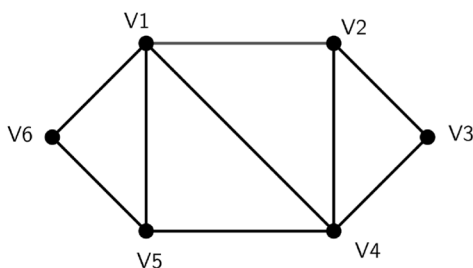


Un ciclo euleriano es:

**V1 - V2 - V7 - V6 - V5
V4 - V2 - V5 - V3 - V2
V8 - V1**

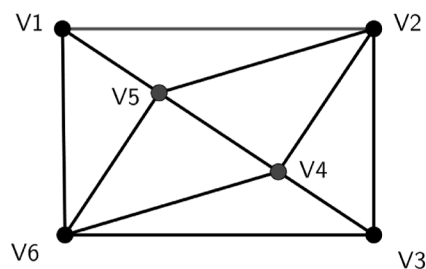
5.4 Caminos de Euler.

- **Un camino euleriano** es un recorrido que pasa por todas las aristas una única vez. Existirá un camino euleriano siempre que todos los vértices tengan un número par de aristas (circuito euleriano ya visto), o bien en el caso en que haya exactamente dos vértices con un número impar de aristas. En este caso, uno será el inicio y el otro el final. Ejemplos de caminos eulerianos (sin tener ciclo):



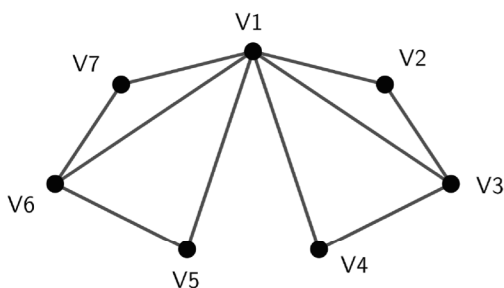
V2 y V5 deben ser el inicio y el final.
Un camino euleriano es:

V2 - V4 - V1 - V5 - V6
V1 - V2 - V3 - V4 - V5



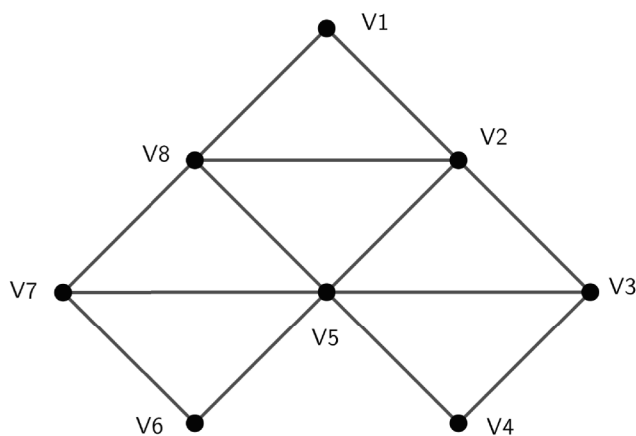
V1 y V3 deben ser el inicio y el final.
Un camino euleriano es:

V1 - V5 - V2 - V1 - V6
V5 - V4 - V2 - V3 - V6
V4 - V3



V3 y V6 deben ser el inicio y el final. Un camino euleriano es:

V3 - V1 - V4 - V3 - V2
V1 - V6 - V7 - V1 - V5
V6



V3 y V7 deben ser el inicio y el final. Un camino euleriano es:

V3 - V5 - V8 - V2 - V5
V7 - V8 - V1 - V2 - V3
V4 - V5 - V6 - V7

5.5 Grafos de Hamilton.

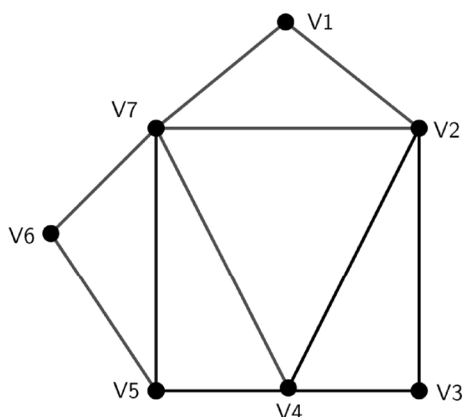
- Imaginemos ahora que estamos haciendo turismo en una zona con varios pueblos de gran riqueza cultural. En esta situación, lo interesante ya no son los caminos, sino los pueblos. Por lo tanto, queremos visitar todos los pueblos sin repetir ninguno. **Un ciclo o circuito de Hamilton** es un recorrido que pasa por todos los vértices una única vez y en el que, además, el inicio y el final coinciden en el mismo vértice. Si un grafo tiene un ciclo de Hamilton se dice que es un **grafo hamiltoniano**.
- No existe un criterio exacto para saber si un grafo es o no hamiltoniano, pero a grandes rasgos podemos decir que depende del número de aristas. Para concretar un poco más, tenemos varios teoremas que dan condiciones suficientes relacionadas con el número de aristas y con el número de vértices.

