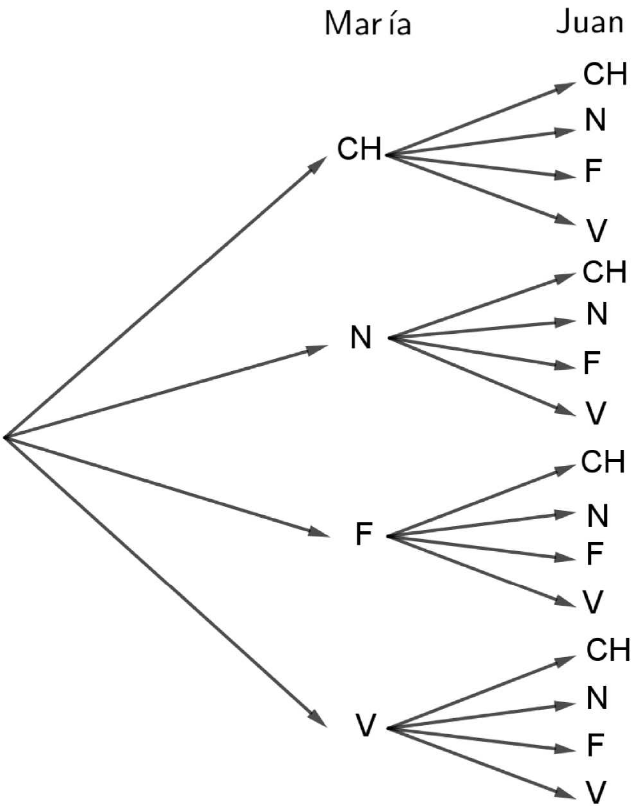
Tema 9: Conteo.

9.1 Principio de multiplicación.

- El principio de multiplicación, también conocido como principio fundamental del conteo o análisis combinatorio, se basa en la multiplicación sucesiva para determinar todas las posibilidades que pueden darse al realizar un experimento. De forma intuitiva, podemos decir que "se multiplican todas las ramas del árbol consecutivamente para obtener todas las posibilidades".

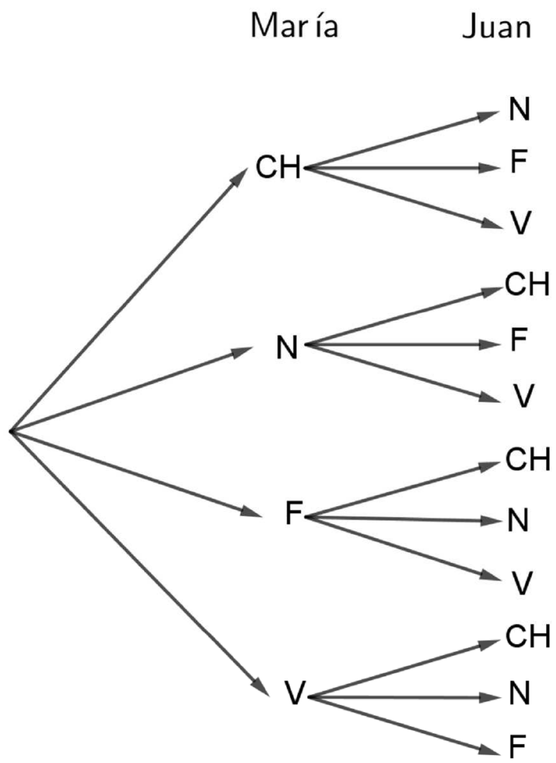
  Supongamos que el suceso A puede elegirse de 'a' formas distintas. Luego, para cada una de estas elecciones del suceso A, otro suceso B puede ser elegido de 'b' formas. Asimismo, para cada una de estas elecciones, tanto de A como de B, un tercer suceso C puede ser elegido de 'c'. Entonces, el número total de posibles resultados es el producto de todas las elecciones parciales. Es decir, habrá en total $a \cdot b \cdot c$ formas distintas.

