

Tema 2: Relaciones. Proporcionalidad y educación financiera.

2.1 Magnitudes directamente proporcionales.

- Dos magnitudes son directamente proporcionales si al aumentar / disminuir una de ellas, la otra magnitud también aumenta / disminuye, de la misma forma. Si una de ellas se duplica, triplica, etc., la otra también se duplica, triplica, etc. Ejemplos:
 - Número de artículos y precio total.
 - Peso y precio total.
 - Radio de la circunferencia y longitud de la circunferencia.
 - Masa de un cuerpo y volumen de un cuerpo.
 - Espacio recorrido y tiempo transcurrido.
 - Cantidad total de una comida y cantidad de un ingrediente.
- Si dos magnitudes son directamente proporcionales, el cociente entre ellas es siempre constante. Esa constante se llama **razón de proporcionalidad**.
Ejemplo: he comprado 5 kg de patatas y me han costado 4 €, ¿cuánto me costarán 7 kg de patatas?

kg	5	7
dinero	4	x

$$\frac{5}{4} = \frac{7}{x} \Rightarrow x = \frac{7 \cdot 4}{5} \Rightarrow x = \frac{28}{5} . \text{ Luego, } x = 5,60 \text{ €} .$$

También podemos utilizar las conocidas reglas de 3, que son en realidad cocientes de magnitudes proporcionales:

5 kg $\longrightarrow$ 4 €

7 kg $\longrightarrow$ x $\quad x = \frac{7 \cdot 4}{5} = \frac{28}{5} = 5,60 \text{ €}$

Podemos comprobar con este ejemplo que los cocientes son constantes:

precio	1,60	2,40	3,20	4	5,60	8
kg	2	3	4	5	7	10

$$\frac{1,60}{2} = \frac{2,40}{3} = \frac{4}{5} = \frac{5,60}{7} = \frac{8}{10} = 0,80 . \text{ En este ejemplo, la razón de}$$

proporcionalidad es el precio unitario del kg de patatas: 0,80 €.

Ejemplo: Un automóvil recorre 270 km en 3 horas. ¿Cuántos kilómetros recorrerá en 8 horas?

km	270	x
h	3	8

$$\frac{270}{3} = \frac{x}{8} \Rightarrow \frac{270 \cdot 8}{3} = x \Rightarrow \frac{2160}{3} = x . \text{ Luego, } x = 720 \text{ km} .$$

3 horas $\longrightarrow$ 270 km

8 horas $\longrightarrow$ x $\quad x = \frac{270 \cdot 8}{3} \Rightarrow x = \frac{2160}{3} = 720 \text{ km} .$

km	180	270	360	450	720	900
h	2	3	4	5	8	10

$\frac{180}{2} = \frac{270}{3} = \frac{360}{4} = \frac{450}{5} = \frac{720}{8} = \frac{900}{10} = 90$. En este ejemplo, la razón de proporcionalidad es la velocidad: 90 km/h.

2.2 Magnitudes inversamente proporcionales.

- Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando, al aumentar una de ellas, la otra disminuye en la misma proporción, y viceversa. Es decir, si una magnitud se duplica, triplica, etc., la otra se reduce a la mitad, a un tercio, etc. Ejemplos:
 - Número de trabajadores y el tiempo empleado en un trabajo.
 - Velocidad y tiempo recorrido.
 - Cantidad de animales y tiempo que durará la comida.
 - Numero de litros por minuto y tiempo total de llenado.
 - Número de camiones utilizados y duración del transporte.
 - Número de horas diarias trabajadas y días de trabajo.
- Si dos magnitudes son inversamente proporcionales, el producto entre ellas es siempre constante.

Ejemplo: 12 obreros han levantado una pared en 3 días, ¿cuánto hubieran tardado en hacerlo 9 obreros?

Nº obreros	12	9
Nº días	3	x

$$12 \cdot 3 = 9 \cdot x \Rightarrow \frac{12 \cdot 3}{9} = x \Rightarrow \frac{36}{9} = x. \text{ Luego, } x = 4 \text{ días.}$$

Ejemplo: un automóvil va a 40 km/h y realiza su trayecto en un tiempo de 3 horas. ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer el mismo trayecto si aumenta su velocidad a 60 km/h?

velocidad	40	60
tiempo	3	x

$$40 \cdot 3 = 60 \cdot x \Rightarrow \frac{40 \cdot 3}{60} = x \Rightarrow \frac{120}{60} = x. \text{ Luego } x = 2 \text{ horas.}$$