Supongamos un grafo sin bucles, conexo, simple y no dirigido, con un número de vértices n ($n \geq 3$):

- Teorema de Dirac: si el número de aristas que confluyen en cada vértice es mayor o igual que $\frac{n}{2}$, entonces el grafo es hamiltoniano.
- Teorema de Ore: si la suma de aristas que confluyen en cualquier pareja de vértices no adyacentes es mayor o igual que n , entonces el grafo es hamiltoniano.
- Si el número total de aristas es mayor o igual que $\frac{(n-1)(n-2)+4}{2}$, entonces el grafo es hamiltoniano.

No obstante, es posible encontrar grafos que sean hamiltonianos y que no cumplan las hipótesis de estos teoremas. Dicho de otra forma, si no se cumplen las hipótesis de los teoremas anteriores, no podremos afirmar ni negar que el grafo sea hamiltoniano.

En el siguiente ejemplo tenemos un grafo que es hamiltoniano (V1 - V2 - V3 - V4 - V5 - V6 - V7 - V1), pero no cumple las hipótesis de los teoremas:

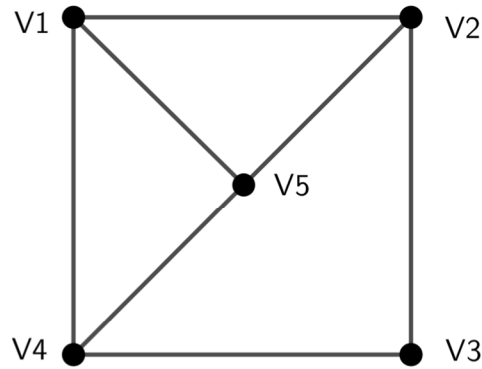


No se puede aplicar el teorema de Dirac porque hay vértices con solo 2 aristas, mientras que la mitad del número de vértices sería 4 o más.

Tampoco se puede aplicar el teorema de Ore porque hay vértices no adyacentes (V_1 y V_3) que suman 4 aristas, lo cual es menor que el número total de vértices, que es 7.

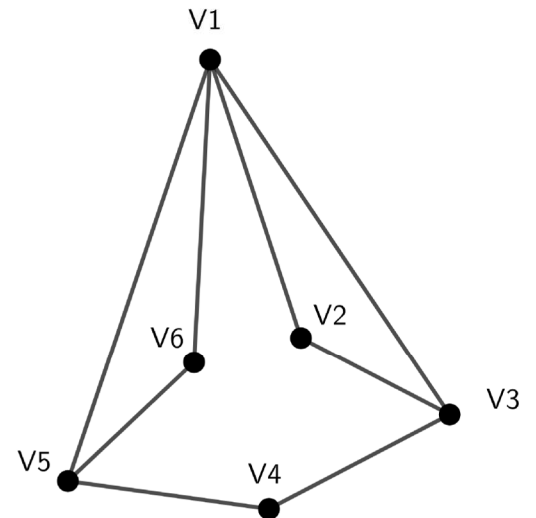
Finalmente, hay un total de 11 aristas, lo que es menor que 17 (la mitad de $6 \cdot 5 + 4 = 34$).