  Ejemplo: María y Juan compran un helado cada uno y hay 4 sabores: chocolate, nata, fresa y vainilla. ¿De cuántas formas pueden elegir?



  Como no se ha indicado ninguna restricción, pueden repetirse sabores y coincidir en la elección. Según el principio de multiplicación, hay $4x4 = 16$ posibilidades, desde CH-CH (ambos de chocolate) hasta V-V (ambos de vainilla).

Otro ejemplo: supongamos ahora que María y Juan prefieren elegir sabores distintos.



Ahora no pueden coincidir en la elección. El principio de multiplicación indica que habría $4x3 = 12$ posibilidades, desde CH-N (María de chocolate y Juan de nata) hasta V-F (María de vainilla y Juan de fresa).

9.2 Variaciones sin repetición.

- Se llaman variaciones sin repetición de 'n' elementos tomados de 'm' en 'm' ($m \leq n$) a los diferentes grupos formados por 'm' elementos (no repetidos) de forma que:
  - Los 'm' elementos que forman cada grupo son distintos (no se repiten).
  - Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento o en el orden en que están colocados (influye el orden).

$$\boxed{V_n^m = \overbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-m+1)}^{m-\text{factores}}}$$

La fórmula también puede expresarse así: $\boxed{V_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}}$. Siendo n! el

factorial de n, es decir: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

- Explicación de la fórmula: para el primer elemento del grupo (m-elementos), tenemos ‘ n ’ posibilidades (puede ser cualquiera). Una vez elegido, por cada una de ellas, para el segundo elemento quedan $(n-1)$ posibilidades (ya no se puede repetir el elemento elegido anterior), y así sucesivamente. Por tanto, el número total es el producto de ‘m’ factores:
  $V_n^m = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-m+1)$.

  Como primer ejemplo, vamos a resolver el problema planteado anteriormente en forma de árbol en el apartado anterior: María y Juan van a comprar un helado cada uno y hay 4 sabores: chocolate, nata, fresa y vainilla. ¿De cuántas formas pueden elegir si prefieren que los sabores elegidos sean diferentes?
  <u>1ª forma:</u>
  Razonamos sobre el diagrama de árbol: para el helado de María tenemos 4 posibilidades y, por cada una de ellas, para el helado de Juan hay 3 posibilidades, ya que los sabores no se pueden repetir. Total $4\cdot 3 = 12$ posibilidades, desde CH-N hasta V-F.
  <u>2ª forma:</u>
  Como influye el orden y no se pueden repetir, aplicamos la fórmula de las variaciones sin repetición para 4 elementos tomados de 2 en 2.

  $$V_4^2 = \overbrace{4\cdot 3}^{2-\text{factores}} = 12.$$

  O bien: $V_4^2 = \dfrac{4!}{(4-2)!} = \dfrac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1} = 4\cdot 3 = 12$.

  Otro ejemplo: en una competición participan 7 atletas, ¿de cuántas maneras diferentes podrán obtener medalla de oro, plata y bronce?
  <u>1ª forma:</u>
  Razonamos sobre un diagrama de árbol: para la medalla de oro tenemos 7 posibilidades y, por cada una de ellas, para la de medalla de plata tenemos 6 posibilidades y, por último, para la de bronce 5 posibilidades (no pueden ser los atletas anteriores). Total $7\cdot 6\cdot 5 = 210$.
  <u>2ª forma:</u>
  Como influye el orden y no se pueden repetir, aplicamos la fórmula de las variaciones sin repetición para 7 elementos tomados de 3 en 3.

  $$V_7^3 = \overbrace{7\cdot 6\cdot 5}^{3-\text{factores}} = 210.$$

  O bien: $V_7^3 = \dfrac{7!}{(7-3)!} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 7\cdot 6\cdot 5 = 210$.