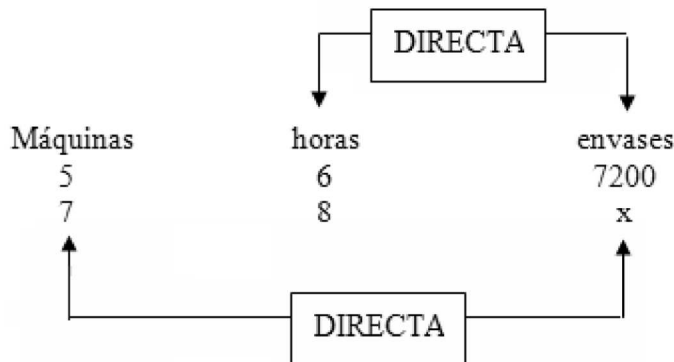
2.3 Proporcionalidad compuesta.

- En la proporcionalidad compuesta nos encontramos con tres magnitudes relacionadas entre sí mediante proporcionalidad directa o inversa. Podemos resolver los problemas de proporcionalidad compuesta de dos formas:
 - 1ª forma: utilizando una regla de tres compuesta. Este proceso consiste en colocar las tres magnitudes en columnas diferentes y evaluar a continuación el tipo de proporcionalidad que hay entre cada magnitud y la magnitud de la incógnita. Esto es necesario porque una vez colocada la fracción de la incógnita a la izquierda y las fracciones de las otras magnitudes a la derecha, hay que “dar la vuelta” o intercambiar numerador y denominador en cada fracción de la magnitud que esté en proporción inversa respecto a la magnitud de la incógnita.
 - 2ª forma: mediante un razonamiento de reducción a la unidad, que además nos sirve de comprobación.

Podemos encontrar tres posibilidades atendiendo a la relación de las otras magnitudes respecto a la magnitud en la que aparece la incógnita:

- Regla de tres compuesta directa.

Ejemplo: en una fábrica de refrescos, 5 máquinas embotelladoras llenan 7200 envases en 6 horas. ¿Cuántos envases llenarán 7 máquinas embotelladoras en 8 horas?



1ª forma:

Estudiamos las relaciones de proporcionalidad:

- Envases-máquinas: directa, porque si aumenta el nº de máquinas aumenta el nº de envases que se producen.
- Envases-horas: directa, porque si aumenta el nº de horas de trabajo también aumenta el nº de envases.

En este caso se mantiene a la izquierda la fracción de la incógnita y a la derecha la multiplicación de las otras fracciones en su orden natural.

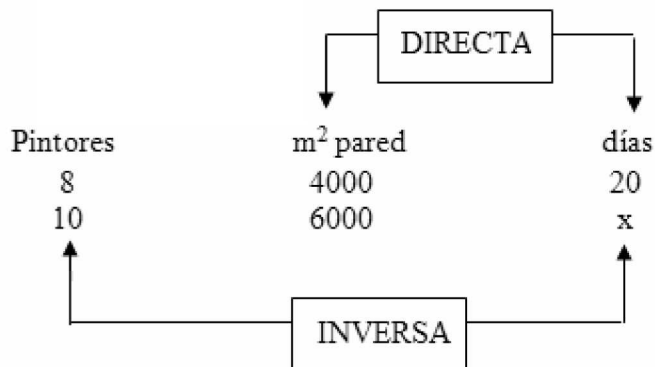
$$\frac{7200}{x} = \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} \quad \text{despejando:} \quad \frac{7200 \cdot 8 \cdot 7}{6 \cdot 5} = x \quad x=13440 \text{ envases.}$$

2ª forma:

Buscamos la producción de una máquina por hora. Se divide 7.200 por 6 y después por 5 y resulta 240, que es la producción de una máquina en una hora. Multiplicando por 8 horas y por 7 máquinas se obtienen 13440 envases.

- Regla de tres compuesta directa-inversa.

Ejemplo: si 8 pintores tardan 20 días en pintar 4000 m² de pared. ¿Cuántos días tardarán 10 pintores en pintar 6000 m² de pared?



1ª forma:

Estudiamos las relaciones de proporcionalidad:

- Días-pintores: inversa, porque si aumenta el número de pintores disminuye el número de días de trabajo.
- Días-m² pared: directa, porque si aumenta el número de m² de pared aumenta el número de días de trabajo.

En este caso se mantiene a la izquierda la fracción de la incógnita y a la derecha la multiplicación de las otras fracciones, pero ahora se “da la vuelta” o se intercambia numerador y denominador en la fracción de los pintores, porque la relación de proporcionalidad con la incógnita es inversa.