- Ejemplos de grafos hamiltonianos:



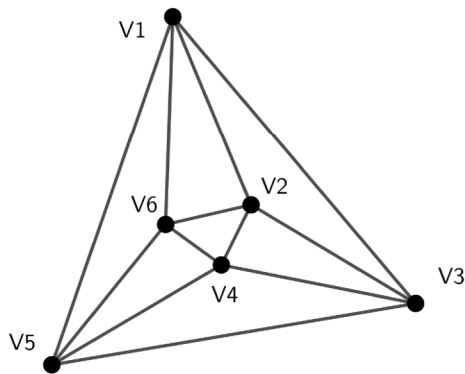
Un ciclo hamiltoniano es:

**V1 - V5 - V2 - V3 - V4
V1**



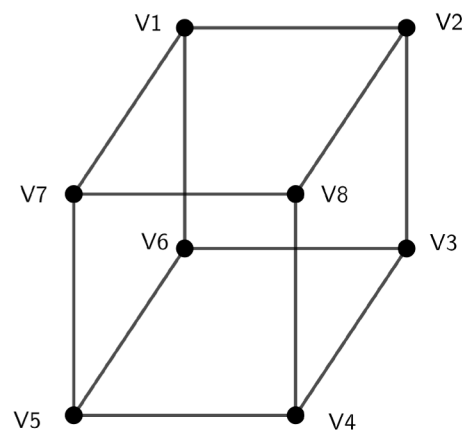
Un ciclo hamiltoniano es:

**V1 - V2 - V3 - V4 - V5
V6 - V1**



Un ciclo hamiltoniano es:

**V1 - V3 - V4 - V2 - V6
V5 - V1**

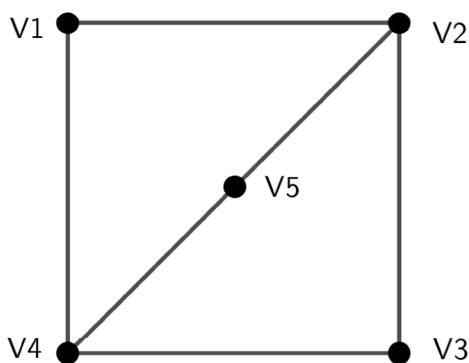


Un ciclo hamiltoniano es:

**V1 - V2 - V8 - V7 - V5
V4 - V3 - V6 - V1**

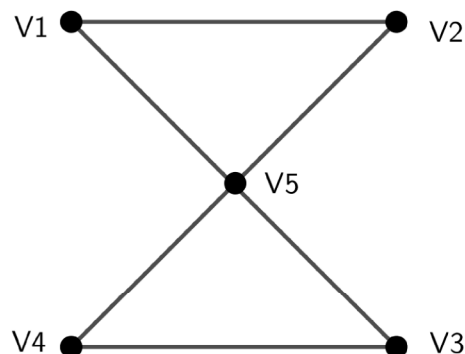
5.6 Caminos de Hamilton.

- **Un camino hamiltoniano** es un recorrido que pasa por todos los vértices una única vez. La diferencia con un ciclo de Hamilton es que ahora podemos empezar y terminar en vértices diferentes; no obstante, todo ciclo de Hamilton es a su vez un camino de Hamilton.
- Al igual que con los ciclos hamiltonianos, aquí también tenemos algunos teoremas con condiciones suficientes que garantizan la existencia de caminos de Hamilton en algunas circunstancias. Supongamos un grafo sin bucles, conexo, simple y no dirigido, con un número de vértices n ($n \geq 3$):
 - Teorema de Dirac (para caminos): si el número de aristas que confluyen en cada vértice es mayor o igual que $\frac{n-1}{2}$, entonces hay algún camino hamiltoniano.
 - Teorema de Ore (para caminos): si la suma de aristas que confluyen en cualquier pareja de vértices no adyacentes es mayor o igual que $n-1$, entonces existe algún camino hamiltoniano.
- Ejemplos de caminos hamiltonianos (sin tener ciclo):



Un camino hamiltoniano es:

V1 - V2 - V5 - V4 - V3



Un camino hamiltoniano es:

V1 - V2 - V5 - V4 - V3

5.7 Relación y clasificación de grafos de Euler y Hamilton.

- Los grafos de Euler y de Hamilton no guardan ninguna relación entre sí. Esencialmente, se puede afirmar que recorrer todas las aristas (sin repetir) y recorrer todos los vértices (sin repetir) son problemas diferentes. No es lo mismo visitar todos los pueblos que recorrer todos los caminos que unen dichos pueblos. Veamos un ejemplo de cada uno de los 9 casos posibles:

- Caso 1: ciclo de Euler y ciclo de Hamilton.