  ¿Cuántas elecciones de delegado(a) y subdelegado(a) se pueden realizar en una clase de 25 alumnos(as)? $V_{25}^2 = 25\cdot 24 = 600$.
  ¿Cuántas elecciones pueden realizarse de Presidente, Secretario y Tesorero en una comunidad de 20 vecinos? $V_{20}^3 = 20\cdot 19\cdot 18 = 6840$.

9.3 Variaciones con repetición.

- Se llaman variaciones con repetición de ‘n’ elementos tomados de ‘m’ en ‘m’, a los distintos grupos formados por ‘m’ elementos, de forma que:
  - Los ‘m’ elementos que forman cada grupo pueden repetirse.
  - Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento o en el orden en que están colocados (influye el orden).

$$\boxed{VR_n^m = n^m = \overbrace{n \cdot n \cdot .... \cdot n}^{m-veces}}$$

- Explicación de la fórmula: para el primer elemento del grupo, tenemos ‘n’ posibilidades (puede ser cualquiera) y, por cada una de ellas, para el segundo elemento tenemos de nuevo ‘n’ posibilidades (puede ser cualquiera porque se pueden repetir), y así sucesivamente. Total: $VR_n^m = n \cdot n \cdot ... \cdot n \ (m - veces)$.

  Como primer ejemplo, vamos a resolver uno ya visto anteriormente (en forma de árbol): María y Juan van a comprar un helado cada uno y hay 4 sabores: chocolate, nata, fresa y vainilla. ¿De cuántas formas pueden elegir?
  <u>1ª forma:</u>
  Razonamos sobre el diagrama de árbol: para el helado de María tenemos 4 posibilidades y, por cada una de ellas, para el helado de Juan tenemos otras 4 posibilidades (porque los sabores se pueden repetir si no se dice nada en sentido contrario). Total $4 \cdot 4 = 16$ posibilidades, desde CH-CH hasta V-V.
  <u>2ª forma:</u>
  Como influye el orden y se pueden repetir, aplicamos la fórmula de las variaciones con repetición para 4 elementos tomados de 2 en 2.
  $VR_4^2 = 4^2 = 4 \cdot 4 = 16$.

  Otro ejemplo: en un examen tipo test hay 5 preguntas con 3 opciones de respuesta en cada una. ¿Cuántos exámenes diferentes se pueden hacer?
  <u>1ª forma:</u>
  Razonamos sobre un diagrama de árbol: para la primera pregunta tenemos 3 posibilidades y, por cada una de ellas, para la segunda tenemos también 3 posibilidades, y así sucesivamente hasta la quinta con 3 posibilidades.
  Total $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$. Desde aaaaa (siempre eligiendo la 1ª respuesta), hasta ccccc (siempre eligiendo la 3ª respuesta).
  <u>2ª forma:</u>
  Como influye el orden y se pueden repetir, aplicamos la fórmula de las variaciones con repetición para 3 elementos tomados de 5 en 5.
  $VR_3^5 = 3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$.

  Curiosidades: las posibilidades que pueden darse con las 3 letras de las matrículas son: $VR_{20}^3 = 20^3 = 8000$ (intervienen 20 letras porque no están las vocales, ni la Ñ, ni la Q).
  El número de quinielas diferentes con 14 partidos es: $VR_3^{14} = 3^{14} = 4782969$.

9.4 Permutaciones sin repetición.

- Se llaman permutaciones sin repetición de 'n' elementos a las distintas reordenaciones que pueden hacerse entre ellos, de forma que:
  - En cada grupo están todos los elementos sin repetirse ninguno.
  - Dos grupos son distintos si se diferencian en el orden en que están colocados (influye el orden).

$$\boxed{P_n = n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

- Explicación de la fórmula: para el primer elemento del grupo, tenemos 'n' posibilidades (puede ser cualquiera) y, por cada una de ellas, para el segundo elemento tenemos $(n-1)$ posibilidades (ya que no puede ser el elemento elegido antes), y así sucesivamente hasta el último elemento, que estará determinado con una única posibilidad. En total tendremos: $P_n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$.