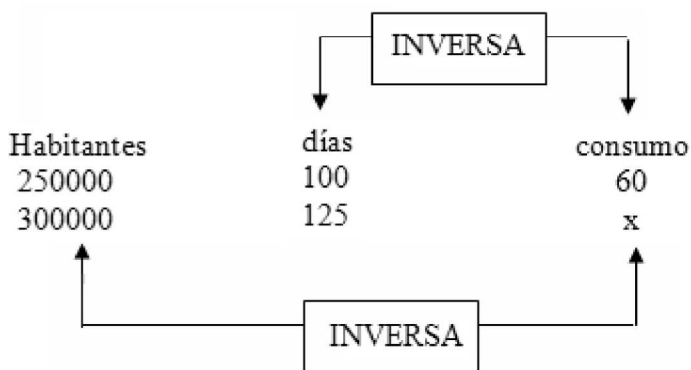
$$\frac{20}{x} = \frac{10}{8} \cdot \frac{4000}{6000} \quad \text{despejando:} \quad \frac{20 \cdot 8 \cdot 6000}{10 \cdot 4000} = x \quad x=24 \text{ días.}$$

2ª forma:

Buscamos cuántos m² pinta un pintor en 1 hora. Multiplicando 8 pintores por 20 días, tenemos que un pintor tardaría 160 días en pintar sólo los 4000 m² pared, luego dividiendo 4000 por 160, resulta que un pintor cada día pinta 25 m² pared. Entonces 10 pintores pintan cada día 250 m² de pared y dividiendo 6000 m², que hay que pintar por 250 m² que pintan al día, resultan 24 días.

- Regla de tres compuesta inversa.

Ejemplo: una ciudad de 250.000 habitantes tiene una provisión de agua para 100 días, calculando un gasto de 60 litros por habitante y día. ¿Cuál debería ser el gasto por habitante y día, si con la misma provisión de agua hay que abastecer durante 125 días a la ciudad y también a una villa cercana, que suman en total 300.000 habitantes?



1ª forma:

Estudiamos las relaciones de proporcionalidad:

- Consumo-Habitantes: inversa, porque si aumenta el nº de habitantes debe disminuir el consumo diario de cada uno.
- Consumo-Días: inversa, porque si aumenta el nº de días debe disminuir el consumo diario personal.

En este caso se mantiene a la izquierda la fracción de la incógnita y a la derecha la multiplicación de las otras fracciones, “se dan la vuelta” o se intercambian numerador y denominador en las fracciones de habitantes y días, porque en ambos casos la relación de proporcionalidad con la incógnita es inversa.

$$\frac{60}{x} = \frac{300000}{250000} \cdot \frac{125}{100} \Rightarrow \frac{60 \cdot 250000 \cdot 100}{300000 \cdot 125} = x \Rightarrow x=40 \text{ litros por habitante y día}$$

2ª forma:

Buscamos la capacidad del embalse. Multiplicando 250.000 habitantes por su consumo 60 y por 100 días, resulta el volumen de agua total 1.500.000.000 litros (1'5 Hm³) y después dividiendo por 300.000 habitantes y por 125 días, obtenemos el nuevo consumo, que debe bajar hasta los 40 litros por habitante y día, para hacer frente al gasto conjunto de las dos ciudades.

2.4 Repartos proporcionales.

- Problemas sobre repartos directamente proporcionales.
Se trata de repartir una cantidad en varias partes, de forma proporcional al porcentaje que cada parte significa del total. Ejemplo: Pedro, Juan y María han comprado un décimo de lotería, Pedro ha aportado 9 €, Juan 7 € y María 4 €. El décimo ha resultado premiado con 30.000 €. ¿Cómo debe repartirse el premio, según el dinero que cada uno ha aportado?

1ª forma:

Aplicar la proporción para obtener cada una de las partes.

Pedro puso 9 de 20, así que le corresponden $\frac{9}{20} \cdot 30000 = \frac{270000}{20} = 13500 \text{ €}$.

Juan puso 7 de 20, así que le corresponden $\frac{7}{20} \cdot 30000 = \frac{210000}{20} = 10500 \text{ €}$.

María puso 4 de 20, así que le corresponden $\frac{4}{20} \cdot 30000 = \frac{120000}{20} = 6000 \text{ €}$.

2ª forma:

Aplicar reglas de tres con porcentajes para obtener cada una de las partes.