- Ciclo de Euler:

V1 - V6 - V5 - V4 - V2

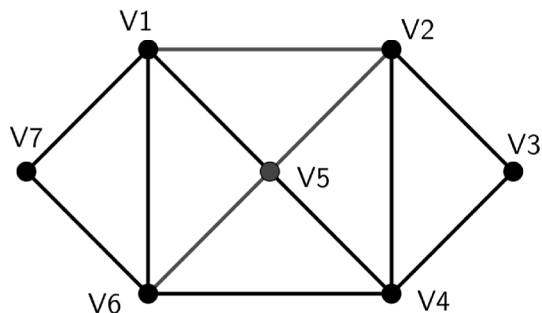
V1 - V7 - V6 - V4 - V3

V2 - V5 - V1

- Ciclo de Hamilton:

V1 - V7 - V6 - V5 - V4

V3 - V2 - V1



- Caso 2: ciclo de Euler y camino (sin ciclo) de Hamilton.

- Ciclo de Euler:

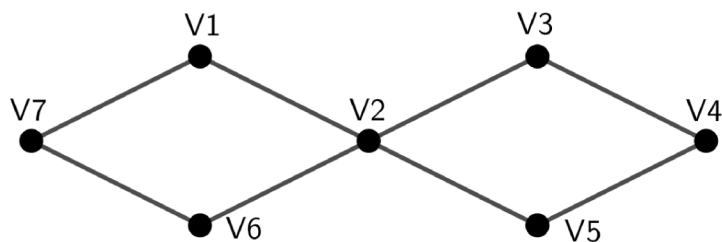
V1 - V2 - V5 - V4 - V3

V2 - V6 - V7 - V1

- Camino de Hamilton:

V1 - V7 - V6 - V2 - V3

V4 - V5



- Caso 3: ciclo de Euler y sin camino de Hamilton.

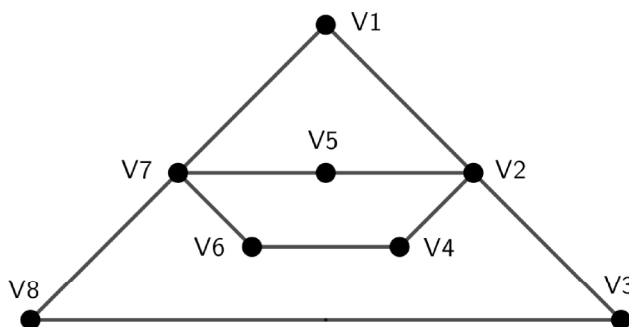
- Ciclo de Euler:

V1 - V7 - V8 - V3 - V2

V5 - V7 - V6 - V4 - V2

V1

- No hay camino de Hamilton.



- Caso 4: camino (sin ciclo) de Euler y ciclo de Hamilton.

- Camino de Euler:

V1 - V4 - V3 - V2 - V1

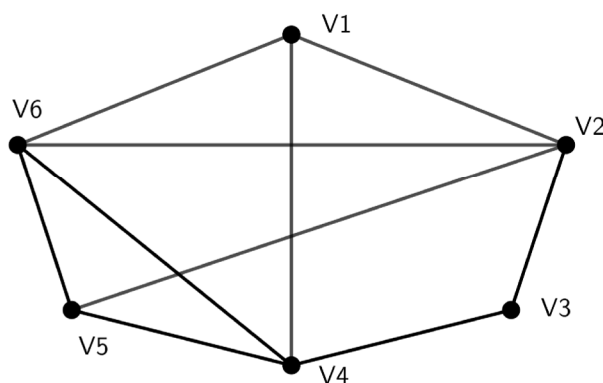
V6 - V4 - V5 - V2 - V6

V5

- Ciclo de Hamilton:

V1 - V2 - V3 - V4 - V5

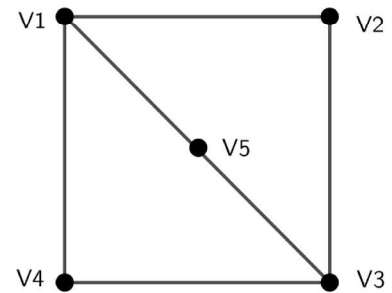
V6 - V1



- Caso 5: camino (sin ciclo) de Euler y camino (sin ciclo) de Hamilton.