  Ejemplo: ¿cuántas formas hay para ponerse en fila india Juan, Pedro y María?
  1ª forma:
  Razonamos sobre un diagrama de árbol: para el 1º de la fila tenemos 3 posibilidades (puede ser cualquiera) y, por cada una de ellas, para el 2º tenemos sólo 2 posibilidades (no puede ser la persona elegida antes) y, para el 3º, una única posibilidad. Total $3\cdot 2\cdot 1 = 6$ posibilidades, desde JPM hasta MPJ.
  2ª forma:
  Como influye el orden, están todos y no se pueden repetir, aplicamos la fórmula de las permutaciones sin repetición en un conjunto de 3 elementos: $P_3 = 3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$.

  Otro ejemplo: en semifinales hay 4 equipos: Alemania, Francia, Portugal y España, ¿de cuántas maneras puede ser la clasificación final?
  1ª forma:
  Razonamos sobre un diagrama de árbol: para el 1º hay 4 posibilidades y, por cada una de ellas, para el 2º tenemos 3 posibilidades, para el 3º dos posibilidades y para el 4º una única posibilidad. Total $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$.
  2ª forma:
  Como influye el orden, están todos y no se pueden repetir, aplicamos la fórmula de las permutaciones sin repetición en un conjunto de 4 elementos: $P_4 = 4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$.

  Una pandilla de 5 personas va al cine. ¿De cuántas formas pueden sentarse? $P_5 = 5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$.

  ¿Cuántas palabras (aunque no tengan sentido) se pueden escribir con las letras de la palabra FIESTA, (sin repetir ninguna letra)? $P_6 = 6! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 720$.

9.5 Permutaciones con repetición.

- Se llaman permutaciones con repetición de ‘n’ elementos, donde algunos se repiten, a los distintos grupos de ‘n’ elementos de forma que:
  - En cada grupo intervienen todos los elementos con las repeticiones indicadas inicialmente.
  - Los grupos se diferencian en el orden de colocación de alguno de sus elementos.

  Si el primero se repite ‘a’ veces, el segundo se repite ‘b’ veces, el tercero ‘c’ veces, … , etc. (siendo: $a+b+c+...=n$),

  $$\boxed{PR_n^{a,b,c,...}=\frac{n!}{a!\cdot b!\cdot c!\cdots}}$$

- Explicación de la fórmula: razonaremos suponiendo que todos los elementos fuesen distintos: en este caso, ya sabemos que serían permutaciones sin repetición $P_n=n!$. Ahora bien, hay que eliminar las posibilidades idénticas por tener elementos repetidos, que serían las reordenaciones de cada uno de estos elementos. Es decir, que hay que dividir por las permutaciones de los elementos repetidos: $a!\cdot b!\cdot c!\cdots$. Por tanto, $PR_n^{a,b,c,...}=\dfrac{n!}{a!\cdot b!\cdot c!\cdots}$.

  Ejemplo: ¿de cuántas formas pueden colocarse en una estantería 2 libros de matemáticas iguales y otros 2 libros de física también iguales?

  <u>1ª forma:</u>
  Razonamos primero considerando que todos los libros fuesen distintos: para el 1º hay 4 posibilidades y, por cada una de ellas, para el 2º hay 3 posibilidades; para el 3º, a su vez, 2 posibilidades y para el 4º, una única posibilidad. Total $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ posibilidades. Ahora, hay que dividir entre las formas de ordenar entre sí los libros iguales (2! y 2!, respectivamente, cuyo producto resulta 4). Luego, el resultado es: $\dfrac{24}{4}=6$.

  <u>2ª forma:</u>
  Como influye el orden, están todos los elementos y se pueden repetir, aplicamos la fórmula de las permutaciones con repetición para 4 elementos, con el 1º repetido 2 veces y el 2º repetido 2 veces:

  $$PR_4^{2,2}=\frac{4!}{2!\cdot 2!}=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot2\cdot1}=\frac{24}{4}=6.$$

  Veamos otro ejemplo: ¿cuántas expresiones del alfabeto Morse pueden formarse con 3 puntos y 2 rayas?