A Pedro le corresponde: $\frac{9}{20} = 0,45 = 45\%$

100% —————→ 30.000 €

45% —————→ x $x = \frac{45 \cdot 30000}{100} = 13500 \text{ €}$.

A Juan le corresponde: $\frac{7}{20} = 0,35 = 35\%$

100% —————→ 30.000 €

35% —————→ x $x = \frac{35 \cdot 30000}{100} = 10500 \text{ €}$.

A María le corresponde: $\frac{4}{20} = 0,20 = 20\%$

100% —————→ 30.000 €

20% —————→ x $x = \frac{20 \cdot 30000}{100} = 6000 \text{ €}$.

- Problemas sobre repartos inversamente proporcionales.
Igual que antes se trata de repartir una cantidad en varias partes, pero ahora de forma inversamente proporcional, lo que significa que las partes con más peso inicial recibirán menos en el reparto. Ejemplo: Pedro, Juan y María han comprado un décimo de lotería, Pedro ha aportado 9 €, Juan 7 € y María 4 €. El décimo ha resultado premiado con 30.000 €. ¿Cómo debe repartirse el premio de forma inversamente proporcional al dinero que cada uno ha aportado?

Vamos a convertir este reparto en un reparto directamente proporcional. Se trata de aplicar un reparto directamente proporcional a los números inversos

que cada uno ha aportado: $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{7}$ y $\frac{1}{4}$. Como la suma de las fracciones

anteriores es $\frac{1}{9} + \frac{1}{7} + \frac{1}{4} = \frac{28 + 36 + 63}{252} = \frac{127}{252}$, el reparto sería así:

$$\text{Pedro } \frac{1}{9} \text{ de } \frac{127}{252} : \Rightarrow \frac{\frac{1}{9}}{\frac{127}{252}} \cdot 30000 = \frac{252}{1143} \cdot 30000 = 6614,17 \text{ €}.$$

$$\text{Juan } \frac{1}{7} \text{ de } \frac{127}{252} : \Rightarrow \frac{\frac{1}{7}}{\frac{127}{252}} \cdot 30000 = \frac{252}{889} \cdot 30000 = 8503,94 \text{ €} :$$

$$\text{María } \frac{1}{4} \text{ de } \frac{127}{252} : \Rightarrow \frac{\frac{1}{4}}{\frac{127}{252}} \cdot 30000 = \frac{252}{508} \cdot 30000 = 14881,89 \text{ €}.$$

La suma es: $6.614,17 \text{ €} + 8.503,94 \text{ €} + 14.881,89 \text{ €} = 30.000 \text{ €}$ y se ha repartido el dinero “al revés”, dando menos dinero al que más dinero aportó inicialmente.

2.5 Proporciones, tantos por 1, tantos por 100 y tantos por 1000.

- Hay varias formas de expresar el significado relativo de una parte respecto al total:
 - Razón o proporción: se expresa con claridad el valor de la parte y del total (pueden ser números decimales). Ejemplo: dos de cada cinco.
 - Fracción: se expresa en el numerador la parte y en el denominador el total (normalmente ambos serán números enteros). Ejemplo: $\frac{2}{5}$.
 - Tanto por 1: se expresa una cantidad tomando como referencia que la cantidad total es la unidad. Ejemplo: 0,4 (por 1).
 - Porcentaje: se expresa una cantidad tomando como referencia que la cantidad total es 100. Ejemplo: 40%.
 - Tantos por mil se expresa una cantidad tomando como referencia que la cantidad total será 1000. Ejemplo: 400‰.

Razón	Fracción	Tanto por 1	%	‰
2 de 5	$\frac{2}{5}$	0,4	40	400
1 de 4	$\frac{1}{4}$	0,25	25	250
0,5 de 4	$\frac{1}{8}$	0,125	12,5	125
0,2 de 5	$\frac{1}{25}$	0,04	4	40
4 de 9	$\frac{4}{9}$	0,4444...	44,44...	444,4...
5 de 10	$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$	0,5	50	500
2 de 7	$\frac{2}{7}$	0,142857...	14,2857...	142,857...
12 de 100	$\frac{12}{100} = \frac{3}{25}$	0,12	12	120
15 de 75	$\frac{15}{75} = \frac{1}{5}$	0,2	20	200
0,34 de 1	$\frac{17}{50}$	0,34	34	340