- Camino de Euler:
V1 - V2 - V3 - V5 - V1
V4 - V3

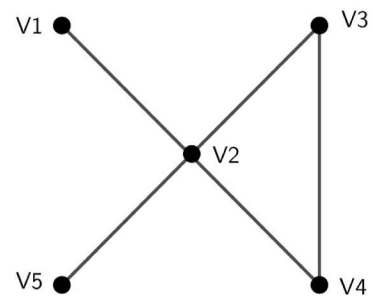
- Camino de Hamilton:
V2 - V1 - V5 - V3 - V4



- Caso 6: camino (sin ciclo) de Euler y sin camino de Hamilton.

- Camino de Euler:
V1 - V2 - V4 - V3 - V2
V5

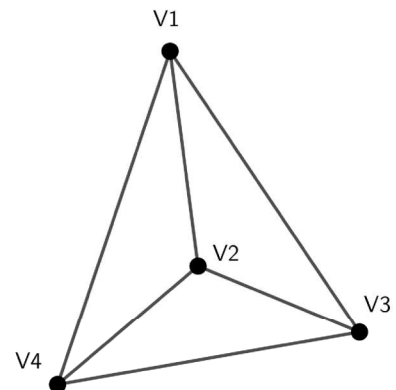
- No hay camino de Hamilton.



- Caso 7: sin camino de Euler y ciclo de Hamilton.

- No hay camino de Euler.

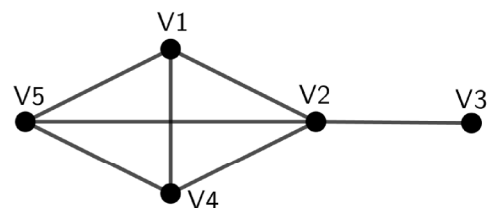
- Ciclo de Hamilton:
V2 - V1 - V4 - V3 - V2



- Caso 8: sin camino de Euler y camino (sin ciclo) de Hamilton.

- No hay camino de Euler.

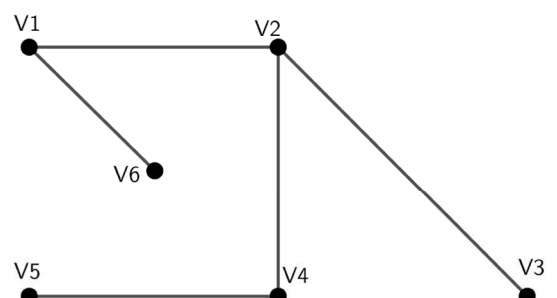
- Camino de Hamilton:
V3 - V2 - V1 - V5 - V4



- Caso 9: sin camino de Euler y sin camino de Hamilton.

- No hay camino de Euler.

- No hay camino de Hamilton.

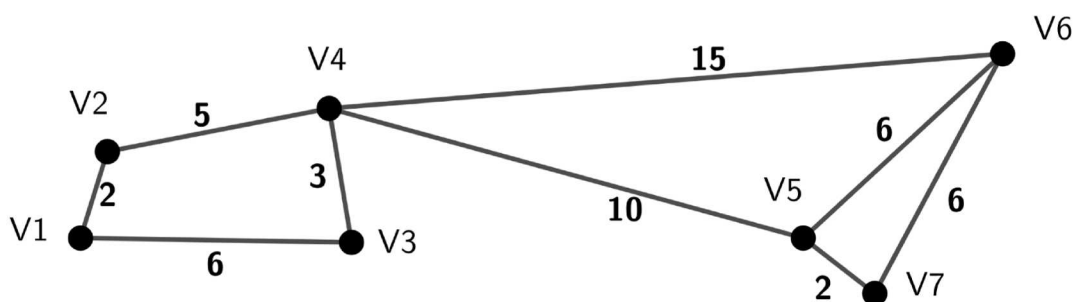


5.8 Problema del camino más corto (algoritmo de Dijkstra).

- Los grafos ponderados son los que tienen valores en las aristas que indican costes, tiempos o distancias. El algoritmo de Dijkstra sirve para minimizar el coste, el tiempo o la distancia entre dos vértices dados.

Veamos un ejemplo:

El siguiente grafo refleja las distancias del mapa de las carreteras que hay entre varios pueblos. Si queremos ir del pueblo V1 al V7, ¿cuál es la ruta a seguir con la mínima distancia?