  <u>1ª forma:</u>
  Razonamos considerando que todos los puntos y rayas son diferentes: para el 1º de la izquierda hay 5 posibilidades y, por cada una de ellas, para el 2º hay 4 posibilidades; para el 3º, 3 posibilidades; para el 4º, 2 posibilidades y para el 5º una única posibilidad. Total $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ posibilidades. Ahora, hay que

dividir entre las formas de ordenar entre sí los puntos y las rayas (3! y 2! respectivamente, que resulta 12). Luego, el resultado es: $\frac{120}{12}=10$.

2ª forma:
Como influye el orden, están todos los elementos y se pueden repetir, aplicamos la fórmula de las permutaciones con repetición para 5 elementos, con el 1º repetido 3 veces y el 2º repetido 2 veces:

$$PR_5^{3,2}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1}=\frac{120}{12}=10.$$

9.6 Combinaciones sin repetición.

- Se denominan combinaciones (sin repetición) de ‘n’ elementos tomados de ‘m’ en ‘m’ ($m \le n$) a los distintos grupos formados por ‘m’ elementos, de forma que:
  - Los ‘m’ elementos que forman cada grupo son distintos (no se repiten).
  - Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento, pero no influye el orden en que están colocados.

$$\boxed{C_n^m=\frac{V_n^m}{P_m}=\frac{\frac{n!}{(n-m)!}}{m!}=\frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}=\binom{n}{m}}$$

. Que son números combinatorios.

- Explicación de la fórmula: razonaremos suponiendo inicialmente que el orden influye en cada grupo de ‘m’ elementos y que hay un 1º, un 2º, etc.: en este caso, ya sabemos que serían variaciones sin repetición: para el 1º habría n posibilidades y, por cada una de ellas, para el 2º habría $(n-1)$ posibilidades (ya no puede ser el elemento elegido antes), y así sucesivamente. Por tanto, tendremos en total: $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-m+1)=V_n^m$.
  Ahora bien, como no influye el orden, hay que eliminar las diferentes reordenaciones con los ‘m’ elementos. Es decir, que hay que dividir entre las permutaciones de los ‘m’ elementos: $P_m=m!$. Por tanto, $C_n^m=\frac{V_n^m}{P_m}$.

  Ejemplo: ¿de cuántas formas puedo elegir 3 libros de entre 5?
  1ª forma:
  Claramente, no influye el orden; sólo importa si cada libro es elegido o no. No obstante, razonaremos primero considerando que influyese el orden y que hay un primer libro, un 2º y un 3º: entonces, para el 1º habría 5 posibilidades y, por cada una de ellas, para el 2º habría 4 posibilidades y para el 3º habría 3 posibilidades. Total $5\cdot 4\cdot 3=60$ posibilidades. Ahora, para eliminar el orden, hay que dividir entre las formas de ordenar entre sí los tres libros elegidos $(3!=6)$. Luego, el resultado es $\frac{60}{6}=10$.
  2ª forma:
  Como no influye el orden y no se pueden repetir, aplicamos la fórmula de las combinaciones sin repetición para 5 elementos tomados de 3 en 3:

$$C_5^3=\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1}=\frac{120}{12}=10\,.$$

Otro ejemplo: en una heladería hay 6 sabores. ¿Cuántas tarrinas con dos sabores pueden elegirse?
<u>1ª forma:</u>
Claramente, no influye el orden de las bolas; no obstante, razonaremos suponiendo que influyese y que hay un primer sabor y un 2º sabor. Entonces, para el 1º habría 6 posibilidades y, por cada una ellas, para el 2º sabor habría 5 posibilidades. Total $6\cdot 5=30$ posibilidades. Ahora hay que dividir entre las formas de reordenar entre sí los dos sabores $(2!=2)$. Luego, resulta $\frac{30}{2}=15$.
<u>2ª forma:</u>
Como no influye el orden y no se pueden repetir, aplicamos la fórmula de las combinaciones sin repetición para 6 elementos tomados de 2 en 2:

$$C_6^2=\binom{6}{2}=\frac{6!}{2!\cdot 4!}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=\frac{720}{48}=15\,.$$