2.6 Incrementos y descuentos porcentuales.

- Al realizar un incremento porcentual, se añade un porcentaje al total. Hay varias formas de obtener el resultado final:
 - Hallar el porcentaje y sumarlo a la cantidad. Ejemplo 500 € + 20%.
Como el 20% de 500 es: $\frac{20 \times 500}{100} = \frac{10.000}{100} = 100 \text{ €} \Rightarrow 500 + 100 = 600 \text{ €}$.
 - Hacer una regla de tres para obtener un porcentaje mayor que 100.

$$\begin{array}{ccc} 100\% & \longrightarrow & 500 \\ 120\% & \longrightarrow & x \end{array} \quad x = \frac{120 \cdot 500}{100} = \frac{60000}{100} = 600 \text{ €}.$$
 - Multiplicar por el tanto por 1 asociado al incremento, que será “uno y pico”, 1,20 en nuestro ejemplo: $\Rightarrow 500 \cdot 1,20 = 600 \text{ €}$
 - Aplicar la fórmula: $C_{\text{Final}} = C_{\text{Inicial}} \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)$, siendo r el tanto por ciento de incremento (la letra r viene de rédito o interés bancario). En el ejemplo:

$$C_{\text{Final}} = 500 \cdot \left(1 + \frac{20}{100}\right) = 500 \cdot 1,20 = 600 \text{ €}.$$

Otro ejemplo: un artículo cuesta sin I.V.A. 80 €. ¿Cuál es su precio con I.V.A. incluido del 21%?

Utilizamos el método más rápido, el tanto por 1 $\Rightarrow 80 \cdot 1,21 = 96,8 \text{ €}$

- Para deshacer un incremento porcentual y volver a la cantidad inicial, no sería correcto realizar un descuento de igual porcentaje, porque se aplicaría sobre una cantidad diferente: en el ejemplo **es incorrecto** hacer 600 € – 20%.
Veámoslo:

El 20% de 600 es: $\frac{20 \times 600}{100} = \frac{12.000}{100} = 120 \text{ €} \Rightarrow 600 - 120 = 480 \text{ €}$. **FALSO**.

Los otros procesos sí permiten deshacer la operación y son correctos:

- Hacer una regla de tres para obtener el porcentaje inicial del 100%.

$$\begin{array}{ccc} 120\% & \longrightarrow & 600 \\ 100\% & \longrightarrow & x \end{array} \quad x = \frac{100 \cdot 600}{120} = \frac{60000}{120} = 500 \text{ €}.$$
- Dividir por el tanto por 1 asociado al incremento, para volver al principio, en nuestro ejemplo: $600 : 1,2 = 500 \text{ €}$
- Aplicar la fórmula: $C_{\text{Inicial}} = \frac{C_{\text{Final}}}{\left(1 + \frac{r}{100}\right)} \Rightarrow C_{\text{Inicial}} = \frac{600}{\left(1 + \frac{20}{100}\right)} = \frac{600}{1,20} = 500 \text{ €}$

Otro ejemplo: un artículo cuesta con I.V.A. incluido del 21% 96,8 €. ¿Cuál es su precio sin I.V.A.?

Utilizamos el método más rápido, dividir por el tanto por 1 $\Rightarrow 96,8 : 1,21 = 80 \text{ €}$

- Al realizar un descuento porcentual, se resta un porcentaje al total. Hay varias formas de obtener el resultado final:
 - Hallar el porcentaje y restarlo a la cantidad. Ejemplo 300 € – 15%.
Como el 15% de 300 es: $\frac{15 \times 300}{100} = \frac{4.500}{100} = 45 \text{ €} \Rightarrow 300 - 45 = 255 \text{ €}$.

- Hacer una regla de tres para obtener un porcentaje menor que 100.

$$\begin{array}{ccc} 100\% & \longrightarrow & 300 \\ 85\% & \longrightarrow & x \end{array} \quad x = \frac{85 \cdot 300}{100} = \frac{25500}{100} = 255 \text{ €}.$$
- Multiplicar por el tanto por 1 asociado al descuento, que será “cero y pico”, en nuestro ejemplo $0,85 \Rightarrow 300 \cdot 0,85 = 255 \text{ €}$
- Aplicar la fórmula: $C_{\text{Final}} = C_{\text{Inicial}} \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right)$. En el ejemplo:

$$C_{\text{Final}} = 300 \cdot \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 300 \cdot 0,85 = 255 \text{ €}.$$

Otro ejemplo: un artículo que cuesta 50 € se rebaja un 30%. ¿Cuál es su nuevo precio rebajado?