	V1	V2	V3	V4	V5	V7	V6
V1	0	✓					
V2	2	✓					
V3	6	6, ∞	✓				
V4	∞	∞, 7	7, 9	✓			
V5	∞	∞	∞	∞, 17	✓		
V6	∞	∞	∞	∞, 22	22, 23	22, 25	✓
V7	∞	∞	∞	∞	∞, 19	✓	

- Proceso a seguir para rellenar la tabla del algoritmo de Dijkstra:
 - En la primera columna colocamos todos los vértices en orden y en la primera fila se van escribiendo, en cada paso, los vértices que resultan elegidos (o visitados) por tener la menor distancia acumulada.
 - En la columna V1, ponemos las distancias de los vértices cercanos V2 y V3, y en los otros vértices escribimos ∞ , para indicar que aún no podemos acceder a ellos. Elegimos la menor distancia (2) y seleccionamos V2.
 - En la columna V2, ponemos la nueva distancia a V4 y evaluamos las distancias anteriores y las nuevas, tachando la mayor. Después elegimos la menor de las distancias no tachadas (6), que corresponde a V3.
 - En la columna V3, ponemos la nueva distancia por otro camino a V4, evaluamos y obtenemos como menor distancia 7, que corresponde a V4.

- En la columna V4, ponemos las nuevas distancias a V5 y V6, evaluamos y elegimos la menor distancia (17), que corresponde a V5.
- En la columna V5, ponemos las nuevas distancias a V7 y a V6 por otro camino, evaluamos y elegimos la menor distancia (19), que corresponde a V7.
- En la columna V7, aunque hemos llegado al destino, claramente podemos también optimizar la distancia que falta (22), que corresponde a V6.

Una vez terminado el proceso, debemos hallar el itinerario para obtener esa mínima distancia (19). Para ello, recorremos los vértices hacia atrás, desde el vértice final hasta al vértice inicial, buscando los vértices en los que, tras restar la distancia de la arista, se obtiene la distancia fijada.

Podemos ayudarnos de la siguiente tabla:

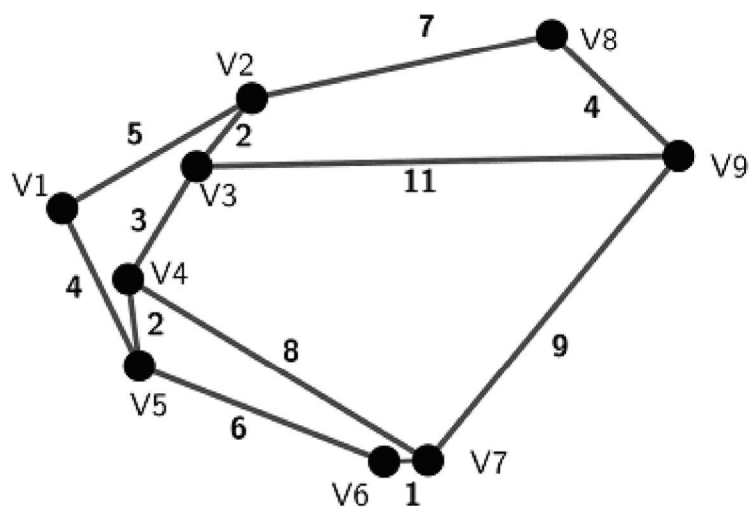
	Dijk.	V7	V5	V4	V2	V1
V1	0				0	✓
V2	2			2	✓	
V3	6			4		
V4	7		7	✓		
V5	17	17	✓			
V6	22	13	11			
V7	19	✓				

- En la primera columna, colocamos todos los vértices ordenados y en la primera fila se van escribiendo los vértices que resultan elegidos por coincidir la resta de la arista con su número fijado de menor distancia.
- En la columna Dijkstra se escriben los resultados que se obtuvieron en la aplicación del algoritmo como distancia mínima desde el primero a cada uno de los vértices. Elegimos la columna del vértice final, que es V7.
- En la columna V7, restamos las distancias de los caminos adyacentes (2 a V5 y 6 a V6), y el número que coincide con la diferencia (este hecho indica el camino correcto) es 17, por lo que el vértice elegido es V5.
- En la columna V5, restamos las distancias de los caminos adyacentes (10 a V4 y 6 a V6). El número que coincide con la primera columna es 7, por lo que elegimos entonces V4.
- En la columna V4, restamos las distancias de los caminos adyacentes (5 a V2 y 3 a V3). El número que coincide con la diferencia es 2 y elegimos V2.
- En la columna V2, restamos la distancia del único camino adyacente (2 a V1). El número que coincide con la diferencia es 0 y elegimos V1.