Curiosidades: en los exámenes de matemáticas de las pruebas Ebau en Extremadura hay 10 preguntas y debemos elegir 5 preguntas. ¿De cuántas formas podemos elegir? $C_{10}^5=252$.
En la primitiva y en la bonoloto hay que elegir 6 números de entre 49 y como no influye el orden, se podrían rellenar $C_{49}^6=13983816$ boletos diferentes.

9.7 <u>Combinaciones con repetición.</u>

- Se llaman combinaciones con repetición de 'n' elementos tomados de 'm' en 'm', a los distintos grupos formados por 'm' elementos de forma que:
  - Los 'm' elementos que forman cada grupo pueden repetirse.
  - Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento, pero no influye el orden.

$$\boxed{CR_n^m=\frac{V_{n+m-1}^m}{P_m}=C_{n+m-1}^m=\binom{n+m-1}{m}=\frac{(n+m-1)!}{m!\cdot(n-1)!}}$$

- Explicación de la fórmula: añadiremos $(m-1)$ "elementos comodines", que pueden tomar cualquier valor de los 'n' elementos iniciales. Con esto se consigue que cada elemento pueda repetirse m-veces (una vez que aparece inicialmente más $(m-1)$ veces que podría aparecer con los "elementos comodines"). Razonaremos inicialmente considerando que influyese el orden y que, en cada grupo de 'm' elementos, hay un 1º, un 2º, etc.: en este caso, ya sabemos que serían variaciones sin repetición: para el 1º habría $(n+m-1)$ posibilidades; y, por cada una de ellas, para el 2º tendríamos $(n+m-2)$ posibilidades (ya no puede ser el elemento elegido antes), y así sucesivamente.

Por tanto, tendríamos en total: $(n+m-1)\cdot(n+m-2)\cdot\cdot\cdot n = V^{m}_{n+m-1}$.
Ahora bien, como no influye el orden, hay que eliminar las diferentes reordenaciones que se pueden producir con los 'm' elementos. Es decir, que hay que dividir entre las permutaciones de los 'm' elementos: $P_m = m!$. Por tanto, $CR^m_n = C^m_{n+m-1} = \frac{V^m_{n+m-1}}{P_m}$.