Utilizamos el método más rápido, el tanto por 1 $\Rightarrow 50 \cdot 0,7 = 35 \text{ €}$

- Para deshacer un descuento porcentual y volver a la cantidad inicial, no sería correcto realizar un incremento de igual porcentaje, porque se aplicaría sobre una cantidad diferente: en el ejemplo actual, **sería incorrecto** $255 \text{ €} + 15\%$.

$$15\% \text{ de } 255 \text{ es: } \frac{15 \cdot 255}{100} = \frac{3825}{100} = 38,25 \text{ €} \Rightarrow 255 + 38,25 = 293,25 \text{ €}. \text{ FALSO.}$$

Los otros procesos sí permiten deshacer la operación y son correctos:

- Hacer una regla de tres para obtener el porcentaje inicial del 100%.

$$\begin{array}{ccc} 85\% & \longrightarrow & 255 \\ 100\% & \longrightarrow & x \end{array} \quad x = \frac{100 \cdot 255}{85} = \frac{25500}{85} = 300 \text{ €}.$$
- Dividir por el tanto por 1 asociado al descuento, para volver al principio, en nuestro ejemplo: $255 : 0,85 = 300 \text{ €}$
- Por la fórmula: $C_{\text{Inicial}} = \frac{C_{\text{Final}}}{\left(1 - \frac{r}{100}\right)} \Rightarrow C_{\text{Inicial}} = \frac{255}{\left(1 - \frac{15}{100}\right)} = \frac{255}{0,85} = 300 \text{ €}.$

Otro ejemplo: un artículo rebajado el 30% cuesta 35 €. ¿Cuál era su antiguo precio antes de ser rebajado?

Utilizamos el método más rápido, dividir por el tanto por 1 $\Rightarrow 35 : 0,7 = 50 \text{ €}$

2.7 Interés simple.

- En el interés simple el capital inicial permanece constante y los intereses obtenidos no se acumulan al capital.

Si llamamos i al interés en tanto por 1, es decir: $i = \frac{r}{100}$ y llamamos t al

número de años, podemos razonar el capital final resultante de la siguiente forma: por cada año, se obtiene de intereses la cantidad $C_{\text{Inicial}} \cdot i$. Por lo tanto, al cabo de t años tendremos de intereses $C_{\text{Inicial}} \cdot i \cdot t$ y el resultado final será

$C_{\text{Final}} = C_{\text{Inicial}} + C_{\text{Inicial}} \cdot i \cdot t$, que sacando factor común resulta la siguiente

fórmula: $C_{\text{Final}} = C_{\text{Inicial}} (1 + i \cdot t)$.

Ejemplo: se depositan 20.000 € al 12% de interés simple durante 5 años. Crear una tabla con el capital final en cada uno de los años.

Años	Capital	Interés	C _{Final}
1	20.000 €	2.400 €	22.400 €
2	20.000 €	2.400 €	24.800 €
3	20.000 €	2.400 €	27.200 €
4	20.000 €	2.400 €	29.600 €
5	20.000 €	2.400 €	32.000 €

$$C_{\text{Final}} = 20.000(1 + 0,12 \cdot 5) = 20.000(1 + 0,6) = 20.000 \cdot 1,6 = 32.000 \text{ €}$$

Nota: si los intereses se pagan por meses o días, la fórmula no varía:

$$\text{- Meses: } C_{\text{final}} = C_{\text{inicial}} \cdot \left(1 + \frac{i \cdot 12 \cdot t}{12}\right) = C_{\text{inicial}} \cdot (1 + i \cdot t)$$

$$\text{- Días: } C_{\text{final}} = C_{\text{inicial}} \cdot \left(1 + \frac{i \cdot 365 \cdot t}{365}\right) = C_{\text{inicial}} \cdot (1 + i \cdot t)$$

2.8 Interés compuesto.

- En el interés compuesto, el capital varía cada año porque los intereses obtenidos se van acumulando al capital.

Si llamamos i al interés: $i = \frac{r}{100}$ y t al número de años, podemos razonar el

capital final resultante de la siguiente forma:

Cada año se está realizando un incremento porcentual. Por tanto, se está multiplicando por $(1 + i)$, por lo que al cabo de t años habremos multiplicado por esa cantidad t veces, es decir $(1 + i)^t$ y tendremos la siguiente fórmula:

$$C_{\text{Final}} = C_{\text{Inicial}} \cdot (1 + i)^t$$

Ejemplo: se depositan 20.000 € al 12% de interés compuesto durante 5 años. Crear una tabla con el capital final en cada uno de los años.