Camino final con distancia mínima: V1 - V2 - V4 - V5 - V7.

- Veamos otro ejemplo:

En el siguiente grafo, queremos ir del pueblo V1 al pueblo V9, ¿cuál es la menor distancia y cuál es el recorrido a seguir?



	V1	V5	V2	V4	V3	V6	V7	V8	V9
V1	0	✓							
V2	5	5, ∞	✓						
V3	∞	∞	∞, 7	7, 9	✓				
V4	∞	∞, 6	6, ∞	✓					
V5	4	✓							
V6	∞	∞, 10	10, ∞	10, ∞	10, ∞	✓			
V7	∞	∞	∞	∞, 14	14, ∞	14, 11	✓		
V8	∞	∞	∞, 12	12, ∞	12, ∞	12, ∞	12, ∞	✓	
V9	∞	∞	∞	∞	∞, 18	18, ∞	18, 20	18, 16	✓

• Proceso del algoritmo de Dijkstra:

- En la primera columna colocamos todos los vértices ordenados y en la primera fila se van escribiendo los vértices que resulten elegidos (o visitados) por obtenerse en ellos la menor distancia.
- En la columna V1, ponemos las distancias de los vértices cercanos V2 y V5. En los otros vértices escribimos ∞ , para indicar que todavía no podemos acceder a ellos. Elegimos la menor de las distancias (4), y seleccionamos por tanto el vértice V5.
- En la columna V5, ponemos las nuevas distancias a V4 y V6, evaluamos las distancias anteriores y las nuevas, tachando la mayor. Elegimos la menor de las distancias de las que no han sido tachadas (5), que corresponde a V2.
- En la columna V2, ponemos las nuevas distancias a V3 y V8, evaluamos las antiguas y las nuevas distancias. Elegimos la menor (6), correspondiente al vértice V4.
- En la columna V4, ponemos las nuevas distancias a V3 (por otro camino) y a V7, evaluamos las distancias anteriores y las nuevas. Elegimos la menor de las distancias que no han sido tachadas (7), que corresponde a V3.

- En la columna V3, damos entrada a una nueva distancia para V9 y evaluamos, siendo la menor distancia (10), correspondiente a V6.
 - En la columna V6, damos entrada a una nueva distancia para V7 (por otro camino), evaluamos, quedándonos con la menor distancia (11) y elegimos como nuevo vértice V7.
 - En la columna V7, damos entrada a una nueva distancia para V9 por otro camino. Tras comparar, la menor distancia es 12, correspondiente a V8.
 - En la columna V8, introducimos una nueva distancia para llegar a V9 por otro camino y al evaluar se obtiene la menor distancia 16, que corresponde a V9. Por lo tanto, se termina el proceso al haber llegado al destino V9.
- Una vez terminado el proceso, tenemos que hallar el itinerario para tener esa mínima distancia de 16. Para conseguir el itinerario, recorreremos los vértices hacia atrás desde el vértice final al vértice inicial, buscando los vértices en los que, tras restar la distancia de la arista, se obtiene la distancia fijada.

Podemos ayudarnos de la siguiente tabla:

	Dijk.	V9	V8	V2	V1
V1	0			0	✓
V2	5		5	✓	
V3	7	5		3	
V4	6				
V5	4				
V6	10				
V7	11	7			
V8	12	12	✓		
V9	16	✓			

- En la primera columna, colocamos todos los vértices ordenados y en la primera fila se van escribiendo los vértices que resulten elegidos por coincidir la resta de la arista con su número fijado de menor distancia.
- En la columna Dijkstra, ponemos los resultados que se obtuvieron en la aplicación del algoritmo como distancia mínima desde el primero a cada uno de los vértices. Elegimos la columna del vértice final, que es V9.
- En la columna V9, restamos las distancias de los caminos adyacentes (4 a V8, 11 a V3 y 9 a V7). El número que coincide con la diferencia (este hecho indica el camino correcto) es 12, y el vértice elegido es V8.
- En la columna V8, restamos la distancia del único camino adyacente (7 a V2). El resultado obtenido (5) coincide con la primera columna y elegimos V2.
- En la columna V2, restamos las distancias de los caminos adyacentes (5 a V1 y 2 a V3). El número que coincide con la diferencia es 0 y elegimos V1.

Camino final con distancia mínima: V1 - V2 - V8 - V9.