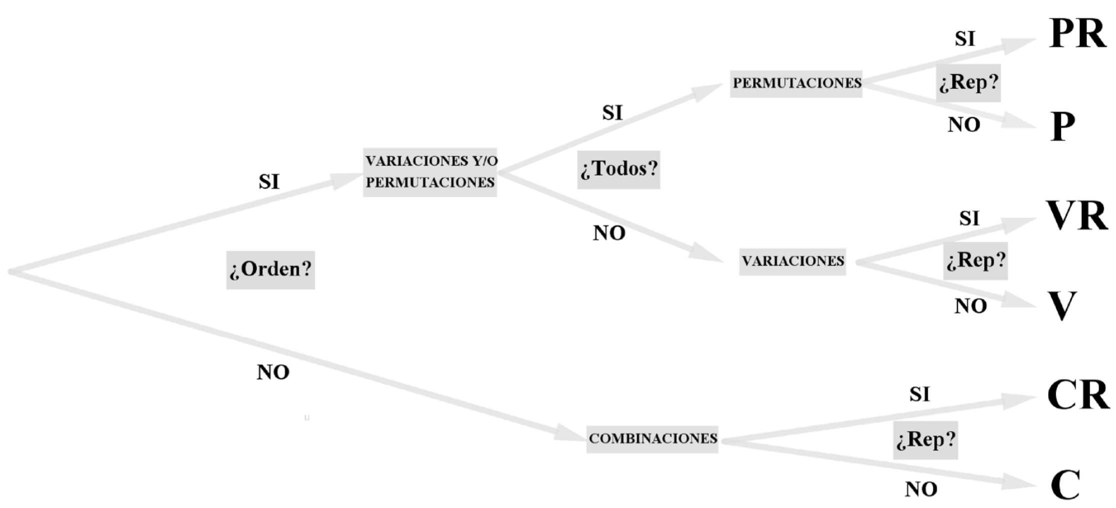
Ejemplo: para desayunar en una cafetería hay 4 tostadas diferentes. ¿De cuántas formas podemos elegir 2?
<u>1ª forma:</u>
Claramente, podemos elegir las dos tostadas iguales y no influye el orden de las tostadas, sólo importa si las tostadas se eligen o no. Añadimos un "elemento comodin" para tener la posibilidad de tener las dos tostadas iguales. Ahora tenemos 5 tostadas, 4 iniciales y un "elemento comodin". De esas 5 tostadas tenemos que elegir 2. Razonaremos primero considerando que influyese el orden: entonces para la 1ª habría 5 posibilidades y, por cada una de ellas, para la 2ª habría 4 posibilidades. Total $5\cdot 4 = 20$ posibilidades. Ahora, como sabemos que el orden no influye, hay que dividir entre las formas de reordenar entre sí las dos tostadas elegidas $(2! = 2)$. Luego, el resultado es $\frac{20}{2} = 10$.
<u>2ª forma:</u>
Como no influye el orden y se pueden repetir, aplicamos la fórmula de las combinaciones con repetición para 4 elementos tomados de 2 en 2:

$$CR^2_4 = C^2_5 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{120}{12} = 10.$$

Otro ejemplo: en una heladería sólo quedan 3 sabores. ¿De cuántas formas puedo comprar 3 cornetes de una bola?
<u>1ª forma:</u>
Está claro que se pueden repetir y que no influye el orden. Añadimos dos "elementos comodines" para tener la posibilidad de tener los tres sabores iguales. Ahora tenemos 5 sabores, 3 iniciales y 2 "elementos comodines". De esos 5 sabores tenemos que elegir 3. Razonaremos primero considerando que influyese el orden, entonces para el 1º habría 5 posibilidades y, por cada una de ellos; para el 2º, habría 4 posibilidades y para el 3º habría 3 posibilidades. Total $5\cdot 4\cdot 3 = 60$ posibilidades. Ahora, como sabemos que el orden no influye, hay que dividir entre las formas de reordenar entre sí los tres sabores elegidos $(3! = 6)$. Luego, el resultado final es $\frac{60}{6} = 10$.
<u>2ª forma:</u>
Como no influye el orden y se pueden repetir, aplicamos la fórmula de las combinaciones con repetición para 3 elementos tomados de 3 en 3:

$$CR^3_3 = C^3_5 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = \frac{120}{12} = 10.$$

9.8 Esquema y fórmulas.



¿Influye el orden?	¿Están todos?	¿Se pueden repetir?	Fórmula:
SI	SI	SI	$PR_n^{a,b,c,\dots} = \dfrac{n!}{a!\cdot b!\cdot c!\cdots}$
SI	SI	NO	$P_n = n!$
SI	NO	SI	$VR_n^m = n^m$
SI	NO	NO	$V_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$
NO	NO	SI	$CR_n^m = C_{n+m-1}^m = \begin{pmatrix} n+m-1 \\ m \end{pmatrix} = \dfrac{(n+m-1)!}{m!\cdot(n-1)!}$
NO	NO	NO	$C_n^m = \dfrac{V_n^m}{P_m} = \dfrac{n!}{m!\cdot(n-m)!} = \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$

Observación: Los casos “NO-SI-SI” y “NO-SI-NO” no se incluyen en el esquema ni en la tabla. En el primer caso, estamos en un caso particular de combinaciones con repetición, cuando están de forma obligada todos los elementos, repetidos o no. Y en el segundo caso, solo hay una posibilidad.