Años	Capital	Interes	C _{Final}
1	20.000 €	2.400 €	22.400 €
2	22.400 €	2.688 €	25.088 €
3	25.088 €	3.010,56 €	28.098,56 €
4	28.098,56 €	3.371,8272 €	31.470,3872 €
5	31.470,3872 €	3.776,446464 €	35.246,833664 €

$$C_{\text{Final}} = 20.000(1 + 0,12)^5 = 20.000(1,12)^5 = 20.000 \cdot 1,7623416832 = 35.246,833664 \text{ €}$$

Se han mantenido todos los decimales sin redondear al céntimo, para comprobar que los resultados de la tabla coinciden con la fórmula.

Nota: si los intereses se pagan por semestres, trimestres, bimestres, meses o días, la fórmula pasa a ser la siguiente:

$$\text{- Semestres: } C_{\text{final}} = C_{\text{inicial}} \cdot \left(1 + \frac{i}{2}\right)^{2t}$$

- Trimestres: $C_{\text{final}} = C_{\text{inicial}} \cdot \left(1 + \frac{i}{4}\right)^{4t}$
- Bimestres: $C_{\text{final}} = C_{\text{inicial}} \cdot \left(1 + \frac{i}{6}\right)^{6t}$
- Meses: $C_{\text{final}} = C_{\text{inicial}} \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12t}$
- Días: $C_{\text{final}} = C_{\text{inicial}} \cdot \left(1 + \frac{i}{365}\right)^{365t}$
- La tasa anual equivalente es T.A.E. = $\left(1 + \frac{i}{k}\right)^k - 1$ (k es el nº de períodos).

2.9 Amortización de un préstamo.

- Veamos en primer lugar un repaso sobre las progresiones geométricas: una progresión geométrica es un caso particular de sucesión, en la que cada término se obtiene a partir del término anterior, multiplicando por un número fijo r llamado razón.

$$a_1 = a_1, a_2 = a_1 \cdot r, a_3 = a_1 \cdot r^2, a_4 = a_1 \cdot r^3, \dots \Rightarrow \boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}.$$

Es decir, todos los términos se expresan a partir del primero a_1 y de la razón r , multiplicando al primero por la razón $(n-1)$ -veces.

Ejemplo: hallar el término general de la sucesión: $a_n \equiv 3, 6, 12, 24, \dots$

Claramente, el primer término es $a_1 = 3$ y la razón es $r = 2$.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1} \text{ y podemos comprobarlo sustituyendo } n \text{ por } 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$a_1 = 3, a_2 = 6, a_3 = 12, a_4 = 24, \dots$$

En las progresiones geométricas se puede calcular la suma de los primeros

términos mediante la fórmula $\boxed{S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1 - r}}$. Ejemplo: hallar la suma de las

10 primeras potencias de 2. $a_n \equiv 2, 4, 8, 16, \dots$, el primer término es $a_1 = 2$, la razón es $r=2$ y el último término o término de lugar 10 es $a_{10} = 1024$, que se obtiene del término general: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$, sustituyendo por 10, $a_{10} = 2^{10} = 1024$. Luego aplicando la fórmula, la suma será:

$$S_{10} = \frac{a_1 - a_{10} \cdot r}{1 - r} = \frac{2 - 1024 \cdot 2}{1 - 2} = \frac{-2046}{-1} = 2046.$$

- Supongamos que pedimos al banco un préstamo de capital C a un interés i en tanto por uno $\left(i = \frac{r}{100}\right)$, que se amortizará en un número de años t mediante anualidades constantes (sistema de amortización francés). Cada año se amortizará la misma cantidad “ a ”. Esa cantidad “ a ” se llama anualidad de amortización, y se calcula según el siguiente proceso:
El banco deberá recibir al final según el interés compuesto: $C \cdot (1 + i)^t$.

La amortización “a” que hace el cliente el primer año, genera intereses a favor del banco durante $t - 1$ años, convirtiéndose en $a \cdot (1+i)^{t-1}$.

La amortización “a” que hace el cliente el segundo año, genera intereses a favor del banco durante $t - 2$ años, convirtiéndose en $a \cdot (1+i)^{t-2}$.

Y así sucesivamente hasta el penúltimo año, en el que se amortizará una cantidad “a” que generará intereses durante un año, pasando a ser: $a \cdot (1+i)$.

Finalmente el último año se amortiza una cantidad “a” que no generará ningún interés.

Si igualamos la cantidad que debe recibir el banco con las cantidades amortizadas y los intereses que generan dichas cantidades, tendremos:

$$C(1+i)^t = a \cdot (1+i)^{t-1} + a \cdot (1+i)^{t-2} + \dots + a \cdot (1+i) + a$$

La parte de la derecha es la suma (“al revés”) de una progresión geométrica de razón $(1+i)$, y la suma se calcula a partir de la fórmula: $S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1-r}$.

$$C(1+i)^t = \frac{a - a \cdot (1+i)^t}{1 - (1+i)} \Rightarrow C(1+i)^t = \frac{a - a \cdot (1+i)^t}{-i} \Rightarrow C(1+i)^t = \frac{a \cdot (1+i)^t - a}{i}$$

$$\text{Luego: } C(1+i)^t = \frac{a[(1+i)^t - 1]}{i} \Rightarrow a[(1+i)^t - 1] = C(1+i)^t \cdot i \Rightarrow \boxed{a = \frac{C(1+i)^t \cdot i}{(1+i)^t - 1}}$$

Realizando el mismo proceso para una hipoteca que se amortiza en semestres, trimestres, bimestres, meses o incluso días, tendremos las fórmulas siguientes:

$$\text{Semestres: } S = \frac{C \left(1 + \frac{i}{2}\right)^{2t} \cdot \frac{i}{2}}{\left(1 + \frac{i}{2}\right)^{2t} - 1}$$

$$\text{Trimestres: } T = \frac{C \left(1 + \frac{i}{4}\right)^{4t} \cdot \frac{i}{4}}{\left(1 + \frac{i}{4}\right)^{4t} - 1}$$

$$\text{Bimestres: } B = \frac{C \left(1 + \frac{i}{6}\right)^{6t} \cdot \frac{i}{6}}{\left(1 + \frac{i}{6}\right)^{6t} - 1}$$

$$\text{Meses: } m = \frac{C \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12t} \cdot \frac{i}{12}}{\left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12t} - 1}$$

$$\text{Días: } d = \frac{C \left(1 + \frac{i}{365}\right)^{365t} \cdot \frac{i}{365}}{\left(1 + \frac{i}{365}\right)^{365t} - 1}$$

Ejemplo: pedimos un préstamo de 10.000 € al 12 % que pagaremos durante un año en 12 mensualidades.

- Hallar el valor de la mensualidad que debemos pagar.
- Escribir la tabla o cuadro de amortización.

Aplicamos la fórmula $m = \frac{C \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12t} \cdot \frac{i}{12}}{\left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12t} - 1}$ siendo $C=10.000$ €, $t=1$ y el

interés en tanto por uno: $i = \frac{r}{100} = \frac{12}{100} = 0,12$.

$$m = \frac{10000 \left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{12} \cdot \frac{0,12}{12}}{\left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{12} - 1} = \frac{10000(1+0,01)^{12} \cdot 0,01}{(1+0,01)^{12} - 1} = \frac{10000(1,01)^{12} \cdot 0,01}{(1,01)^{12} - 1}$$

$$m = \frac{100(1,12682503)}{1,12682503 - 1} = \frac{112,682503}{0,12682503} = 888,487886783417 \text{ €}.$$

Meses	Capital antes del pago	Mensualidad	Intereses	Capital amortizado	Capital restante
1	10000	888,487886783417	100	788,487886783417	9211,512113216580
2	9211,512113216580	888,487886783417	92,115121132166	796,372765651251	8415,139347565330
3	8415,139347565330	888,487886783417	84,151393475653	804,336493307763	7610,802854257570
4	7610,802854257570	888,487886783417	76,108028542576	812,379858240841	6798,422996016730
5	6798,422996016730	888,487886783417	67,984229960167	820,503656823249	5977,919339193480
6	5977,919339193480	888,487886783417	59,779193391935	828,708693391482	5149,210645802000
7	5149,210645802000	888,487886783417	51,492106458020	836,995780325397	4312,214865476600
8	4312,214865476600	888,487886783417	43,122148654766	845,365738128651	3466,849127347950
9	3466,849127347950	888,487886783417	34,668491273480	853,819395509937	2613,029731838010
10	2613,029731838010	888,487886783417	26,130297318380	862,357589465037	1750,672142372980
11	1750,672142372980	888,487886783417	17,506721423730	870,981165359687	879,690977013289
12	879,690977013289	888,487886783417	8,796909770133	879,690977013289	0
SUMA		10661,854641401	661,854641401	10000	

Se han mantenido todos los decimales, sin redondear al céntimo, para comprobar que la tabla y la fórmula son coherentes. Por tanto, al final no se debe nada. También puede observarse como la cantidad pagada coincide con la suma de capital más intereses.